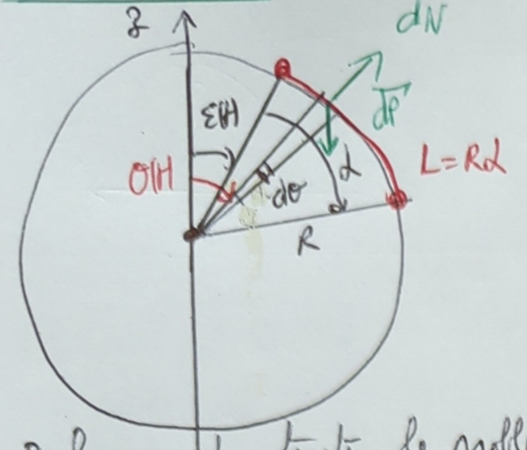
Ex 7 Corde



⚠ Ne pas faire le dessin à $t=0$

Toutes les forces sont dans un plan $\varphi = cte$ en sphériques et pas de vitesse initiale ⟹ reste dans le plan

⚠ A bien différentier position | du haut corde : $\varepsilon(t)$
| point quelconque : $\theta(t)$
| largeur angulaire de la corde : α

$L < \frac{\pi R}{2} \Leftrightarrow \alpha < \frac{\pi}{2}$ pour éviter que corde décolle de sphère

2 façons de traiter le problème

⟶ 1 seul ddl $\varepsilon(t)$ et pas de frottements ⟶ Conservation de l'E_m pour toute la corde

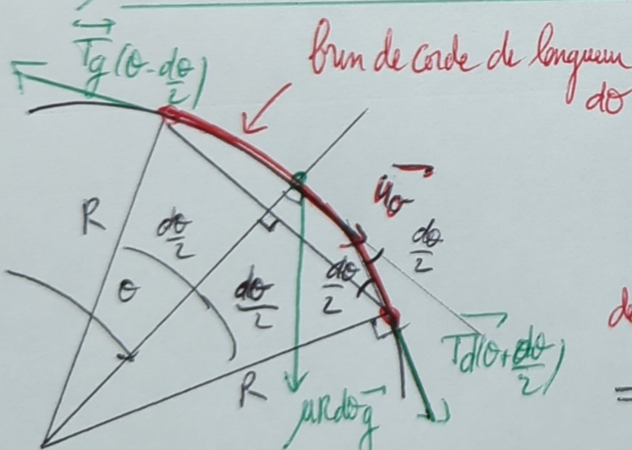
$$E_m = \frac{1}{2}\underbrace{\mu R\alpha}_{\text{masse totale}}\underbrace{(R\dot{\varepsilon})^2}_{\text{vitesse corde}} + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\alpha}\underbrace{dm\, g\, z}_{E_{pp} \text{ d'1 élément } d\theta \text{ de corde}} = cte \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\alpha R^3\dot{\varepsilon}^2 + \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\alpha}\overbrace{\mu R\, d\theta}^{dm}\, g\, \overbrace{R\cos\theta}^{z} = cte$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu\alpha R^3\dot{\varepsilon}^2 + \mu g R^2\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\alpha}\cos\theta\, d\theta = cte \underset{d/dt}{\Rightarrow} \cancel{\mu}\alpha R^3 \cancel{\dot{\varepsilon}}\ddot{\varepsilon} + \cancel{\mu} g R^2 \cancel{\dot{\varepsilon}}\left(\cos(\alpha+\varepsilon) - \cos(\varepsilon)\right) = 0$$

accélération initiale orthoradiale $a_0 = R\ddot{\varepsilon} = -\frac{g}{\alpha}(\cos\alpha\cos\varepsilon - \sin\alpha\sin\varepsilon - \cos\varepsilon) \underset{\varepsilon \ll 1}{\simeq} \frac{g}{\alpha}(1-\cos\alpha)$

Rq homogène, + α grand et + $\cos\alpha$ petit ⟹ a_0 grand OK
si $\alpha = 0$ pas de corde donc $a_0 = 0$ OK

⟶ TRC à un brin de corde $d\theta$: $dm\,\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{T_g}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) + \vec{T_d}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) + \mu R\, d\theta\, \vec{g}$



3e loi de Newton $\vec{T_g}\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right) = -\vec{T_d}\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)$

On projette sur $\vec{u_\theta}$:

$$\mu R\, d\theta\, R\ddot{\varepsilon} = T_d\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right)\overbrace{\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right)}^{\simeq 1 \text{ car } d\theta \ll 1} - T_d\left(\theta - \frac{d\theta}{2}\right)\overbrace{\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right)}^{\simeq 1} + \mu R\, d\theta\, g \sin\theta$$

Corde tendue ⟹ Tous les points de la corde ont même vitesse

$$\Rightarrow \mu R\, d\theta\, R\ddot{\varepsilon} \simeq \cancel{T_d(\theta)} + \frac{dT_d}{d\theta}\frac{d\theta}{2} - \left(\cancel{T_d(\theta)} - \frac{dT_d}{d\theta}\frac{d\theta}{2}\right) + \mu R\, d\theta\, g \sin\theta$$

On intègre entre $\theta = \varepsilon$ et $\theta = \alpha + \varepsilon$:

$$\mu R\alpha R\ddot{\varepsilon} = \underset{0}{\underset{\parallel}{T_d(\alpha+\varepsilon)}} - \underset{0}{\underset{\parallel}{T_d(\varepsilon)}} + \mu g R\left(-\cos(\alpha+\varepsilon) + \cos\varepsilon\right)$$

Car rien ne retient la corde à ses extrémités

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = R\ddot{\varepsilon} \underset{\varepsilon \ll 1}{\simeq} \frac{g}{\alpha}(1-\cos\alpha)} \quad \text{ok}$$