

Correction du devoir de révisions

I. Satellite SPOT

- 1) On applique le principe fondamental de la dynamique au satellite dans le référentiel géocentrique galiléen $m \vec{a} = -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{u}_r$. La projection de cette équation sur la direction radiale donne

$$-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{GmM_T}{r^2} \Rightarrow v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Le satellite parcourt la distance $2\pi r$ en une durée T à vitesse constante, d'où la troisième loi de KÉPLER :

$$\sqrt{\frac{GM_T}{r}} = v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

Les applications numériques donnent

$$\begin{cases} v = \sqrt{\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24}}{(6400 + 800) \cdot 10^3}} = 7,5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \\ T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times (6400 + 800) \cdot 10^3}{7,5 \cdot 10^3} = 6,1 \cdot 10^3 \text{ s} = 1 \text{ h } 41 \text{ min} \end{cases}$$

- 2) L'énergie cinétique s'écrit $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_T m}{2r}$. Or, l'énergie potentielle se déduit de la force de gravitation par la formule

$$-\frac{GmM_T}{r^2} \vec{u}_r = \vec{F} = -\vec{\text{grad}}(E_p) = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r \Rightarrow E_p = -\frac{GM_T m}{r} = -2E_c$$

Cette relation constitue un cas particulier du théorème du viriel. L'énergie mécanique s'écrit alors sous la forme

$$E_m = E_c + E_p = -E_c = -\frac{GM_T m}{2r}$$

- 3) Le travail de la force de frottement diminue l'énergie mécanique du satellite. D'après la relation précédente, cela diminue son rayon r , donc le **rapproche de la Terre**. On en déduit, d'après la relation de la première question, que la **vitesse va augmenter**. On est donc dans le cas d'une force de frottement qui accélère un objet!

En ce qui concerne les dimensions :

$$[\alpha] = \frac{[f]}{[m][v]^2} = \frac{MLT^{-2}}{M \times (LT^{-1})^2} = L^{-1}$$

α est donc l'inverse d'une distance.

- 4) La seule force non conservative est la force de frottement exercée par l'atmosphère. D'après le théorème de l'énergie mécanique, $\frac{dE_m}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\alpha m v^3$. La trajectoire restant quasi-circulaire, on peut utiliser les résultats des questions précédentes pour E_m et v . Il vient :

$$\frac{GmM_T}{2r^2} \dot{r} = -\alpha m \left(\frac{GM_T}{r}\right)^{3/2} \Rightarrow \dot{r} = -2\alpha \sqrt{GM_T r}$$

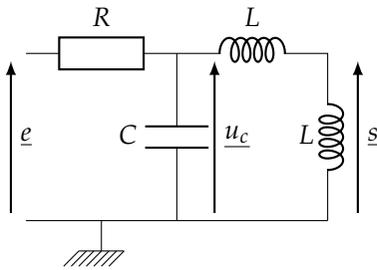
Pour une révolution, la variation de rayon est faible, donc $\frac{dr}{dt} \approx \frac{\Delta r}{T}$ avec $\Delta r = -1$ m. On en déduit

$$\alpha \approx -\frac{\Delta r}{2T\sqrt{GM_T r}} \stackrel{\text{Képler}}{=} -\frac{\Delta r}{2 \times 2\pi r^{3/2} \sqrt{r}} = -\frac{\Delta r}{4\pi r^2}$$

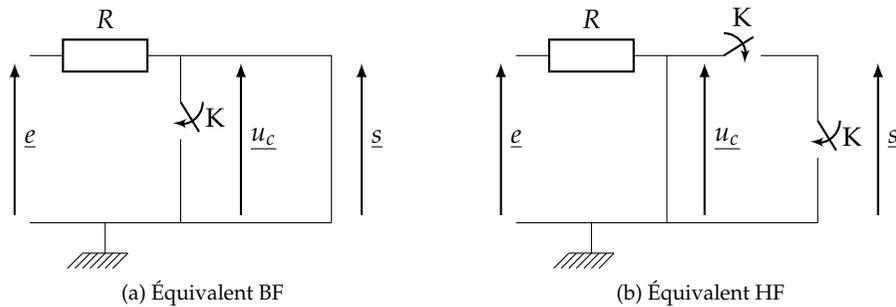
$$\text{Finalement } \alpha \approx \frac{1}{4\pi \times [(6400 + 800) \cdot 10^3]^2} = 10^{-15} \text{ m}^{-1}$$

- 5) En 10 ans, le nombre de révolutions orbitales vaut : $N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{10 \times 365 \times 24 \times 3600}{6100} \approx 5,2 \cdot 10^4$. **La perte d'altitude est donc de l'ordre de 50 km.**
- 6) L'altitude de 800 km est un bon compromis car :
- **la trajectoire est stable**, puisque la variation d'altitude est faible devant l'altitude moyenne,
 - **la période de révolution est courte**, ce qui permet de réaliser plusieurs images d'un même zone (toutes les 1 h 40),
 - **le satellite est beaucoup plus proche** de la Terre que dans le cas d'une orbite géostationnaire, par ex., ce qui permet de réaliser des photos avec une meilleure définition.

II. Filtre de HARTLEY



1) On peut commencer par une étude qualitative, permettant de vérifier la nature du filtre. Les équivalents en basse et haute fréquences du circuit sont ci-dessous



Ce filtre ne laisse pas passer les BF, puisque $s = 0$ (tension aux bornes d'un fil).

En HF, un pont diviseur de tension donne $s = \frac{Z_L}{Z_L + Z_L} u_c = \frac{u_c}{2}$. Or, ici $u_c = 0$ (fil), donc $s = 0$.

Ce filtre est donc bien un **passé-bande**.

Exprimons maintenant la fonction de transfert. Le diviseur de tension précédent permet toujours de relier s à u_c par la relation $s = \frac{u_c}{2}$.

Il reste donc à faire le lien entre u_c à e . Pour cela, on remplace les deux bobines et le condensateur par une impédance équivalente. Les deux bobines sont en série, donc $Z = 2Z_L = 2jL\omega$. Puisqu'elles sont en parallèle du condensateur, on en déduit

$$Y_{eq} = Y + Y_C = \frac{1}{Z} + jC\omega = \frac{1}{2jL\omega} + jC\omega \Rightarrow Z_{eq} = \frac{2jL\omega}{1 - 2LC\omega^2}$$

Un pont diviseur de tension donne alors

$$\frac{u_c}{e} = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R} = \frac{2jL\omega}{2jL\omega + R(1 - 2LC\omega^2)} \quad (1)$$

En combinant les deux ponts diviseurs, on peut écrire

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{jL\omega}{R(1 - 2LC\omega^2) + 2jL\omega} = \frac{jL\omega/R}{1 - 2LC\omega^2 + 2jL\omega/R}$$

Et en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient bien

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jLx\omega_0/R}{1 - x^2 + 2jLx\omega_0/R} = \frac{2jmxH_0}{1 - x^2 + 2jmx}$$

avec $H_0 = \frac{1}{2}$ et $m = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{2C}}$.

2) Le comportement asymptotique du filtre s'écrit

BF	$\underline{H} \sim 2jmH_0x$	$G \sim 2mH_0x$	$G_{dB} \sim 20 \log \left(\frac{2mH_0\omega}{\omega_0} \right)$	$\varphi \sim \frac{\pi}{2}$
HF	$\underline{H} \sim -\frac{2jmH_0}{x}$	$G \sim \frac{2mH_0}{x}$	$G_{dB} \sim 20 \log \left(\frac{2mH_0\omega_0}{\omega} \right)$	$\varphi \sim -\frac{\pi}{2}$

On en déduit une **asymptote à +20 dB/décade en BF** (G_{dB} équivalent à $20 \log \omega$) et **-20 dB/décade en HF** (G_{dB} équivalent à $-20 \log \omega$). Ces deux asymptotes se croisent quand

$$20 \log \left(\frac{2mH_0\omega}{\omega_0} \right) = 20 \log \left(\frac{2mH_0\omega_0}{\omega} \right) \Rightarrow 40 \log \omega = 40 \log \omega_0 \Rightarrow \omega = \omega_0$$

L'ordonnée de ce point d'intersection est

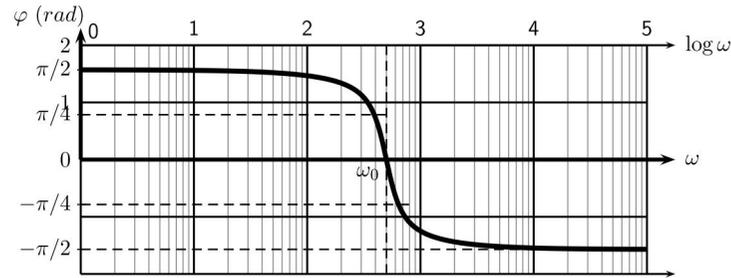
$$\beta = 20 \log(2mH_0) = 20 \log \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{2C}} = -43 \text{ dB}$$

Le gain réel en décibels à $\omega = \omega_0$ correspond à α . Or

$$\underline{H}(j\omega_0) = \frac{2jmH_0}{1 - 1 + 2jm} = H_0 = \frac{1}{2}$$

On en déduit donc $\varphi = \arg(1/2) = 0$ et $\alpha = G_{dB}(\omega_0) = 20 \log \frac{1}{2} = -6 \text{ dB}$.

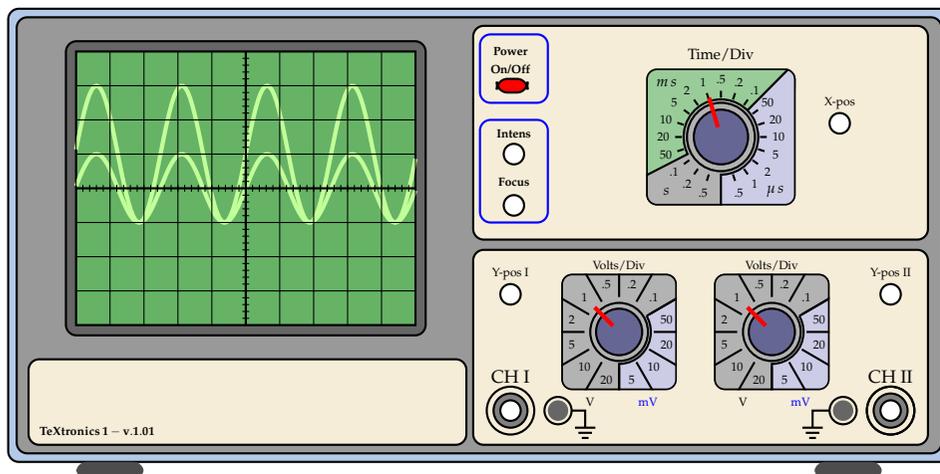
Le tracé du diagramme de BODE en phase donne alors



3) Par linéarité de la fonction de transfert, on peut étudier son effet sur chacune des composantes du signal e_1 pour trouver la sortie s_1 :

- la composante continue E_0 est de fréquence nulle. Or $\underline{H}(0) = 0$, donc la composante continue est coupée en sortie.
- la composante E_1 a pour pulsation $\omega_1 = \omega_0$. Or $\underline{H}(\omega_0) = \frac{1}{2}$, donc l'amplitude en sortie sera divisée par 2 et le déphasage est nul.

Au final, $s_1(t) = 0 + \frac{E_1}{2} \cos(\omega_1 t + 0)$ et on obtiendrait à l'oscilloscope les courbes suivantes (pour $E_0 = 1 \text{ V}$, $E_1 = 2 \text{ V}$ et $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 2,5 \text{ ms}$) :



4) Qualitativement, on remarque que la troisième harmonique du créneau, de pulsation $3\omega_2 = \omega_0$, tombe pile dans la bande passante du passe-bande, alors que le fondamental et les autres harmoniques se retrouvent sur les asymptotes à $\pm 20 \text{ dB/décade}$ et sont donc atténués. On s'attend donc à avoir un signal sinusoïdal de pulsation $3\omega_2$, d'où le nom de **tripleur de fréquence**.

On peut aussi faire les calculs pour le justifier quantitativement. Le gain du filtre étant

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{2mH_0 \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{4m^2\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

on peut calculer les amplitudes de sortie en multipliant les amplitudes d'entrée des différentes composantes de FOURIER par la valeur du gain à leurs fréquences. En effet, pour le signal $e_2 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(n\omega_2 t)$ donné ci-dessus, la sortie s'écrit

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\omega_2 t + \psi_n) \text{ avec } S_n = G(n\omega_2)E_n \text{ et } \psi_n = \arg(\underline{H}(jn\omega_2))$$

On en déduit :

- pour le fondamental ($\omega_2 = \frac{\omega_0}{3}$) : $S_1 = G(\omega_2) \frac{4E_{20}}{\pi} = 3,4 \cdot 10^{-3}$
- pour l'harmonique 3 ($3\omega_2 = \omega_0$) : $S_3 = G(\omega_0) \frac{4E_{20}}{3\pi} = 2,1 \cdot 10^{-1}$
- pour l'harmonique 5 ($5\omega_2 = \frac{5}{3}\omega_0$) : $S_5 = G(5\omega_2) \frac{4E_{20}}{5\pi} = 1,7 \cdot 10^{-3}$

On retrouve donc bien en sortie un **signal quasi-sinusoïdal de fréquence $3\omega_2 = \omega_0$ triple de la fréquence d'entrée du créneau**

$$s(t) \simeq G(3\omega_2) \frac{4E_{20}}{3\pi} \sin(3\omega_2 t) = 2,1 \cdot 10^{-1} \sin(7,1 \cdot 10^4 t)$$

5) Pour obtenir l'équation différentielle, il suffit de réécrire la fonction de transfert et de repasser en réel :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{2jmxH_0}{1 - x^2 + 2jmx} \Rightarrow \left(\frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2 + \frac{2m}{\omega_0} j\omega + 1 \right) \underline{s} = \frac{2mH_0}{\omega_0} j\omega \underline{e}$$

Sachant qu'une multiplication par $j\omega$ en complexe revient à une dérivation par rapport au temps en réel, on en déduit :

$$\ddot{s} + 2m\omega_0\dot{s} + \omega_0^2 s = 2mH_0\omega_0\dot{e}$$

Or, $e(t > 0) = e_3(t > 0) = E_{30} = \text{cste}$, donc $\dot{e}_3(t > 0) = 0$, ce qui donne bien l'équation différentielle demandée pour s_3 .

- 6) À $t = 0^-$, toutes les tensions et courants sont nuls. La tension aux bornes d'un condensateur étant continue, on en déduit que $0 = u_c(0^-) = u_c(0^+)$.

Or, puisque $s_3 = \frac{u_c}{2}$, on en déduit que $s_3(0^+) = 0$.

À $t = 0^+$, la loi des mailles donne $Ri_R = u_R = e_3 = E_{30}$ puisque $u_c = 0$. Or, le courant passant dans une bobine est continu, donc $0 = i_L(0^-) = i_L(0^+)$. La loi des nœuds permet d'en déduire que $C\dot{u}_c = i_c = i_R = \frac{E_{30}}{R}$. Le même diviseur

de tension que précédemment montre qu'on a bien $\dot{s}_3 = \frac{\dot{u}_c}{2} = \frac{E_{30}}{2RC}$.

- 7) En cherchant des solutions sous la forme $s_3(t) = Ae^{rt}$, on obtient l'équation caractéristique suivante

$$r^2 + 2m\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

de discriminant $\Delta = 4m^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$. Or $m = 7,1 \cdot 10^{-3}$, donc $\Delta < 0$. On en déduit que l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$r_{\pm} = -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - m^2} \approx -m\omega_0 \pm j\omega_0$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme

$$s_3(t) \approx e^{-m\omega_0 t} (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$$

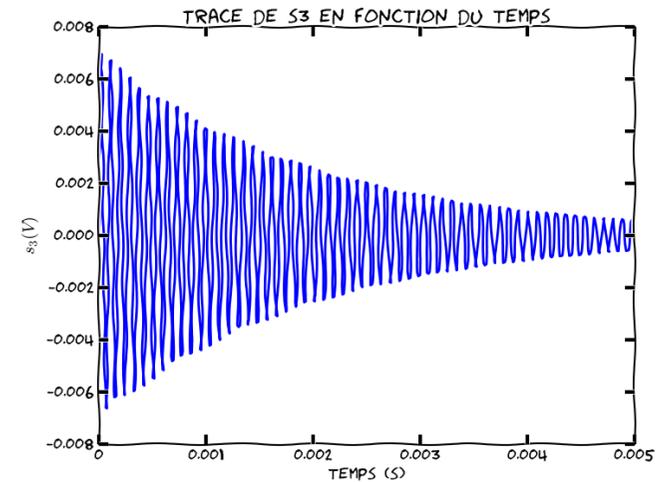
Les deux constantes d'intégrations se déterminent par les conditions initiales

$$\begin{cases} 0 = s_3(0) \approx A \\ \frac{E_{30}}{2RC} = \dot{s}_3(0) \approx -m\omega_0 A + B\omega_0 \end{cases}$$

Finalement

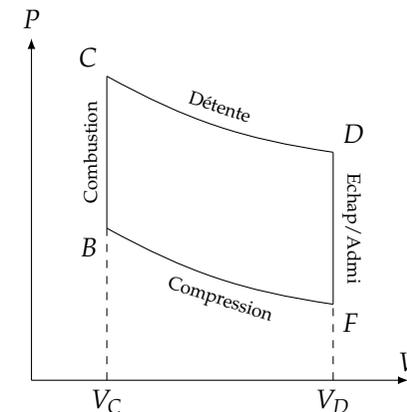
$$s_3(t) \approx \frac{E_{30}}{2\omega_0 RC} \exp(-m\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) = 7,1 \cdot 10^{-3} \exp(-5,0 \cdot 10^2 t) \sin(7,1 \cdot 10^4 t)$$

dont le tracé a l'allure suivante



III. Moteur de scooter

- 1) L'allure du cycle (FBCDF) dans un diagramme de Watt (P, V) est la suivante :



- 2) Un tour de vilebrequin correspond à un cycle thermodynamique. 7000 tours sont effectués en 60s, donc un tour prend $\Delta t = 60/7000 = 8,57 \cdot 10^{-3}$ s, durée d'un cycle.

Un cycle correspond à un aller-retour, c'est-à-dire à une distance $d = 2 \times 39,2 \cdot 10^{-3} = 7,84 \cdot 10^{-2}$ m.

La vitesse moyenne du piston vaut donc :

$$v_{moy} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{7,84 \cdot 10^{-2}}{8,57 \cdot 10^{-3}} = 9,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 3) En supposant que le mélange air-essence puisse être considéré comme un gaz parfait, la transformation FB étant adiabatique et réversible, on peut appliquer la loi de LAPLACE¹ $P_B V_B^\gamma = P_F V_F^\gamma$. De plus, la combustion et l'échappement sont isochores, donc

$$a = \frac{V_D}{V_C} = \frac{V_F}{V_B} = \left(\frac{P_B}{P_F} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 6,00^{\frac{1}{1,4}} = 3,60$$

- 4) Le rendement thermodynamique η du cycle est le rapport du travail fourni à l'extérieur sur la chaleur libérée par la combustion $\eta = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{chaud}}}$. Déterminons ces deux termes :

- Pour les transformations isochores BC et DF , le travail $W = -\int P_{\text{ext}} dV$ est nul de par sa définition. Les détente et compression CD et FB sont adiabatiques réversibles donc, d'après le premier principe :

$$\Delta U = W + Q = W$$

Or pour un gaz parfait $\Delta U \stackrel{\text{Joule}}{=} C_v \Delta T = n C_{vm} \Delta T$, d'où :

$$W_{CD} = n C_{vm} (T_D - T_C) \text{ et } W_{FB} = n C_{vm} (T_B - T_F)$$

Le travail sur le cycle complet vaut donc :

$$W_{\text{cycle}} = n C_{vm} (T_D - T_C + T_B - T_F)$$

- La combustion correspond à la portion $B'C'$ et cette portion est isochore (donc $W = 0$). Le premier principe donne alors :

$$\Delta U = Q_{\text{chaud}} = n C_{vm} \Delta T = n C_{vm} (T_C - T_B)$$

On en déduit

$$\eta = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{\text{chaud}}} = \frac{T_C - T_B + T_F - T_D}{T_C - T_B} = 1 - \frac{T_D - T_F}{T_C - T_B}$$

1. Que l'on peut retrouver avec la donnée de l'entropie S , en disant qu'une transformation adiabatique et réversible est isentropique, et en utilisant que $C_v = nR/(\gamma - 1)$.

Or pour une adiabatique réversible $PV^\gamma = \text{cste}$ et $PV = nRT$, d'où $TV^{\gamma-1} = \text{cste}'$ ou encore

$$\left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_D}{T_C} = \frac{T_F}{T_B} = \frac{T_D - T_F}{T_C - T_B}$$

Finalement

$$\eta = 1 - a^{1-\gamma} = 0,4$$

- 5) Le travail vaut $P\Delta t = W = \eta Q_{\text{chaud}}$ et la durée du cycle est de 8,57 ms d'où :

$$Q_{\text{chaud}} = \frac{P\Delta t}{\eta} = \frac{4,40 \cdot 10^3 \times 8,57 \cdot 10^{-3}}{0,4} = 94,3 \text{ J/cycle}$$

- 6) La durée de parcours de $D = 100 \text{ km}$ à la vitesse $v = 45,0/3,60 = 12,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ vaut $\tau = D/v$. Le nombre de cycles s'écrit donc $N = \tau/\Delta t$, ce qui permet d'en déduire l'énergie totale mise en jeu $E = N Q_{\text{chaud}}$.

Finalement, le pouvoir calorifique permet d'en déduire le volume d'essence consommée :

$$V = \frac{E}{q} = \frac{D Q_{\text{chaud}}}{v \Delta t q} = \frac{1,00 \cdot 10^5 \times 94,3}{12,5 \times 8,57 \cdot 10^{-3} \times 3,0 \cdot 10^4} = 2,9 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 2,9 \text{ L}$$

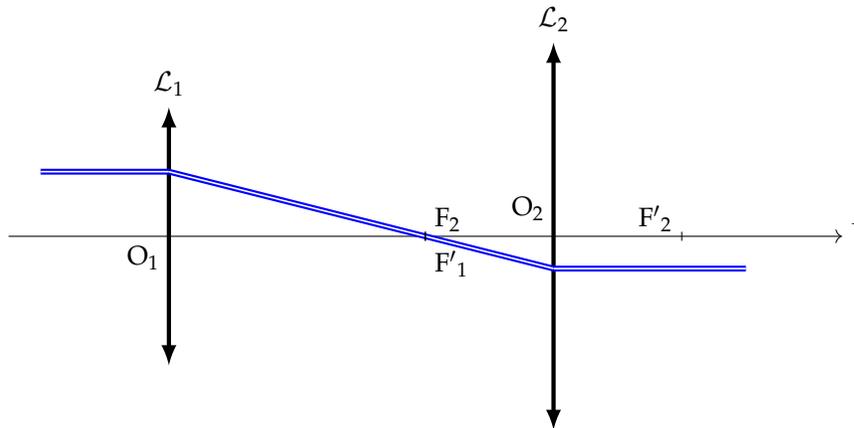
Le pouvoir calorifique de l'essence est grand donc la consommation reste faible. Cette valeur est concordante avec la consommation d'un tel engin.

IV. Lunette astronomique

- 1) Si l'objet est à l'infini (on regarde des étoiles), alors son image par L_1 est en F'_1 . Si l'image finale par L_2 est à l'infini aussi (pour ne pas accommoder), alors c'est que l'objet est en F_2 . Ce que l'on peut représenter par

$$A = \infty \xrightarrow{L_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A' = \infty$$

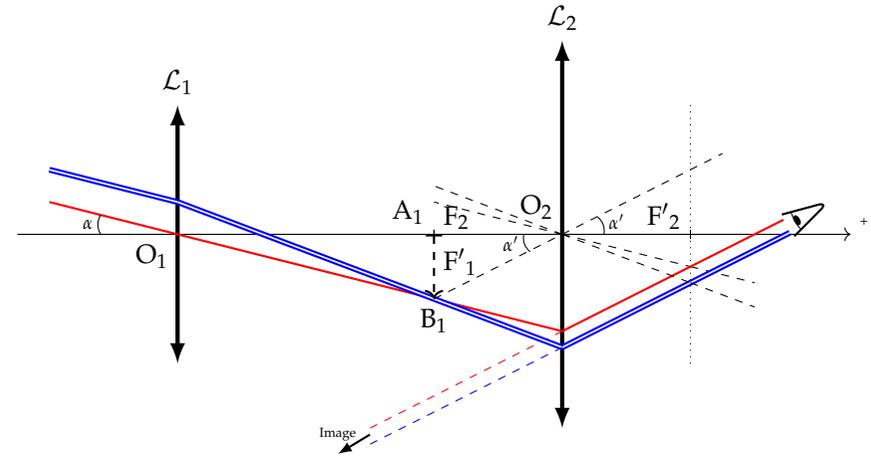
On en déduit que l'on doit avoir nécessairement $F'_1 = F_2$, c'est-à-dire une **lunette afocale**.



- 2) Déterminons maintenant le trajet d'un rayon lumineux (RL) non parallèle à l'axe optique et faisant un angle α par rapport à celui-ci.

On sait que des rayons lumineux parallèles entre eux convergent en un point du plan focal image. En utilisant un RL parallèle à celui dont on cherche l'émergent, passant par O_1 et n'étant donc pas dévié, on en déduit B_1 .

Tous les rayons passant par B_1 , appartenant au plan focal objet de L_2 , ressortent parallèles entre eux. Or le rayon passant par O_2 n'est pas dévié, on en déduit alors la direction du rayon émergent de la lunette, faisant un angle α' avec l'axe optique.



Dans les triangles $O_1F'_1B_1$ et $O_2F_2B_1$, on peut écrire

$$\tan \alpha = -\frac{\overline{B_1F'_1}}{f'_1} \quad \text{et} \quad \tan \alpha' = \frac{\overline{B_1F_2}}{f'_2}$$

Puisque $F'_1 = F_2$ et $\alpha < 0$, on en déduit $\frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}$. D'autre part, les conditions de GAUSS assurent que $|\alpha| \ll 1$ et $|\alpha'| \ll 1$, ce qui permet d'assimiler la tangente à son argument. On en déduit la valeur du grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}$, ainsi que celle du diamètre apparent en sortie :

$$\alpha' = -\frac{f'_1 \alpha}{f'_2} = 8,75$$

La lunette *grossit* les objets, ce qui permet d'en faire sur la rétine de l'œil une image plus grande

- 3) On s'intéresse maintenant non pas au grossissement mais au grandissement de la lunette, c'est-à-dire à l'image d'un objet à distance finie : $A \xrightarrow{L_1} A' \xrightarrow{L_2} A'$. On va utiliser les formules de NEWTON, avec origine aux foyers, puisque ceux-ci jouent un rôle particulier ici. Les grandissements des deux lentilles peuvent s'écrire

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'_1A_1}}{f'_1} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = -\frac{f_2}{\overline{F_2A_1}}$$

On en déduit le grandissement de la lunette

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_2 \times \gamma_1 = \frac{f_2}{f'_1} \times \frac{\overline{F'_1A_1}}{\overline{F_2A_1}}$$

ou encore, puisque $F'_1 = F_2$:

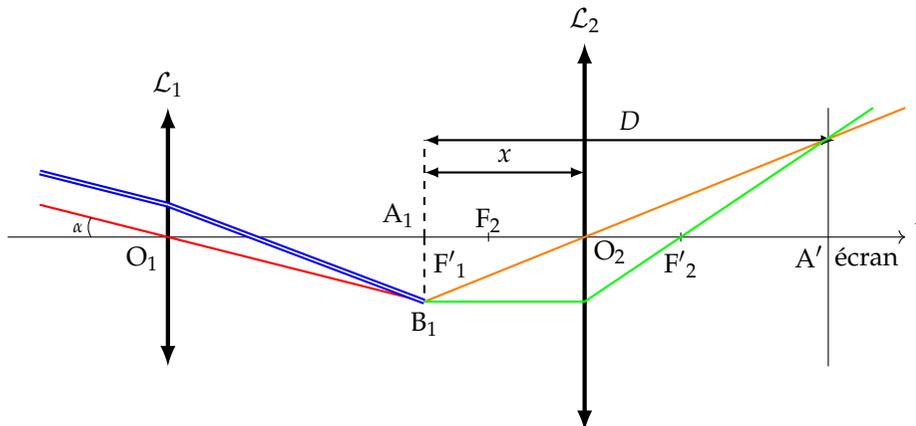
$$\gamma = -\frac{f'_2}{f'_1} = \frac{1}{G} = 1,1 \cdot 10^{-2}$$

L'araignée apparaît donc 100 fois plus petite qu'elle n'est vraiment. L'auteur ne peut donc la confondre avec un « dragon ». L'histoire d'ALLAN POE n'est que pure fiction !

Remarque : on pourrait objecter que si l'araignée est encore plus proche de l'œil qu'elle n'est diminuée, alors ce dernier pourrait la voir plus grande. Ce n'est pas possible ici, car la bestiole est à moins de 10 m de l'œil donc, pour la rapprocher plus de 100 fois, elle serait à moins de 10 cm de l'œil, c'est à dire en dessous de la distance minimale de vision distincte !

- 4) On cherche maintenant à faire une image à distance finie (sur l'écran) d'un objet à l'infini (le Soleil). La lunette ne peut donc plus être afocale, d'où la nécessité de déplacer l'oculaire.

$$A = \infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 = F'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A' \text{ (sur écran)}$$



Cette fois-ci, on donne la distance de l'écran par rapport au centre optique de l'objectif et les foyers ne sont plus confondus. On utilisera donc plutôt la relation de conjugaison de DESCARTES. Appelons $D = 1$ m la distance F'_1 -écran, et x la distance F'_2 -oculaire. Alors

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_2}} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \frac{1}{D-x} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{f'_2}$$

ce qui conduit à l'équation du second degré en $x^2 - xD + Df'_2 = 0$, de discriminant $\Delta = D(D - 4f'_2) > 0$. On retrouve la relation habituelle obligeant la distance objet-image D à être plus grande que quatre fois la distance focale de la lentille. Les deux solutions sont :

$$x = \frac{D}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4f'_2}{D}} \right) = 87,8 \text{ mm} \quad \text{et} \quad x = \frac{D}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4f'_2}{D}} \right) = 912 \text{ mm}$$

Ces positions de la lentille sont symétriques par rapport au milieu de la distance objet-image (méthode de BESSEL en focométrie!). Le grandissement $\gamma = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2F'_2}} = -\frac{\overline{O_2A'}}{x}$ étant plus important pour x faible, on retient la première valeur. Finalement, il faut éloigner l'oculaire de l'objectif d'une distance

$$\overline{F'_1F_2} = \overline{F'_1O_2} + \overline{O_2F_2} = x - f'_2 = 7,8 \text{ mm}$$

La taille de l'image intermédiaire du Soleil est donnée par de la trigonométrie

$$\alpha \approx \tan \alpha = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_1} \Rightarrow \overline{A_1B_1} \approx -\alpha f'_1 = \left(0,50 \times \frac{\pi}{180} \right) \times 7,0 = 6,1 \text{ cm}$$

On utilise ensuite la relation de grandissement de DESCARTES pour en déduire la taille sur l'écran

$$\overline{A'B'} = \overline{A_1B_1} \times \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = -\alpha f'_1 \times \frac{D-x}{-x} = 0,50 \times \frac{\pi}{180} \times 7,0 \times \frac{912 \cdot 10^{-3}}{87,8 \cdot 10^{-3}}$$

C'est-à-dire $\overline{A'B'} = 64$ cm, au lieu de $\overline{A_1B_1} = 6,1$ cm avec l'objectif seul : on a gagné un facteur 10!

5) La position de l'image de l'objectif par l'oculaire est donnée par

$$\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2O_1} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \overline{O_2A'} = \frac{f_2' \times \overline{O_2O_1}}{f_2' + \overline{O_2O_1}}$$

avec $\overline{O_2O_1} = \overline{O_2F_1'} + \overline{F_1'O_1} = -x - f_1'$, ce qui donne

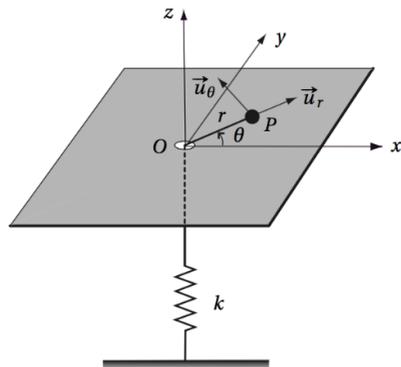
$$\overline{O_2A'} = \frac{f_2' \times (-x - f_1')}{f_2' - x - f_1'} = 80,9 \text{ mm}$$

c'est-à-dire quasiment f_2' . Ceci est en accord avec le fait que la distance objectif-oculaire est très grande devant f_2' et donc que l'objectif est quasiment à l'infini pour l'oculaire. La taille de l'image s'obtient par

$$\overline{A'B'} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A}} \times \overline{AB} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2O_1}} \times \frac{\phi_1}{2} = \frac{80,9 \cdot 10^{-3}}{-7 - 87,8 \cdot 10^{-3}} \times \frac{48,7 \cdot 10^{-2}}{2} = 2,78 \text{ mm}$$

ce qui correspond à un diamètre de l'image de l'oculaire égal à $\overline{2A'B'} = 5,57 \text{ mm}$. Il est important que l'œil soit au niveau du cercle oculaire de la lunette afin que la pupille puisse recueillir toute la lumière captée par l'objectif.

V. Mouvement sur un plan horizontal



1) On s'intéresse au point matériel P en mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids \vec{P} , à la réaction normale du support \vec{N} et à la tension du fil \vec{T} .

Le théorème du moment cinétique appliqué au point O fixe s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{N}) + \vec{M}_O(\vec{T})$$

Le point P se déplace sur la table à coussin d'air, donc le moment cinétique s'écrit

$$\vec{L}(O) = \overline{OM} \wedge m \vec{v} = r \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

\vec{N} et \vec{P} étant selon \vec{u}_z , elles n'ont pas de moment dans cette direction. De plus, la tension du fil est une force centrale, puisque dirigée vers O , donc son moment est nul aussi. Finalement, la dérivée de $\vec{L}_0 = \vec{L}(O)$ est nulle, donc

$$\vec{L}_0 = \text{csté} = mr_0^2 \dot{\theta}_0 \vec{u}_z.$$

2) \vec{N} et \vec{P} sont perpendiculaires au mouvement, donc leurs énergies potentielles sont constantes.

Le fil étant de masse négligeable, la tension T' du fil au niveau du ressort est égale, en norme, à T . La loi de la quantité de mouvement appliquée au point de contact fil-ressort de masse nulle donne l'égalité entre T' et $-k(\ell - \ell_0)$, où ℓ est la longueur du ressort. Le fil étant inextensible $\ell - \ell_0 = r$ (puisque $\ell = \ell_0$ quand $r = 0$). Finalement :

$$T = -kr \vec{u}_r \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kr^2 + \text{cte}$$

L'énergie mécanique de P s'écrit alors :

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{L_0}{mr^2}\right)^2 + \frac{1}{2}kr^2$$

ce qui donne
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2.$$

3) En l'absence de frottements, l'énergie mécanique se conserve et il suffit de la dériver par rapport au temps pour obtenir l'équation du mouvement, ce qui donne :

$$\ddot{r} - \frac{L_0^2}{m^2r^3} + \frac{k}{m}r = 0$$

après simplification par \dot{r} . Cette équation différentielle étant non linéaire, on ne peut pas en faire grand chose ...

4) On remarque que l'énergie mécanique de la question 2 peut se mettre sous la forme $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$ en posant $E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$. On en déduit :

$$e_p = \frac{E_{p,\text{eff}}}{\frac{1}{2}kr_0^2} = \frac{m^2r_0^4\dot{\theta}_0^2}{mr^2kr_0^2} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = \frac{\dot{\theta}_0^2r_0^2}{\omega^2r^2} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{u^2} + u^2$$

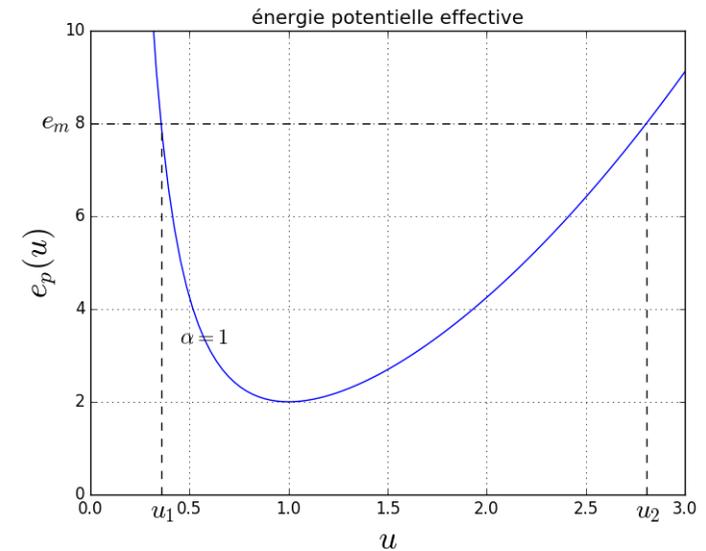
où $u = \frac{r}{r_0}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\alpha = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}$. L'intérêt de cette expression est que :

- tout se passe comme si on étudiait le mouvement d'un point matériel à un degré de liberté r (ou u) dans le champ de force dérivant de l'énergie potentielle effective, ce qui simplifie l'étude.
- elle permet de réaliser une étude graphique afin d'en déduire certaines caractéristiques générales du mouvement de P .
- l'adimensionnement des grandeurs permet de faciliter le tracé et son analyse.

5) On peut déjà vérifier que les courbes sont en adéquation avec l'expression de e_p obtenue (cas limites et présence d'un minimum).

De plus, sachant que $E_m - E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 > 0$, on en déduit que pour des conditions initiales données, et donc pour une énergie mécanique donnée, e_p doit rester inférieure ou égale à $e_m = \frac{E_m}{\frac{1}{2}kr_0^2}$.

Compte tenu de la forme de e_p , on en déduit que **le mouvement de P est borné et reste entre deux valeurs $r_1 = r_0u_1$ et $r_2 = r_0u_2$, où u_1 et u_2 sont les intersections de e_p avec e_m .**



6) On lance le point P en $r = r_0$, c'est-à-dire en $u = 1$. Or, le minimum de e_p est en ce point pour $\frac{\dot{\theta}_0}{\omega} = \alpha = 1$, avant ce point pour $\alpha < 1$ et après pour $\alpha > 1$. En effet

$$\frac{de_p}{du} = -\frac{2\alpha^2}{u^3} + 2u = 0 \Rightarrow u = \alpha^{1/1}$$

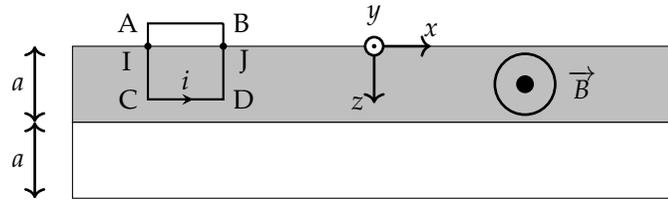
On en déduit que, pour $\dot{\theta}_0 < \omega$, le point P va se rapprocher de O , puisqu'il sera pour $u = 1$ dans une zone de croissance de e_p , donc soumis à une force "effective" $\vec{f} = -\vec{\text{grad}}(e_p) = -\frac{de_p}{du}\vec{u}_r$ dirigée selon $-\vec{u}_r$. Et réciproquement pour $\dot{\theta}_0 > \omega$.

On en déduit que $\omega_c = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

7) D'après la question précédente, e_p ayant son minimum en $u = 1$ (soit $r = r_0$) pour $\alpha = 1$ (soit $\dot{\theta}_0 = \omega$), le point P restera en cette position d'équilibre stable, et décrira donc un cercle de rayon r_0 . Et ce, quelle que soit la valeur de r_0 choisie, compatible avec le domaine d'élasticité du ressort et la taille de la table. De plus, pour que la trajectoire soit circulaire, il faut que la vitesse soit perpendiculaire en tout point au rayon, donc \dot{r}_0 doit être nulle.

Les conditions sont donc r_0 quelconque, $\dot{\theta}_0 = \omega$ et $\dot{r}_0 = 0$.

VI. Millefeuille magnétique



- 1) Lorsque le cadre pénètre dans la zone magnétique, le flux du champ \vec{B} à travers la surface du cadre varie. Cela entraîne l'apparition d'une fem induite dans le cadre, d'après la loi de FARADAY, et donc l'apparition d'un courant induit. Ce courant induit, en présence d'un champ magnétique, donne naissance à une force de LAPLACE qui, d'après la loi de LENZ, s'oppose à la cause qui lui a donné naissance. Le cadre est donc ralenti.
- 2) Orientons, par ex., le cadre dans le sens trigonométrique afin que \vec{B} et \vec{dS} soient de même sens, le flux du champ magnétique s'écrit alors

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = Baz(t) \Rightarrow e \stackrel{\text{Faraday}}{=} -\frac{d\phi}{dt} = -Ba\dot{z}$$

Puisque l'on néglige le phénomène d'auto-induction, le cadre n'a pas d'inductance et la loi des mailles donne l'équation électrique

$$e = Ri \Rightarrow i = -\frac{Ba\dot{z}}{R}$$

- 3) La force de LAPLACE sur une portion rectiligne de fil plongée dans un champ \vec{B} s'écrit :
 - sur AC : $\vec{F}_{AC} = i\vec{IC} \wedge \vec{B}$,
 - sur CD : $\vec{F}_{CD} = i\vec{CD} \wedge \vec{B} = i(a\vec{u}_x) \wedge B\vec{u}_y = iaB\vec{u}_z = -\frac{B^2a^2\dot{z}}{R}\vec{u}_z$,
 - sur DB : $\vec{F}_{DB} = i\vec{D}\vec{J} \wedge \vec{B} = -\vec{F}_{AC}$, puisque $\vec{D}\vec{J} = -\vec{IC}$,
 - sur BA : $\vec{F}_{BA} = \vec{0}$ puisque BA n'est pas soumis au champ magnétique.

Ce qui donne pour la résultante $\vec{F}_L = -\frac{B^2a^2\dot{z}}{R}\vec{u}_z$, conformément à la loi de

LENZ : $\dot{z} > 0 \Rightarrow \vec{F}_L$ selon $-\vec{u}_z$.

Le cadre est soumis à son poids et à la force précédente, donc la deuxième loi de NEWTON s'écrit

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = mg\vec{u}_z - \frac{B^2a^2}{R}v\vec{u}_z \quad (2)$$

ce qui donne, en projetant sur la verticale descendante

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g} \quad \text{avec } v = \dot{z} \quad \text{et } \tau = \frac{mR}{B^2a^2}$$

- 4) La résolution de cette équation différentielle donne $v(t) = g\tau + Ae^{-t/\tau}$. Or, le cadre était en chute libre depuis une hauteur h avant d'arriver dans la zone magnétique, donc la conservation de l'énergie mécanique fournit la vitesse en entrée de zone

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_0 + 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

ce qui permet de déterminer la constante d'intégration grâce à la condition initiale $v_0 = v(0) = g\tau + A$, d'où

$$\boxed{v(t) = g\tau + (\sqrt{2gh} - g\tau)e^{-t/\tau}}$$

La vitesse peut donc être constante à condition que $\sqrt{2gh} = g\tau$, c'est-à-dire

$$\boxed{h = \frac{gm^2R^2}{2B^4a^4} = \frac{9,81 \times (10-2)^2 \times 0,1^2}{2 \times 1^4 \times 0,1^4} = 5 \text{ cm}}$$

Ce qui ne fait que traduire la compensation entre la force de LAPLACE et le poids, comme le montrait dès le début l'équation (2).

- 5) Lorsque le cadre commence à sortir de la première zone de champ magnétique, la surface du cadre dans le champ \vec{B} s'écrit $a(2a - z)$, donc e et i changent de signe. Cependant, la force de LAPLACE s'exerce maintenant sur le haut du cadre, que le courant parcourt dans l'autre sens que le bas du cadre. Finalement, **la situation est inchangée et le cadre est toujours freiné par les forces de LAPLACE de la même façon qu'auparavant et donc la vitesse reste constante.**
- 6) Une fois que le cadre a quitté la première zone, il pénètre dans la seconde avec une vitesse $g\tau = \sqrt{2gh} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ identique à celle de son entrée dans la première. Le même phénomène se répète et la vitesse du cadre reste constante tant que celui-ci reste dans le millefeuille!