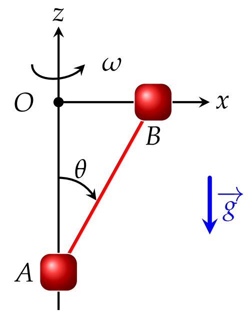
TD n°2 : Mécanique non galiléenne et du solide

Exercice 1 : Régulateur de WATT (Mines)

Une tige rigide sans masse relie deux masses ponctuelles identiques m en ses extrémités A et B.

L'extrémité B est percée et glisse sans frottements sur une tige horizontale Ox alors que l'extrémité A est percée et glisse sans frottements sur une tige verticale Oz.

La tige horizontale tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe Oz fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



Enfin, le champ de pesanteur est uniforme et on repère le mouvement par l'angle θ entre Oz et $\overrightarrow{AB}$.

1) Discuter l'existence de positions d'équilibre et leur stabilité selon les valeurs du rapport $p = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

2) Pourquoi l'énergie mécanique ne se conserve-t-elle pas dans le référentiel absolu ? Comment évolue-t-elle ?

Exercice 2 : Jeu de ballon sur un manège (X-ESPCI)

Un enfant est assis sur un cheval en bois à la périphérie d'un manège de rayon R tournant à vitesse angulaire ω constante autour de son axe Oz vertical. Il désire lancer un ballon en direction du mât confondu avec l'axe Oz en lui communiquant une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$.

1) À quelle condition peut-on négliger le poids ?

2) On néglige aussi la traînée de l'air. Comment faut-il lancer le ballon ?

Exercice 3 : Déviation vers l'est

Un point matériel de masse m est lâché sans vitesse initiale d'une altitude h depuis un lieu de latitude λ. On définit une base orthonormale $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, avec $\overrightarrow{u_x}$ vers l'est et $\overrightarrow{u_y}$ vers le nord.

1) Faire un bilan des forces exercées sur le mobile dans le référentiel terrestre non galiléen. On prendra le poids selon $-\overrightarrow{u_z}$, qu'est ce que cela implique ?

2) Écrire le principe fondamental de la dynamique et projeter sur les trois vecteurs de base.

On cherche à résoudre ce système par la méthode des perturbations (ou approximations successives).

3) On se place à l'ordre 0, ce qui revient à négliger la perturbation au mouvement de chute libre que représente la force d'inertie de CORIOLIS. Déterminer l'équation temporelle du mouvement ainsi que le temps de chute t_0.

4) À l'ordre 1, on reporte la solution d'ordre 0 dans les équations du mouvement. Montrer que l'on obtient une correction à la chute libre dans la direction x. Montrer qu'elle s'exprime en fonction de la hauteur h sous la forme

$$x(t_0) = \frac{g\Omega_T \cos\lambda}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$$

5) Faire une application numérique pour $h = 158\,\mathrm{m}$, $\lambda = 50$ et $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

6) Ferdinand REICH a mesuré en 1833 dans de telles conditions une déviation vers l'est de 28 mm pour une masse tombant dans un puits de mine. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 4 : Limite de ROCHE (ADS X-ESPCI)

Une comète de masse M_C, sphérique de rayon R_C, est constituée de poussières liées par la gravitation. Elle passe à une distance d du Soleil de masse M_S. À quelle condition explose-t-elle ?

Exercice 5 : Corde truquée ? (X-ESPCI)

À quelle condition une corde peut-elle rester tendue verticalement en étant attachée par son extrémité inférieure en un point O de l'équateur ?

Réponses

Exercice 1 : Régulateur de WATT

1) $\overrightarrow{a_e} = -\,\omega^2\,x\,\overrightarrow{u_x}$; $E_p = -\,(1/2)\,m\,\omega^2\,l^2\,\sin^2\theta - m\,g\,l\,\cos\theta$; si $\omega < \omega_0$ on a une seule position d'équilibre en $\theta_e = 0$, stable ; si $\omega > \omega_0$, $\theta_e = 0$ est instable et $\cos\theta_e = \omega_0^2/\omega^2$ stable.

2) $\overline{N}_y$ travaille ; $\overline{N}_y = 2m\,\omega\,\dot{x}$; $dE/dt = 2m\,\omega^2\,x\,\dot{x}$ donc $E - m\,\omega^2\,x^2 = \text{cste}$.

Exercice 2 : Jeu de ballon sur un manège

1) $v_0 \gg \sqrt{g\,R}$

2.a) Raisonnement dans $(R) = (Oxyz)$ galiléen ; $x(t) = R + v_0\,t\,\cos\alpha$ et $y(t) = (R\omega + v_0\,\sin\alpha)\,t$; $\sin\alpha = -\,R\,\omega/v_0$ ce qui impose $v_0 > R\,\omega$.

2.b) Raisonnement dans $(R') = (OXYz)$ non galiléen ; $\dot{X}_0 = v_0\,\cos\alpha$ et $\dot{Y}_0 = v_0\,\sin\alpha$; $\ddot{X} = \omega^2\,X + 2\,\omega\,\dot{Y}$; $\ddot{Y} = \omega^2\,Y - 2\,\omega\,\dot{X}$; poser $u = X + jY$; $\ddot{u} + 2j\omega\,\dot{u} - \omega^2\,u = 0$; $u(t) = (At + B)\,\exp(-j\omega t)$; $u(t = 0) = R = B$; $\dot{u}(t = 0) = V_0\,\exp(j\alpha) = A - j\omega\,B$; $u(t) = R\,(1 + j\omega t)\,\exp(-j\omega t) + V_0\,t\,\exp(j\alpha)\,\exp(-j\omega t)$; $X(t) = \mathcal{R}e\{u(t)\}$ et $Y(t) = \mathcal{I}m\{u(t)\}$ donnent la même réponse que dans (R).

Exercice 3 : Déviation vers l'est

2) $\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega_T(\dot{y}\sin\lambda - \dot{z}\cos\lambda) \\ \ddot{y} = -2\Omega_T\dot{x}\sin\lambda \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega_T\dot{x}\cos\lambda \end{cases}$

3) $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ soit $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

4) $\ddot{x} = -2\Omega_T\dot{z}\cos\lambda \simeq 2\Omega_T g t\cos\lambda$ à intégrer.

Exercice 4 : Limite de ROCHE

$2\,\mathcal{G}\,m\,M_S\,R_C/d^3 > \mathcal{G}\,m\,M_C/R_C^2$ soit $d < R_C\,(2M_S/M_C)^{1/3}$

Exercice 5 : Corde truquée ?

$\mu = m/L$; $dT/dr = -\,\mu\,\Omega_T^2\,r + \mu\,\mathcal{G}\,M_T/r^2$ avec $T(R_T + L) = 0$; on veut $T(r) > 0$ pour $R_T \leq r \leq R_T + L$; $\mathcal{G}\,M_T/\Omega_T^2\,R_T < (R_T + L)\,(R_T + L/2)$ soit approximativement $L > 16\,R_T$