

Devoir maison n°2 : Chaîne de pendules couplés

Introduction.

Cette étude porte sur la propagation d'ondes le long d'une chaîne de pendules couplés par l'intermédiaire d'un câble de torsion. Elle est conduite dans la limite du milieu continu.

Elle comprend deux parties. Dans la première, l'étude est menée dans l'approximation linéaire. Dans ce cadre, nous nous intéressons également à l'analogie électrique d'une chaîne de pendules. Cette analogie est construite à partir de la notion d'impédance. Dans la seconde partie, nous quittons l'approximation linéaire pour décrire la propagation d'ondes d'extension spatiale limitée, appelées "solitons".

Des rappels sont faits occasionnellement, il est toutefois conseillé de suivre le cheminement de l'énoncé.

1 Étude d'une chaîne de pendules couplés.

Jusqu'à la question 26 incluse, nous nous plaçons dans l'approximation des petits angles.

1.1 Cas de deux pendules couplés.

Un câble de torsion¹, inextensible, de longueur $3a$, d'extension radiale et de masse négligeables, est fixé rigidement par ses extrémités à un support immobile.

Deux pendules (m, l) identiques sont soudés sur le câble, aux abscisses $x_1 = a$ et $x_2 = 2a$ (figure 1). Chaque pendule est constitué d'une masse m quasi-punctuelle fixée à l'extrémité d'une tige de longueur l et de masse négligeable.

La tension du câble est telle qu'il reste rectiligne (selon \vec{e}_x). Le vecteur unitaire \vec{e}_y est dirigé selon l'accélération de la pesanteur \vec{g} et le trièdre $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est direct. L'origine de l'axe (Ox) est choisie à l'extrémité gauche (O) du câble.

1. Ou tout autre élément susceptible de se déformer en torsion (seule déformation que nous considérons).

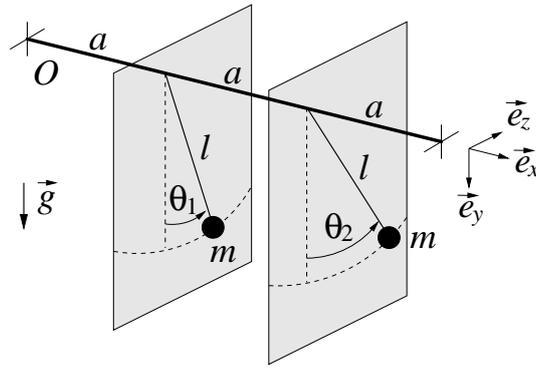


FIGURE 1 – Deux pendules couplés par l’intermédiaire d’un câble de torsion.

Le mouvement des pendules s’effectue, chacun, dans un plan vertical (\vec{e}_y, \vec{e}_z) , perpendiculaire au câble. Nous notons θ_1 (resp. θ_2) l’angle que forme le premier (resp. second) pendule avec la verticale. Ces angles algébriques sont comptés positivement dans le sens trigonométrique.

Au repos, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, et le câble n’est soumis à aucune torsion. Lorsque les sections, délimitant une portion de câble de longueur a , tournent d’un angle de torsion relatif $\Delta\theta$, cette portion est alors soumise à un couple, parallèle à l’axe du câble. Sa norme s’exprime par le produit $C |\Delta\theta|$, où C est la constante de raideur de torsion propre à la portion de câble. Enfin, nous négligeons tout phénomène dissipatif.

Pour les applications numériques, nous adoptons les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ m = 20 \text{ g} & l = 10 \text{ cm} \\ a = 1 \text{ cm} & C = 20 \text{ Nm} \cdot \text{rad}^{-1} \end{cases} \quad (1)$$

1. Pour un tel système, en pratique, préciser dans quelle mesure il devient légitime de négliger les phénomènes dissipatifs. On donnera des critères qualitatifs, sans calcul.
2. Établir les équations différentielles couplées régissant la dynamique du système. On fera apparaître deux pulsations caractéristiques $\omega_g \equiv \sqrt{g/l}$ et $\omega_C \equiv \sqrt{C/(ml^2)}$ dont on donnera une interprétation physique.
3. Nous introduisons les nouvelles variables :

$$\begin{cases} \theta_+ = \theta_1 + \theta_2 \\ \theta_- = \theta_1 - \theta_2 \end{cases} \quad (2)$$

- (a) Établir le système d’équations différentielles qu’elles vérifient.
- (b) Préciser l’intérêt de ce changement de variables.
4. (a) Décrire le mouvement des deux pendules correspondant à chacun des deux états particuliers $(\theta_+(t); \theta_-(t) = 0)$ et $(\theta_+(t) = 0; \theta_-(t))$, appelés modes propres.
- (b) Exprimer les pulsations correspondantes, appelées pulsations propres et notées $\omega_{1,1}$ et $\omega_{1,-1}$, en fonction de ω_g et ω_C .
- (c) Pour un mode propre, justifier que les deux pendules oscillent à la même pulsation.
- (d) En considérant la torsion des différentes portions du câble, retrouver directement l’expression de $\omega_{1,1}$, ou celle de $\omega_{1,-1}$. Choisir que l’on précisera.
5. La constante de raideur de torsion C dépend d’une caractéristique d’élasticité propre au matériau, G (en Pa), du rayon R du câble et de sa longueur a . Donner la forme de sa dépendance avec ces paramètres. On précisera la démarche suivie.

1.2 Cas de N pendules couplés.

Nous considérons dans cette partie une chaîne constituée de N pendules (m, l) identiques. Le $n^{\text{ième}}$ pendule oscille dans le plan $x_n = na$ et son paramètre angulaire est noté θ_n (figure 2). Le cadre général de l'étude reste inchangé et nous rappelons que nous restons dans l'approximation des petits angles.

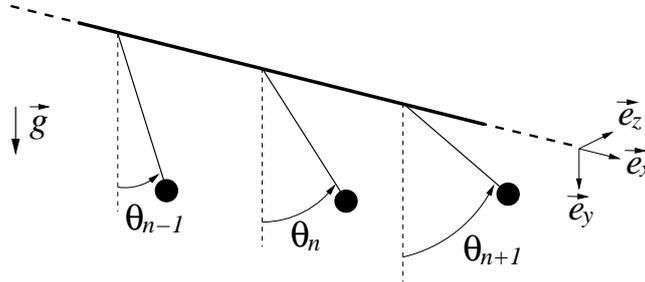


FIGURE 2 – N pendules couplés par l'intermédiaire d'un câble de torsion.

6. Établir l'équation régissant le mouvement du $n^{\text{ième}}$ pendule ($1 < n < N$).

7. Passage à la limite du milieu continu.

L'état de torsion du câble est décrit continûment par une fonction $\theta(x, t)$ telle que $\theta_n(t) = \theta(na, t)$. Nous nous plaçons dans une situation de déformation telle que le développement de cette fonction, dans le passage de l'abscisse na à l'abscisse $na \pm a$, peut être limité au second ordre relativement au pas a . Établir alors que, dans cette limite du milieu continu, la fonction θ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (3)$$

où c_0 et ω_0 sont des constantes que l'on exprimera et pour lesquelles on proposera une interprétation physique.

8. Pour un pas a fixé, préciser à quelle condition le passage à la limite du milieu continu demeure valide. Cette condition implique le pas a ainsi que deux dérivées spatiales de la fonction θ .

9. Nous posons $\mu \equiv m/a$ et $\kappa \equiv Ca$. Exprimer alors c_0 en fonction de κ , μ et l .

10. Justifier que c_0 reste inchangée si l'on modifie a tout en maintenant le rapport μ fixé.

11. Donner la valeur de c_0 .

Dans la suite du problème, on conservera les notations ω_0 et c_0 , sans les expliciter.

Nous étudions la propagation d'une onde harmonique (OH) de pulsation ω ($\omega \in \mathbb{R}_+$) et de nombre d'onde k ($k \in \mathbb{C}$), écrite en notation complexe :

$$\underline{\theta}(x, t) = \theta_0 \exp[j(\omega t - kx)]. \quad (4)$$

12. Nous supposons le pas a fixé. Traduire, pour cette onde, la condition de validité de la limite continue établie question 8.

13. (a) Établir la relation de dispersion du milieu, pour cette onde. On posera $\Omega \equiv \omega/\omega_0$ et $K \equiv c_0 k/\omega_0$.

(b) Esquisser l'allure de l'évolution, avec Ω , des parties réelle et imaginaire de K .

14. Pour ces deux sous-questions, nous supposons $\Omega \geq 1$.

(a) Exprimer les vitesses de phase V_φ et de groupe V_G (adimensionnalisées), en fonction de Ω .

(b) Représenter leur allure sur un même graphique. Commenter brièvement ces évolutions.

15. Nous imposons au premier pendule, à l'origine de la chaîne, un mouvement angulaire sinusoïdal. Décrire alors qualitativement le comportement du système mécanique selon la pulsation d'excitation, pour $\Omega \in [0 + \infty]$ (la chaîne est supposée infinie).

1.3 Analogie électrique de la chaîne de pendules.

1.3.1 Impédance mécanique des éléments constituant le motif de la chaîne.

Nous considérons, successivement, un élément (C, a) du câble de torsion puis un pendule (m, l) , qui composent le motif de base de la chaîne. Un opérateur mécanique, extérieur à ces éléments, est susceptible d'imposer un moment de la forme $\underline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_0 \exp(j\omega t)$, de direction portée par l'axe \vec{e}_x .

16. L'une des extrémités de l'élément (C, a) est supposée fixe, l'autre est soumise au moment $\underline{\mathcal{M}}$. Celle-ci répond alors à cette excitation par sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (portée par l'axe \vec{e}_x). Exprimer l'impédance mécanique de cet élément, définie par le rapport $\underline{\mathcal{M}}/\dot{\theta} \equiv Z_{cable}(\omega)$.
17. C'est maintenant à un pendule (m, l) , seul, soumis au champ de pesanteur, qu'est appliqué le moment $\underline{\mathcal{M}}$. Exprimer son impédance mécanique $Z_{pendule}(\omega)$.
18. La figure 3 représente trois quadripôles électriques de structures différentes. Chacun de ces quadripôles constitue le motif de base d'une ligne bifilaire.

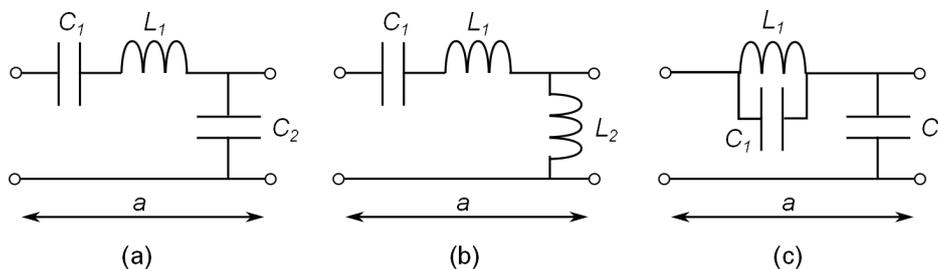


FIGURE 3 – Différentes cellules de base d'une ligne électrique bifilaire.

- (a) À partir de l'expression de chacune des impédances $Z_{cable}(\omega)$ et $Z_{pendule}(\omega)$, et en considérant la structure de la chaîne, identifier le quadripôle électrique équivalent à un motif de la chaîne. On argumentera ce choix.
 - (b) Indiquer l'analogie mécanique de chacun des trois composants électriques du quadripôle choisi.
19. L'analogie électrique trouvée, dans la limite du milieu continu, est-il matérialisable par un câble coaxial tel que ceux utilisés en travaux pratiques ? On argumentera la réponse.

1.3.2 Impédance mécanique de la chaîne de pendules.

Comme à la question 15, nous imposons au premier pendule de la chaîne, supposée infinie, un mouvement angulaire sinusoïdal $\underline{\theta} = \theta_0 \exp(j\omega t)$. Nous nous plaçons dans la limite du milieu continu.

Nous notons $\underline{\mathcal{M}}(x, t)$ le moment appliqué, par la partie gauche sur la partie droite de la chaîne, à travers la section d'abscisse x du câble, à l'instant t . La rotation de cette section est repérée par l'angle $\theta(x, t)$.

20. Exprimer l'impédance mécanique $Z_{meca}(\omega) \equiv \underline{\mathcal{M}}/\dot{\theta}$ de la chaîne.
21. L'écrire sous la forme $Z_{meca} = \pm \mu l^2 c_0 \Gamma(\Omega)$ où Γ est une fonction de la variable $\Omega \equiv \omega/\omega_0$. On notera que Z_{meca} est indépendante de x .
22. Préciser la dimension de la fonction Γ .
23. Illustrer graphiquement la dépendance, relativement à Ω , des parties réelle et imaginaire de la fonction Γ .
24. Analyser ces dépendances et en particulier leur limite vers les hautes fréquences. Pour $\Omega \geq 1$ établir le lien entre Γ et la vitesse de groupe adimensionnée V_G obtenue question 14.

25. Pour $\Omega \geq 1$, il apparaît que l'impédance de la chaîne est réelle. L'opérateur mécanique fournit donc continûment de la puissance à la chaîne. Concilier ce fait avec l'absence de composant dissipatif dans son modèle.
26. Pour $\Omega \leq 1$, l'impédance de la chaîne est imaginaire. Analyser ce résultat à la lumière de la question 15.

2 Non-linéarité et propagation d'un soliton.

Dès lors, et jusqu'à la fin du sujet, nous quittons l'approximation des petits angles.

Dans cette partie, nous étudions la propagation d'ondes dans le milieu non-linéaire constitué par la chaîne infinie de pendules, dans la limite des milieux continus. Dans ces conditions, l'équation d'onde vérifiée par l'angle $\theta(x, t)$ de torsion du câble s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (5)$$

où c_0 et ω_0 sont les constantes déterminées à la question 7. Rappelons que l'on conserve ces notations sans les expliciter.

Nous considérons la longueur L de la chaîne comme "infinie". Les extrémités de la chaîne ont alors pour abscisses $\pm L/2 \rightarrow \pm\infty$, $x = 0$ étant celle de son milieu.

Nous recherchons des solutions progressives de l'équation 5 sous la forme :

$$\theta(x, t) = F(x - vt) \equiv F(z), \quad (6)$$

où v est une constante et $z \equiv x - vt$ est la position dite réduite.

27. Établir que F est solution de l'équation :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{dF}{dz} \right]^2 + A \cos F = B, \quad (7)$$

où A est une constante à exprimer et B une constante d'intégration.

28. (a) Justifier que l'étude du système est ainsi transposable à celle d'un point matériel, de masse unitaire, soumis au potentiel $V_{eff}(F) = A \cos F$, l'angle F jouant le rôle de sa position et la variable z celui du temps. Soulignons qu'il s'agit d'une transposition, en particulier V_{eff} n'a pas la dimension d'une énergie.
- (b) Quel est alors le rôle à attribuer à la constante B ?
29. (a) Représenter l'allure du potentiel dans chacun des cas, $v < c_0$ et $v > c_0$.
- (b) Sur chacun des tracés précédents, positionner la constante B en envisageant les différentes situations (en vue d'une interprétation énergétique de ces diagrammes).
30. Analyse qualitative des diagrammes d'énergie.
- (a) Nous nous plaçons dans le cas $v < c_0$ et $B \rightarrow A^-$ (B tend vers A , par valeur inférieure). À partir du diagramme d'énergie, décrire le mouvement du point matériel en s'attachant à son aspect "temporel".
- (b) Nous nous plaçons dans le cas $v > c_0$ et $A < B < -A$. À partir du diagramme d'énergie, décrire le mouvement du point matériel et en déduire celui de la chaîne de pendules.
- (c) Toujours pour $v > c_0$ et $A < B < -A$, mais avec $B \rightarrow A^+$, préciser quel cadre d'étude nous retrouvons alors.

Onde solitaire, ou soliton.

Pour $v < c_0$ et $B = A$, la fonction F_d suivante est une solution progressive de l'équation 7 :

$$F_d(z) = 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{z}{\lambda} \right) \right] , \quad \text{où } z = x - vt , \quad \lambda = \lambda_0 \sqrt{1 - v^2/c_0^2} \quad \text{et } \lambda_0 = c_0/\omega_0 . \quad (8)$$

Nous sommes donc dans la situation décrite question 30a.

31. (a) Représenter l'allure de la fonction F_d . Préciser notamment sa valeur en 0 et ses limites en $\pm\infty$.
- (b) Déterminer les limites en $\pm\infty$ de la dérivée spatiale $\partial\theta/\partial x$.
- (c) Sur la zone où sa variation est la plus marquée, nous approchons la fonction F_d par sa tangente en 0, et par ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement à gauche et à droite de cette zone. Dans ce cadre, déterminer l'extension spatiale caractéristique, notée Λ , de cette zone.
- (d) Calculer la valeur de λ_0 .

Un soliton apparaît ainsi être une onde d'étendue spatiale limitée.

32. Pour ces deux sous-questions, nous supposons $v > 0$.
 - (a) Tracer, sur un même graphique, l'allure de l'angle θ le long de la chaîne, à trois instants $t_1 < t_2 < t_3$ que l'on fera apparaître sur les tracés.
 - (b) De même, tracer sur un second graphique les trajectoires (en fonction du temps) des pendules situés à différentes positions $x_1 < x_2 < x_3$ que l'on fera apparaître sur les tracés.
33. En représentant les pendules par des petits segments, illustrer l'allure de la chaîne à un instant donné.
34. (a) En se reportant à la figure 2, préciser en quoi la solution F_d est "dextre" (droite).
- (b) Donner alors, en le justifiant, la fonction F_s décrivant un soliton "senestre" (gauche) se propageant vers $x > 0$.

Pour caractériser simultanément les évolutions spatiale et temporelle de la chaîne, nous représentons l'angle θ le long de la chaîne, à différents instants $t_n = t_0 + n\Delta t$ ($n \in \mathbb{Z}$), régulièrement espacés. Afin que cette illustration reste lisible, les différentes courbes sont translatées verticalement, d'un pas $n\alpha$ ($\alpha > 0$). Ainsi, on trace en réalité $n\alpha + \theta(x, t_0 + n\Delta t)$ en fonction de x , et pour une série de valeurs de n . La figure 4 présente deux exemples de solitons, obtenus sur des chaînes identiques, mais avec des conditions initiales (excitations) différentes.

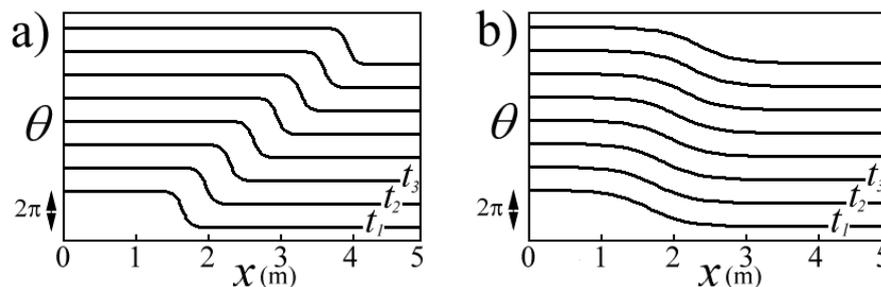


FIGURE 4 – Diagrammes spatio-temporels décrivant une onde soliton, pour des conditions initiales différentes, avec le pas de temps $\Delta t = 0,12$ s.

35. (a) Préciser, en le justifiant, s'il s'agit de solitons dextres ou senestres.
- (b) Estimer, dans chacun des cas, la valeur de la vitesse de propagation du soliton.
- (c) De même, estimer la valeur de λ .

Initiation d'une onde soliton.

Le pendule situé en $x = 0$ est excité par un opérateur extérieur qui lui impose une rotation selon la loi horaire :

$$\theta_0(t) = 4 \arctan[\exp(\Omega_0 t)] \quad (t \in]-\infty, +\infty[, \Omega_0 > 0). \quad (9)$$

36. (a) Expliquer pourquoi cette excitation crée deux solitons dans la chaîne.
 (b) Préciser leur sens de propagation et leur chiralité (dextre ou senestre).

Nous nous intéressons par la suite à l'onde se propageant sur le domaine $x \geq 0$.

37. (a) Exprimer la vitesse réduite v/c_0 de propagation du soliton, en fonction du rapport Ω_0/ω_0 , puis illustrer graphiquement cette dépendance.
 (b) Calculer la valeur de v pour $\Omega_0/\omega_0 = 0,5$.

Aspects énergétiques.

L'énergie mécanique totale de la chaîne infinie, parcourue par le soliton décrit par l'équation 8, ou son correspondant senestre, s'écrit :

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \quad \text{où} \quad E_0 = 8\sqrt{\mu g \kappa l}. \quad (10)$$

Nous considérons maintenant une chaîne dont la masse des pendules subit un saut en $x = 0$, les autres paramètres restant inchangés. On note μ_- la masse linéique pour $x < 0$ et μ_+ celle pour $x \geq 0$, avec $\mu_- < \mu_+$. Un soliton de vitesse v_- est créé par un opérateur en $x \rightarrow -\infty$. Les diagrammes de la figure 5 décrivent cette situation pour un soliton à basse vitesse et un autre à haute vitesse.

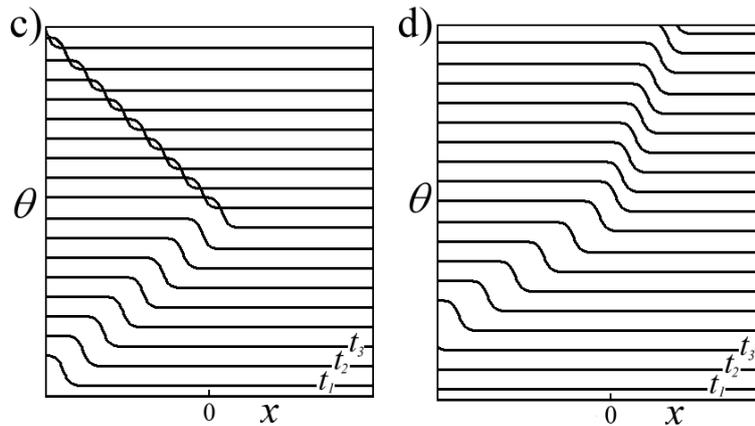


FIGURE 5 – Diagrammes spatio-temporels d'évolution d'un soliton parcourant une chaîne présentant un saut de masse linéique en $x = 0$.

38. En s'appuyant sur les résultats des questions 31c et 31d, préciser dans quelle mesure la relation 10 reste applicable à une chaîne occupant seulement un demi-espace. C'est un argument qualitatif qui est attendu.
 39. Commenter les diagrammes présentés figure 5 en précisant notamment l'évolution du soliton dans chacun des cas.
 40. (a) Quelle énergie minimale un soliton doit-il disposer pour être transmis dans la seconde moitié de la chaîne ($x > 0$) ?

- (b) En déduire la valeur critique v_c de la vitesse d'un soliton incident ($x < 0$) au dessus de laquelle il poursuivra sa propagation dans la seconde moitié de la chaîne ($x > 0$). On exprimera ce résultat en fonction de κ , l , $1/\mu_-$ et $1/\mu_+$.
41. Plaçons-nous dans le cas particulier $\mu_+/\mu_- = 8$. Comment faut-il alors choisir les rapports κ_+/κ_- et l_+/l_- , pour qu'un soliton incident soit toujours transmis, et sans modification de sa vitesse, quelle qu'elle puisse être ?
42. Lorsque les paramètres mécaniques μ , κ et l varient continûment le long de la chaîne, l'équation de propagation 5 n'est plus valable. Comment faut-il alors la modifier pour qu'elle décrive un tel système ?

Analogies avec d'autres systèmes physiques.

43. Quelle analogie suggèrent les dépendances, par rapport à la vitesse v , de l'énergie E et de la longueur λ (ou Λ), relatives au soliton étudié ?
44. Dans quelle(s) autre(s) situation(s) rencontre-t-on également ce type d'onde, d'extension spatiale limitée, se propageant sur une longue distance sans modification (sensible) de sa forme ?
45. Peut-on observer la propagation d'un soliton dans un câble coaxial tel que ceux utilisés en travaux pratiques ? Dans une fibre optique ? On argumentera chacune des réponses.

* *
*