Correction du TD n°3 : Introduction aux ondes

Exercice 2 : Corde vibrante conductrice

1.a) Le petit élément de corde $\overrightarrow{d\ell} \approx dx\overrightarrow{u_x}$ parcouru par un courant d'intensité $I(t)$ et placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B(x)\overrightarrow{u_y}$ subit la force de LAPLACE :

$$\overrightarrow{df_l} = I\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B} \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{df_l} = I_0B_0\cos(\omega t)\sin(\pi x/L)dx\overrightarrow{u_z}}$$

Cette force excitatrice spatio-temporelle impose à la corde un mouvement forcé selon Oz à la pulsation ω.

1.b) Les calculs sont les mêmes que dans le cours et dans l'exercice précédent, en changeant y en z, et en rajoutant la force de LAPLACE qui n'a de projection que selon $\overrightarrow{u_z}$. On obtient alors l'équation de D'ALEMBERT avec un second membre décrivant le régime forcé :

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{I_0B_0}{T}\cos(\omega t)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu_\ell}}}$$

1.c) La corde étant fixée aux deux extrémités, on choisit une solution sous la forme d'une onde stationnaire. Pour vérifier les CL, son vecteur d'onde est quantifié $k_n = n\pi/L$. L'excitation étant à la pulsation ω et dans le mode propre fondamental ($n = 1$), on cherche la solution sous la même forme $z(x,t) = A\sin(\pi x/L)\cos(\omega t)$, puisque le système est linéaire.
En remplaçant dans l'équation du **2)**, on obtient :

$$\left(-\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right)A = -\frac{I_0B_0}{T}$$

ce qui donne pour amplitude $\boxed{A = \frac{I_0B_0/T}{\frac{\pi^2}{L^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}}$. Celle-ci diverge, c'est-à-dire qu'on observe une résonance, pour une pulsation $\omega_r = \pi c/L$ soit une fréquence $\boxed{f_r = c/2L = f_1}$ égale à la fréquence du mode propre fondamental. Comme pour un oscillateur harmonique, une corde résonne (en régime forcé) lorsqu'elle est excitée à sa fréquence propre (celle à laquelle elle oscille en régime libre).

2.a) Un brin de fil $\overrightarrow{d\ell}$ parcouru par un courant I et plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit une force de Laplace $\overrightarrow{dF} = I\,\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B}$. Le déplacement $\overrightarrow{dl}$ s'exprime en fonction du profil de la corde $z(x,y,t)$ à t fixé en tenant compte du fait qu'elle est peu inclinée sur l'axe Ox :

$$\overrightarrow{d\ell} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z} = dx\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial y}{\partial x}dx\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial z}{\partial x}dx\overrightarrow{u_z} = dx\left(\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial y}{\partial x}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial z}{\partial x}\overrightarrow{u_z}\right)$$

La force de Laplace s'écrit donc :

$$\overrightarrow{dF} = I\,dx\left(\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial y}{\partial x}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial z}{\partial x}\overrightarrow{u_z}\right) \wedge \left(B\,\overrightarrow{u_x}\right) = I\,B\,dx\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\overrightarrow{u_y} - I\,B\,dx\,\frac{\partial y}{\partial x}\,\overrightarrow{u_z}$$

Par ailleurs la tension exercée en une coupure d'abscisse x par la partie droite de la corde sur sa partie gauche est parallèle à la tangente donc au déplacement élémentaire $\overrightarrow{d\ell}$. Elle est donc selon le vecteur unitaire $\frac{d\ell}{\ell}$, en notant T la norme de la tension, on obtient alors :

$$\overrightarrow{T_d} = T\frac{\overrightarrow{d\ell}}{d\ell} \approx T\frac{\overrightarrow{d\ell}}{dx} = T\,\overrightarrow{u_x} + T\,\frac{\partial y}{\partial x}\,\overrightarrow{u_y} + T\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\overrightarrow{u_z}$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée au brin de corde compris entre x et $x + dx$ s'écrit donc en projection sur $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$:

$$\begin{cases} \mu_\ell\,dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\,\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} - T\,\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x} + I\,B\,dx\,\frac{\partial z}{\partial x} \\ \mu_\ell\,dx\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T\,\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x+dx} - T\,\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x} - I\,B\,dx\,\frac{\partial y}{\partial x} \end{cases}$$

Soit en utilisant un développement de Taylor et en simplifiant par dx :

$$\mu_\ell\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + I\,B\,\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{et} \quad \mu_\ell\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - I\,B\,\frac{\partial y}{\partial x}$$

Puis en divisant par T on fait apparaître les constantes c et a attendues :

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial z}{\partial x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial y}{\partial x}}$$

2.b) En passant en notation complexe et en remarquant que les opérateurs symboliques :

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} = -jk$$

sont de simples multiplications par des constantes, et en remplaçant $\underline{y}(t) = \underline{A}\,\exp(j\omega t - jkx)$ et $\underline{z}(t) = \underline{B}\,\exp(j\omega t - jkx)$ dans les équations d'ondes, il vient :

$$-\frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{A} = -k^2\,\underline{A} - \frac{jk\,\underline{B}}{a} \quad \text{et} \quad -\frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{B} = -k^2\,\underline{B} + \frac{jk\,\underline{A}}{a}$$

En ordonnant, nous obtenons le système linéaire homogène attendu :

$$\begin{cases} (k^2 - \omega^2/c^2)\,\underline{A} + (jk/a)\,\underline{B} = 0 & (1) \\ -(jk/a)\,\underline{A} + (k^2 - \omega^2/c^2)\,\underline{B} = 0 & (2) \end{cases}$$

Ce système ne possède de solution non nulle que si son déterminant est nul soit :

$$(k^2 - \omega^2/c^2)^2 + (jk/a)^2 = 0 \Rightarrow (k^2 - \omega^2/c^2)^2 = k^2/a^2 \Rightarrow \boxed{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \pm\frac{k}{a}}$$

Les deux équations formant le système sont alors compatibles et en remplaçant dans la première, il vient :

$$\pm k/a\,\underline{A} + (jk/a)\,\underline{B} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\underline{B}}{\underline{A}} = \pm j}$$

Cette relation signifie que $\underline{B}$ et $\underline{A}$ ont même module et qu'ils sont déphasés de $\pm\pi/2$. Ainsi, les vibrations $y(x,t)$ et $z(x,t)$ ont la même amplitude et sont déphasés de $\pm\pi/2$: ces vibrations décrivent donc des ondes transversales *polarisées circulairement.*

Exercice 4 : Modes propres d'un ressort

1) Considérons une tranche de ressort, comprise au repos entre x et $x + dx$. En mouvement, elle est située par définition du déplacement ξ entre $x + \xi(x,t)$ et $x + dx + \xi(x + dx, t)$. Sa masse $\mu_\ell\,dx$ étant d'ordre un en dx, on peut évaluer l'accélération de son centre d'inertie à l'ordre zéro en dx, soit :

$$\overrightarrow{a} = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right)_{(x,t)} \overrightarrow{u_x}$$

Cet élément est soumis aux forces exercées par le reste du ressort qu'on peut évaluer d'après l'énoncé comme si les coupures étaient en x et en $x + dx$ soit en utilisant l'expression fournie par l'énoncé et le principe des actions réciproques :

$$\overrightarrow{F_g} = -K\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{(x,t)} \overrightarrow{u_x} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F_d} = K\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{(x+dx,t)} \overrightarrow{u_x}$$

La loi de la quantité de mouvement projetée sur $\overrightarrow{u_x}$ s'écrit donc :

$$\mu_\ell\,dx\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = K\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{(x+dx,t)} - K\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{(x,t)} = K\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,dx$$

en utilisant un développement de Taylor d'ordre 1 en dx. En simplifiant par dx, nous obtenons bien une équation de d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{c = \sqrt{\frac{K}{\mu_\ell}}}$$

2) **a)** L'extrémité gauche du ressort est maintenue à tout instant en $x = 0$ donc :

$$\boxed{\xi(x = 0, t) = 0}$$

En substituant $\xi(x,t) = f(x)\,\cos\omega t$ dans l'équation de d'Alembert, nous obtenons une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants permettant de déterminer $f(x)$:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}\,\cos\omega t + \frac{\omega^2}{c^2}\,f(x)\,\cos\omega t = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\omega^2\,f}{c^2} = 0$$

La solution générale s'écrit :

$$f(x) = A\,\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) + B\,\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

et la condition aux limites $\xi(x = 0, t)$ conduit immédiatement à $A = 0$ de telle sorte que finalement :

$$\boxed{\xi(x,t) = B\,\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)\,\cos\omega t}$$

b) Pour poursuivre la détermination de $\xi(x,t)$, on ne peut que se tourner vers une autre condition aux limites, ce qui donne l'idée de s'intéresser à l'autre extrémité du ressort, c'est-à-dire aussi bien à la masse M. Celle-ci est soumise à l'action $-K\,(\partial\xi/\partial x)_{(x=L,t)}\,\overrightarrow{u_x}$ exercée par la dernière tranche de ressort ; sa position est $L+\xi(L,t)$ donc son accélération vaut $(\partial^2\xi/\partial t^2)_{(x=L,t)}$. La loi de la quantité de mouvement appliquée à la masse s'écrit donc :

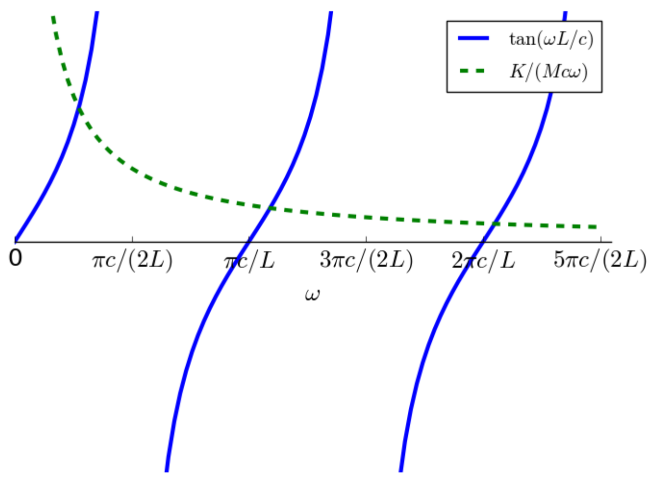
$$M\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)_{(x=L,t)} = -K\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{(x=L,t)}$$

En calculant les dérivées partielles pour la forme de $\xi(x,t)$ déterminée en **a)** il vient :

$$-M\,\omega^2\,B\,\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right)\cos\omega t = -\frac{K\,B\,\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega L}{c}\right)\cos\omega t$$

soit $\boxed{\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{K}{M\,c\,\omega}}$

Traçons le graphe de $\omega \to \tan(\omega L/c)$ et celui de $\omega \to K/M\,c\,\omega$ dont les intersections donnent les solutions de l'équation aux pulsations propres (E).



Ainsi, il y a une infinité discrète de pulsations propres ω_n indicées par un entier n.

Cas limites :

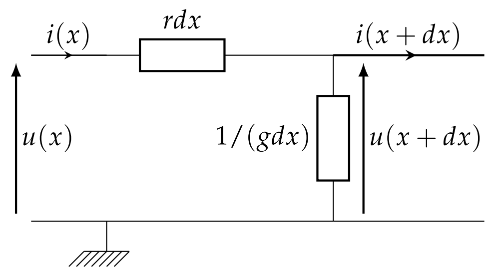
- **Extrémité libre** ($M \to 0$) : alors l'équation devient $\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = +\infty$ soit $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2L}$ ou encore $L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$. Ce qui se comprend bien puisque $\lambda/4$ est la distance entre un nœud (extrémité gauche fixe) et un ventre (extrémité droite libre).
- **Extrémité fixe** ($M \to \infty$) : alors l'équation devient $\tan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$ soit $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ ou encore $L = n\frac{\lambda}{2}$. Ce qui se comprend bien puisque $\lambda/2$ est la distance entre deux nœuds (extrémités gauche et droite fixes).
- **Ressort de masse nulle** ($\mu = 0$ à M fixé) : alors $c \to \infty$ et l'argument de la tangente est petit devant 1. L'équation devient $\frac{\omega L}{c} = \frac{K}{M\,c\,\omega}$ soit $\omega^2 = \frac{K}{ML} = \frac{k}{M}$ en posant $k = K/L$. On retrouve la pulsation propre d'une masse M accrochée à un ressort *sans masse* de raideur $k = K/L$!

c) Le mouvement général de la masse M s'obtient intuitivement en superposant les modes propres, les amplitudes et les phases relatives étant fixées par les conditions initiales. Contrairement à ce qui se passe pour la corde vibrante attachée à ses extrémités, les pulsations propres ω_n ne sont pas ici proportionnelles à n, donc ne sont pas multiples de la pulsation fondamentale. Ainsi, la superposition des modes propres n'est pas une série de Fourier, de sorte que *le mouvement de M n'est en général pas périodique.*

Exercice 5 : Clôture (Mines)

On remarque tout d'abord qu'il n'y a pas de dépendance en temps des grandeurs puisque le régime est continu au début. Il n'y a donc pas d'ondes avant la question **3)**.

1) On étudie une portion de clôture comprise entre x et $x+dx$



- La loi des nœuds s'écrit $u(x) = u(x+dx) + ri(x)dx$,

- la loi des mailles donne $i(x) = i(x+dx) + gu(x+dx)dx$.

Un développement de TAYLOR à l'ordre un permet alors d'obtenir

$$\frac{du}{dx} = -ri \quad \text{et} \quad \frac{di}{dx} = -gv \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = rgu = \frac{u}{\delta^2}$$

en posant $\delta = 1/\sqrt{rg}$. On cherche des solutions en ch et sh de cette équation différentielle, puisque le milieu est borné :

$$u(x) = A\mathrm{ch}(x/\delta) + B\mathrm{sh}(x/\delta) \quad \text{et} \quad i = -\frac{1}{r}\frac{du}{dx} = \frac{1}{r\delta}\left(A\mathrm{sh}(x/\delta) + B\mathrm{ch}(x/\delta)\right)$$

Les conditions aux limites $u(0) = U_0$ et $i(L) = 0$ donnent

$$A = U_0 \quad \text{et} \quad B = -U_0\mathrm{th}(L/\delta)$$

La tension dans le circuit s'écrit donc finalement

$$u = U_0[\mathrm{ch}(x/\delta) - \mathrm{th}(L/\delta)\mathrm{sh}(x/\delta)]$$

et la condition de chute relative de tension inférieure à 50% en bout de ligne s'obtient en écrivant

$$\frac{u(L)}{U_0} < \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{ch}(L/\delta) - \mathrm{th}(L/\delta)\mathrm{sh}(L/\delta) < \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire aussi bien

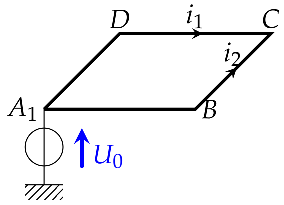
$$\underbrace{\mathrm{ch}^2(L/\delta) - \mathrm{sh}^2(L/\delta)}_{=1} < \frac{1}{2}\mathrm{ch}(L/\delta) \Rightarrow \mathrm{ch}(L/\delta) > 2$$

On en déduire alors une condition sur la conductance linéique g

$$\delta < \frac{L}{\mathrm{argch}(2)} \Rightarrow \boxed{g > \frac{\mathrm{argch}^2(2)}{rL^2} = \frac{\mathrm{argch}^2(2)}{L^2}\sigma s = 3{,}5\times 10^{-4}\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$$

En effet, la résistance d'un câble de section s, de longueur L et de conductivité linéique σ s'écrit $R = \frac{L}{\sigma s}$ donc $r = \frac{R}{L} = \frac{1}{\sigma s}$ (cf cours d'EM).

2) La clôture ressemble maintenant à



Les courants $i_1(x)$ et $i_2(x)$, issus du générateur et de la loi des nœuds en A_1, diminuent tous les deux le long de la clôture jusqu'en C et s'y annulent.

En effet, la loi des nœuds s'y écrit $i_1(L/2) + i_2(L/2) = 0$ et $i_1(x) = i_2(x)$ par symétrie de la clôture par rapport à l'axe A_1C.

On se ramène donc à la question précédente $i(L') = 0$ dans chacune des deux portions de clôture, en posant $L' = L/2$. La condition sur g est alors 4 fois plus contraignante.

3) Cf cours :)

Exercice 6 : Amortissement du son par viscosité

1) En remplaçant l'expression de $\underline{\pi}$ dans l'équation différentielle, on obtient

$$-\omega^2\underline{\pi}(x,t) = -c^2k^2\underline{\pi}(x,t) - \beta i\omega k^2\underline{\pi}(x,t)$$

ce qui donne la relation de dispersion suivante

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{1 + i\beta\omega/c^2}$$

Pour obtenir l'expression de k, on prend la racine et on simplifie, en utilisant le fait que $\beta\omega \ll c^2$

$$k = \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{i\beta\omega}{c^2}\right)^{-1/2} \overset{\mathrm{DL}}{\approx} \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{i\beta\omega}{2c^2}\right) = k_1 - ik_2$$

soit $\boxed{k_1 = \frac{\omega}{c} \text{ et } k_2 = \frac{\beta\omega^2}{2c^3}.}$ Le milieu n'est donc pas dispersif mais absorbant, ce qui se conçoit bien puisque l'on a pris en compte la viscosité de l'air ici. Sans terme visqueux ($\beta = 0$), on retombe sur l'équation de D'ALEMBERT et sa relation de dispersion associée.

2) Réécrivons la surpression en fonction de k_1 et k_2

$$\underline{\pi} = \pi_0 \exp(i(\omega t - (k_1 - ik_2)x)) = \pi_0 \exp(-k_2 x) \exp(i(\omega t - k_1 x))$$

Comme le terme en $\exp(-k_2 x)$ est réel, la partie réelle de $\underline{\pi}$ s'écrit

$$\boxed{\pi(x,t) = \pi_0 \exp(-k_2 x) \cos(\omega t - k_1 x)}$$

3) La phase traduisant le phénomène de propagation s'écrit

$$\Phi(x,t) = \omega t - k_1 x = \omega \left(t - \frac{k_1}{\omega} x \right) = \omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right)$$

La vitesse de phase vaut donc $\boxed{v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_1} = c.}$

4) L'atténuation est sensible sur une distance $\delta = \dfrac{1}{k_2} = \dfrac{2c^3}{\beta\omega^2}$. Elle diminue rapidement lorsque la pulsation augmente, donc :

- on comprend pourquoi l'effet de la viscosité est négligeable devant les causes géométriques (décroissance en $1/r$ de l'amplitude des ondes sphériques) pour le son audible (cf cours sur les ondes sonores) ;
- pour des ultrasons, il faut travailler à fréquence la plus faible possible, en restant supérieur à 20 kHz ;
- en revanche, la viscosité de l'eau étant supérieure à celle de l'air, on ne peut plus la négliger pour les ondes ultrasonores dans l'eau de mer (étude des sonars par ex.).