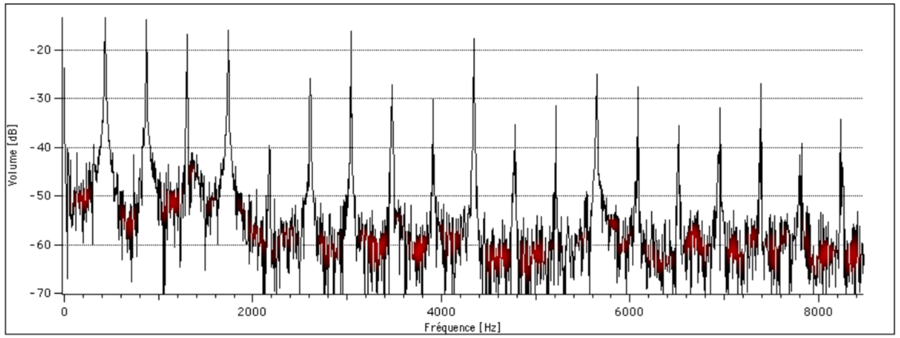
TD n°3 : Introduction aux ondes

Exercice 1 : Violon (CCP exo2)

Les violons Stradivarius sont réputés pour avoir des cordes en intestins de chat. Est-ce vrai ?

Données : La table d'harmonie du violon doit supporter 32 kg de traction et la longueur moyenne des quatre cordes vaut $\ell = 38$ cm. On fournit les densités de différents intestins et cordages, ainsi que le spectre en fréquence suivant de la corde du La3, de diamètre $d = 0{,}80$ mm :



Exercice 2 : Effet d'un champ $\overrightarrow{B}$ sur une corde parcourue par un courant

1) Version Centrale

Une corde métallique confondue avec l'axe (Ox) lorsqu'elle est au repos est tendue par une tension de norme T. Sa longueur est L, sa masse linéique μ_ℓ et elle est fixée en ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$. La corde est parcourue par un courant $I = I_0 \cos(\omega t)$ et placée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0 \sin(\pi x/L)\overrightarrow{u_y}$. L'effet du champ de pesanteur est négligé.

a) Évaluer la force de Laplace élémentaire s'exerçant sur un élément $\overrightarrow{d\ell}$ de la corde ; que permet-elle de prévoir sur le mouvement de la corde ?

b) Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par les petits déplacements $z(x,t)$ de la corde et la commenter.

c) Justifier la recherche d'une solution de la forme $z(x,t) = A\sin(\pi x/L)\cos(\omega t)$; déterminer son amplitude A et discuter de la possibilité d'une résonance.

2) Version ENS Ulm

La même corde est parcourue maintenant par un courant d'intensité constante I et plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_x}$ uniforme et stationnaire.

a) Établir les équations d'ondes pilotant les déplacements transversaux $y(x,t)$ et $z(x,t)$ de la corde. On posera $c = \sqrt{\frac{T}{\mu_\ell}}$ et $a = \frac{T}{IB}$.

b) On cherche en notation complexe des solutions de la forme $\underline{y}(t) = \underline{A}\exp(j\omega t - jkx)$ et $\underline{z}(t) = \underline{B}\exp(j\omega t - jkx)$. Montrer que le couple $(\underline{A},\underline{B})$ est solution d'un système linéaire homogène et en déduire la relation de dispersion des ondes :

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \pm\frac{k}{a} \quad \text{avec} \quad \underline{B} = \pm j\underline{A}$$

5/2 Que peut-on en conclure sur la polarisation des ondes ?

Exercice 3 : Ondes discrètes sur une chaîne d'atomes

1) Version Centrale/Mines

On étudie la propagation d'ondes proportionnelles à $\exp(j\omega t - jkna)$ sur une chaîne d'atomes de masse m reliés par des ressorts de longueur à vide a et de raideur K, situés au repos en $x_n = n\,a$ et se déplaçant de $\xi_n(t)$ en présence d'une onde. On pose $\omega_0 = \sqrt{K/m}$.

a) Établir l'équation différentielle dont est solution $\xi_n(t)$ connaissant $\xi_{n-1}(t)$ et $\xi_{n+1}(t)$.

b) À quelle condition (C) sur ω peut-on obtenir une onde progressive ? Quelle est alors la relation de dispersion ?

c) Justifier qu'on doit limiter les valeurs du nombre d'onde k au domaine $|k| < \pi/a$ et tracer l'allure du graphe de $\omega(k)$.

d) Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de k et tracer l'allure de leurs graphes.

2) Version X-ESPCI

Reprendre dans le cas où l'atome (n) subit en plus des interactions de raideur K de la part de ses plus proches voisins d'indices $n-1$ et $n+1$, des interactions avec une raideur $K/2$ de la part de ses voisins d'indices $n-2$ et $n+2$. Montrer que dans un domaine de pulsations à déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont de signes opposés. Pourquoi dit on alors que l'indice du milieu est *négatif* ?

Exercice 4 : Modes propres d'un ressort (Mines)

Un ressort horizontal de longueur à vide L dont une extrémité est fixée en O est accroché par l'autre extrémité à un pavé de masse M se déplaçant sans frottements le long de l'axe Ox. On note μ_l la masse linéique du ressort. On repère le mouvement d'une spire située à l'abscisse x au repos par sa position $x + \xi(x,t)$. Si on coupe fictivement le ressort à l'abscisse x, la force exercée par la partie droite sur la partie gauche est donnée par la loi de Hooke :

$$\overrightarrow{F} = K\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\overrightarrow{u_x} \qquad \text{où } K \text{ est une caractéristique du matériau.}$$

1) On considère la tranche de ressort de masse $\mu_l\,dx$, située au repos entre x et $x + dx$. On admet que les forces que subissent ses extrémités peuvent être évaluées comme si les extrémités de la tranche mobile étaient en x et en $x + dx$. En déduire que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation de d'Alembert et exprimer la célérité c.

2) On cherche des modes propres c'est-à-dire des solutions de la forme $\xi(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$.

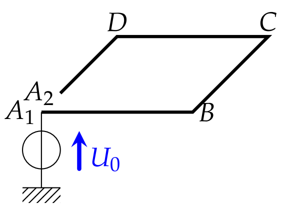
- **a)** Quelle est la condition aux limites imposée en $x = 0$? En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de ω, x et c à une constante multiplicative près.
- **b)** Quelle est la condition aux limites imposée par la masse M en $x = L$? En déduire que ω est solution de :

$$\tan\left(\frac{\omega\,L}{c}\right) = \frac{K}{M\,c\,\omega}$$

- **c)** Le mouvement de M est-il en général périodique ?

Exercice 5 : Clôture (Mines)

Un paysan installe autour d'un champ une clôture électrique de longueur $L = 500$ m, de section $s = 5\ \text{mm}^2$ et de conductivité linéique $\sigma = 1 \cdot 10^7\ \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ qu'il alimente avec un générateur de tension de fem U_0 branché entre le point A_1 et le sol. Des herbes hautes qui touchent la clôture induisent une conductance linéique g entre la clotûre et le sol.



1) À quelle condition la chute de tension relative le long de la clôture est-elle inférieure à 50 % ?

2) Qu'y a-t-il de changé si le paysan relie le générateur aux deux points A_1 et A_2 à l'entrée de son champ ?

3) En réalité le générateur émet des impulsions de fréquence $f = 30$ Hz. Reprendre l'étude en introduisant une inductance linéique λ et une capacité linéique γ.

Exercice 6 : 3 cordes (Mines)

Deux cordes semi-infinies de masses linéiques μ_1 et μ_3 sont reliées par une corde de masse linéique μ_2 et de longueur L, l'ensemble étant tendu sous tension T. Une onde incidente arrive de $x = -\infty$ sur ma corde (1).

1) À quelle(s) condition(s) n'y a-t-il pas d'onde réfléchie sur la corde (1) ?

2) *5/2* Analogies dans d'autres domaines de la physique ?

Exercice 7 : Ondes sur une corde verticale (Centrale)

Une corde vibrante de masse linéique μ_l et de longueur $L \approx 10$ m est suspendue par une de ses extrémités A, l'autre extrémité B étant libre. Au repos A est fixe et la corde est verticale. Lorsqu'on impose à l'extrémité A un déplacement $x_A(t) = a_M\cos(\omega t)$, on constate que la corde se déforme avec un déplacement $x(z,t)$ de pulsation ω dont l'amplitude augmente quand on s'éloigne de A. Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{u_z}$ est supposé uniforme.

1) Montrer que la tension en un point de la corde de cote z vaut :

$$T(z,t) = \mu\,g\,(L-z) \qquad \text{et que} \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\,g\,\frac{\partial x}{\partial z} + g\,(L-z)\,\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

2) On se place au "début" de la corde, ce qui permet de remplacer $L - z$ par L dans le coefficient variable de l'équation d'onde. Établir la relation de dispersion des ondes proportionnelles à $\exp(j\omega t - jkz)$ et interpréter l'observation.

3) On suppose désormais que des forces de frottements fluide de la forme $\overrightarrow{dF} = -\,\mu_l\,f\,(\partial x/\partial t)\,dz\,\overrightarrow{u_x}$ sont réparties tout le long de la corde. Montrer que dans le cadre de la question **2**, des ondes peuvent se propager sans amortissement pour une valeur particulière de f qu'on explicitera.

Exercice 8 : Amortissement du son par viscosité

À cause de la viscosité du fluide, le son est absorbé au cours de sa propagation. On suppose qu'une onde se propage suivant la direction Ox. On admet que la surpression $\pi(x,t)$ vérifie alors l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + \beta\,\frac{\partial^3 \pi}{\partial x^2 \partial t}$$

dans laquelle c et β sont des constantes (avec β proportionnel à la viscosité de l'air). On considère que l'émetteur émet une onde sinusoïdale de pulsation ω et que β vérifie la relation $\beta\omega \ll c^2$.
On cherche pour la surpression complexe une solution de la forme $\underline{\pi}(x,t) = \pi_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}x))$, avec $\underline{k} = k_1 - ik_2$ complexe (k_1 et k_2 réels positifs).

1) Exprimer k_1 et k_2 en fonction de β, c, ω en faisant les approximations qui s'imposent.

2) Donner l'expression réelle $\pi(x,t)$ de la surpression.

3) Donner l'expression de la vitesse de phase v_φ. Y-a-t-il dispersion ?

4) Si l'on utilise des ultrasons, quelle gamme est-il préférable d'utiliser pour limiter leur atténuation au cours de la propagation ?

Réponses

Exercice 1 : Violon (CCP 2017 exo2)

Densité $= \frac{mg}{4\ell^2 f^2 \mu_{\text{eau}} \pi (d/2)^2} = 1{,}5$

Exercice 2 : Effet d'un champ $\overrightarrow{B}$ sur une corde parcourue par un courant

1.a) $\overrightarrow{dF_L} = I_0 B_0 \cos(\omega t) \sin(\pi x/L) dx \overrightarrow{u_z}$.

1.b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\dfrac{I_0 B_0}{T}\cos(\omega t)\sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)$ avec $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.

1.c) $A = \dfrac{I_0 B_0}{T\left(\dfrac{\pi^2}{L^2} - \dfrac{\omega^2}{c^2}\right)}$ et résonance pour $f_r = \dfrac{c}{2L} = f_1$.

2.a) Écrire $\overrightarrow{d\ell} = dx\left(\overrightarrow{u_x} + \dfrac{\partial y}{\partial x}\overrightarrow{u_y} + \dfrac{\partial z}{\partial x}\overrightarrow{u_z}\right)$ et en déduire

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial y}{\partial x}$$

Exercice 3 : Ondes discrètes sur une chaîne d'atomes

1) $m\ddot{\xi}_n = K(\xi_{n-1} + \xi_{n+1} - 2\xi_n)$; $m\omega^2 = 4K\sin^2(ka/2)$; $\omega < 2\omega_0$; $v_\varphi = \omega_0 a \frac{\sin(ka/2)}{ka/2}$; $v_g = \omega_0 a \cos(ka/2)$

2) $m\ddot{\xi}_n = K(\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n) + (K/2)(\xi_{n+2} + \xi_{n-2} - 2\xi_n)$; $m\omega^2 = 2K(2 - \cos(ka) - \cos^2(ka))$ possède un maximum $\omega_M = \sqrt{9k/2m}$ pour $k_M a = \pm 2\pi/3$ et un minimum local $\omega_m = \sqrt{4k/m}$ pour $k_m a = \pm\pi$; $v_\varphi v_g < 0$ pour $\omega_m < \omega < \omega_M$ donc $v_g > 0$ impose $v_\varphi < 0$ donc $n < 0$.

Exercice 4 : Modes propres d'un ressort

1) $c = \sqrt{\frac{K}{\mu_\ell}}$.

2.a) $\xi(x=0,t) = 0$ et $\xi(x,t) = B\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)\cos\omega t$.

2.b) Étudier la masse M.

Exercice 5 : Clôture (Mines)

1) Introduire la résistance linéique $r = 1/\sigma\, s$ et modéliser une tranche $[x, x+dx]$ avec $r\,dx$ entre x et $x+dx$ et $1/g\,dx$ entre $x+dx$ et le sol; $dv/dx = r\,i$ et $di/dx = -g\,v$; $v(x) = V_0 \exp(-x/\delta)$ avec $\delta = \sqrt{1/r\,g}$; $v(x) = A\exp(x/\delta) + B\exp(-x/\delta)$; $i(x = L) = 0$ impose $B = A\exp(2L/\delta)$ puis $V_L/V_0 = 1/\mathrm{ch}(L/\delta) < 1/2$ impose $\mathrm{ch}(L/\delta) > 2$

2) Le courant part symétriquement et s'annule au point C ; on est ramené au cas précédent avec $L \to L/2$, donc c'est plus contraignant.

3) $\partial v/\partial x = -r\,i - \lambda\,\partial i/\partial t$ et $\partial i/\partial x = -g\,v - \gamma\,\partial v/\partial t$; $\underline{v}(x,t) = \underline{V}(x)\,\exp(j\omega t)$; $d^2\underline{V}/dx^2 = (r + j\lambda\,\omega)\,(g + j\gamma\,\omega)\,\underline{V}$, etc. (cf cours)

Exercice 6 : 3 cordes (Mines)

Les différents déplacements transverses des ondes s'écrivent

$$\begin{cases} y_1 = y_M \exp(j\omega t - jk_1 x) \\ y_2 = A\exp(j\omega t - jk_2 x) + B\exp(j\omega t + jk_2 x) \\ y_3 = C\exp(j\omega t - jk_3 x) \end{cases}$$

Les conditions aux limites donnent alors

$$\begin{cases} y_M = A + B \\ k_1 y_M = k_2(A - B) \\ A\exp(-jk_2 L) + B\exp(jk_2 L) = C\exp(-jk_3 L) \\ k_2 A\ \exp(-jk_2 L) - k_2\,B\exp(jk_2 L) = k_3\,C\exp(-jk_3 L) \end{cases}$$

La résolution du système fournit l'équation suivante

$$\frac{(k_2 - k_3)\,(k_1 + k_2)}{(k_2 + k_3)(k_2 - k_1)} = \exp(2jk_2 L)$$

qui a pour solution $k_2 L = (2n+1)\pi/2$ et $k_2 = \sqrt{k_1 k_3}$, soit $\mu_2 = \sqrt{\mu_1 \mu_3}$, ce qui n'est pas sans rappeler la traitement antireflet sur vos verres de lunette (cf cours EM).

Exercice 7 : Ondes sur une corde verticale

1) TQM sur un brin de corde avec la CL $T(z = L, t) = 0$

2) $g\,L\,k^2 - j\,g\,k - \omega^2 = 0$; $\Delta = -g^2 + 4\,g\,L\,\omega^2 > 0$ donc $2\,g\,L\,k = j\,g \pm \sqrt{\Delta}$; avec $k'' = 1/2L$, les ondes sont proportionnelles à $\exp(k'' z)$ donc amplifiées, conformément aux observations.

3) $\partial^2 x/\partial t^2 = -g\,\partial x/\partial z - f\,\partial x/\partial t + g\,(L - z)\,\partial^2 x/\partial z^2$; $g\,k = f\,\omega$ et $\omega^2 = g\,L\,k^2$; $f_c = \sqrt{g/L}$.

Exercice 8 : Amortissement du son par viscosité

1) $k_1 = \frac{\omega}{c}$ et $k_2 = \frac{\beta\omega^2}{2c^3}$.

2) $\pi(x,t) = \pi_0 \exp(-k_2 x) \cos \omega t - k_1 x)$.

3) $v_\varphi = c$.

4) Fréquence faible, tout en restant supérieure à 20 kHz.