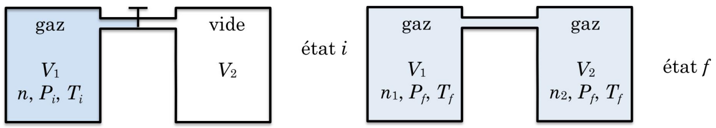
Correction du TD n°4

Exercice 1 : Détente dans le vide

1) La détente de JOULE GAY LUSSAC est la détente, dans une enceinte calorifugée, d'un gaz dans le vide :



Le système est l'enceinte composée des deux compartiments, il est fermé. L'application du premier principe permet alors d'écrire $\Delta U = W + Q = 0$, puisque l'enceinte est calorifugée ($Q = 0$) et le système est de volume constant ($W = 0$). Par extensivité de l'énergie interne, on en déduit que $\Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{vide}} = 0$, c'est-à-dire, pour un gaz parfait, $nC_{vm}(T_f - T_i) + 0 = 0$, puisque le vide ne contient pas de gaz ($n = 0$).

On en déduit finalement que $\boxed{T_f = T_i \text{ : cette détente est isotherme pour un GP.}}$

L'application du second principe conduit à $\Delta S = S_e + S_c$. La transformation étant adiabatique, l'entropie échangée est nulle : $\boxed{S_e = 0}$. Par extensivité,

$$\Delta S = \Delta S_{\text{gaz}} + \Delta S_{\text{vide}} = nC_{vm} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + 0 \overset{\text{isoT}}{=} nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Or, le gaz passe du volume $V_i = V_1$ à $V_f = 2V_1$, donc $\Delta S = nR\ln 2$.

On en déduit alors l'entropie crée du second principe $\boxed{S_c = \Delta S - S_e = \Delta S = nR\ln 2 > 0.}$ Cette détente est donc irréversible, ce qui est normal puisqu'elle n'est même pas quasistatique !

2) Fait en classe

Exercice 3 : Pompe à chaleur

1) D'après le premier principe industriel $\Delta h = q + w'$. Lors de la détente adiabatique ($q = 0$), le fluide caloporteur n'échange aucun travail autre que celui des forces pressantes donc $w' = 0$. Il reste donc $\boxed{\Delta h_{34} = 0}$ et cette détente est isenthalpique.

2) Si on applique ce premier principe à l'ensemble du cycle

$$0 = \Delta h_{\text{cycle}} = \Delta h_{12} + \Delta h_{23} + \Delta h_{34} + \Delta h_{41}$$

avec

- $\Delta h_{12} = q_{12} + w'_{12} = w'_{12}$ (compression adiabatique)
- $\Delta h_{23} = q_{23} + w'_{23} = q_{23}$ (transfert thermique uniquement)
- $\Delta h_{34} = 0$ (cf **1)**)
- $\Delta h_{41} = q_{41} + w'_{41} = q_{41}$ (transfert thermique uniquement)

soit finalement $\boxed{0 = w'_{12} + q_{23} + q_{41}}$

3) L'objectif de la pompe à chaleur est de maintenir la température de la source chaude. L'énergie utile est donc $q_{23} < 0$ cédée à la source chaude par le fluide caloporteur.

L'énergie coûteuse est le travail $w'_{12} > 0$ fourni au fluide caloporteur par le compresseur. L'efficacité de la machine s'écrit donc

$$\boxed{e = -\frac{q_{23}}{w'_{12}} \underset{\text{cf 2)}}{=} 1 + \frac{q_{41}}{w'_{12}} > 1}$$

puisque q_{41} et w_{12} sont positifs.

4) **a)** La phase gazeuse apparaît comme un gaz parfait uniquement aux faibles pressions, où les isothermes sont des isenthalpes (2è loi de JOULE).

La phase liquide suit la 2è loi de JOULE avec des isothermes verticales (donc isenthalpes). C'est le modèle usuel de la phase liquide incompressible et indilatable.

b) Le tableau est le suivant

	État 1	État 2	État 3	État 4
h (kJ.kg^{-1})	402	425	255	255
P (bar)	3	10	10	3
T (°C)	5	45	40	0
État physique	vapeur	vapeur	liquide (saturant)	diphasé LV

c) On a établi

$$e = -\frac{q_{23}}{w'_{12}} = -\frac{\Delta h_{23}}{\Delta h_{12}} = -\frac{h_3 - h_2}{h_2 - h_1}$$

ou encore

$$\boxed{e = -\frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_1} = \frac{425 - 255}{425 - 402} = 7{,}4}$$

Pour un cycle de Carnot fonctionnant entre T_3 et T_1 (en utilisant les températures de sortie du condenseur et de l'évaporateur) on aurait

$$e_C = \frac{T_3}{T_3 - T_1} = \frac{313}{35} = 8{,}9$$

On a donc bien $e < e_C$.

d) Pour une puissance de chauffage

$$\mathcal{P}_c = \left|\frac{mq_{23}}{\Delta t}\right| = D_m q_{23}$$

il faut un débit massique

$$\boxed{D_m = \frac{\mathcal{P}_c}{|q_{23}|} = \frac{4 \cdot 10^3}{(425 - 255) \cdot 10^3} = 2{,}35 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}}$$

Exercice 4 : Climatiseur (Mines)

1) Cf cours.

2) On s'intéresse au système fermé constitué du fluide décrivant des cycles à l'intérieur du climatiseur. Celui-ci est en contact avec une "source" froide, la pièce à refroidir, et une source chaude, l'atmosphère. Le premier principe s'écrit :

$$0 \overset{\text{cycle}}{=} \Delta U = W + Q_c + Q_f \Rightarrow W = \mathcal{P}\Delta t = -Q_c - Q_f \qquad (1)$$

On demande de calculer la capacité thermique de la pièce. C'est dû au fait que celle-ci n'est pas un vrai thermostat (ou source de chaleur), puisque sa température T_f varie au cours de la transformation de T_1 à T_2.
(Un thermostat, ayant une capacité thermique infinie, sa température reste constante quels que soient les échanges thermiques effectués avec le fluide : $\Delta T = Q/C \approx 0$).
Le premier principe appliqué à la pièce, système fermé de volume constant ($W' = 0$), donne

$$\delta Q'_f = dU' = CdT_f \Rightarrow Q'_f = \int \delta Q'_f = \int_{T_1}^{T_2} CdT_f = C(T_2 - T_1)$$

Bien entendu, la chaleur Q_f reçue par le fluide est perdue par la pièce, donc $Q_f = -Q'_f = -C(T_2 - T_1)$. Il reste donc à déterminer Q_c, ce que l'on va faire à l'aide du second principe.
Puisque T_f varie, l'entropie échangée ne peut s'écrire $Q_f/T_f + Q_c/T_c$. Il faut donc passer sous forme élémentaire, puis sommer sur toute la transformation :

$$\delta S_e = \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f} \Rightarrow S_e = \int \frac{\delta Q_c}{T_c} + \int \frac{-\delta Q'_f}{T_f} \underset{T_c = T_1}{=} \frac{Q_c}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{-CdT_f}{T_f}$$

On est obligé de supposer le climatiseur réversible pour se débarrasser de l'entropie créée, inconnue. Le second principe s'écrit alors :

$$0 \overset{\text{cycle}}{=} \Delta S = S_e + S_c \overset{\text{rev}}{=} S_e = \frac{Q_c}{T_1} - C \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \Rightarrow Q_c = CT_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

En remplaçant les expressions de Q_f et Q_c dans l'équation (1), on obtient

$$\mathcal{P}\Delta t = -CT_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + C(T_2 - T_1)$$

soit, finalement

$$\boxed{C = \frac{\mathcal{P}\Delta t}{T_2 - T_1 + T_1 \ln(T_1/T_2)} = \frac{300 \times 30 \times 60}{293 - 300 + 300 \ln(300/293)} = 6{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{kJ \cdot K^{-1}}}$$

Exercice 5 : Transformation polytropique

1) Compte tenu de la relation demandée, portant sur dS, on différentie l'expression de l'entropie d'un GP donnée :

$$dS = nC_{vm}\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} = \frac{nR}{\gamma - 1}\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

Il s'agit donc d'exprimer $\frac{dV}{V}$ en fonction de $\frac{dT}{T}$ pour obtenir l'expression recherchée. Il faut forcément utiliser le fait que la transformation est polytropique, c'est-à-dire $PV^k = \text{cte}$. On peut passer aux variables T et V en utilisant l'équation d'état du GP, ce qui donne $TV^{k-1} = \text{cte}$, soit $T = \frac{\text{cte}'}{V^{k-1}}$, ou encore, en dérivant :

$$\frac{dT}{dV} = -(k-1)\frac{\text{cte}'}{V^k} = -(k-1)\frac{T}{V} \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{1}{k-1}\frac{dT}{T}$$

En remplaçant cette relation dans l'expression donnant la variation élémentaire d'entropie, on en déduit la formule demandée :

$$\boxed{dS = nR\left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{dT}{T} = nC\frac{dT}{T}}$$

en posant $\boxed{C = R\left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1}\right)}$

2) La transformation étant réversible le travail s'écrit

$$W = -\int P_{\text{ext}}dV = -\int PdV = -\text{cte}\int \frac{dV}{V^k} = -\frac{\text{cte}}{1-k}\left(\frac{1}{V_1^{k-1}} - \frac{1}{V_0^{k-1}}\right)$$

et, en écrivant que cte $= P_1V_1^k = P_0V_0^k$, on obtient $W = \frac{1}{k-1}(P_1V_1 - P_0V_0) = \frac{\Delta(PV)}{k-1}$ ou encore $\delta W = \frac{d(PV)}{k-1} = \frac{nRdT}{k-1}$
La transformation étant réversible, le second principe s'écrit $dS = \delta S_e + \delta S_c = \delta S_e = \frac{\delta Q}{T}$, ou encore $\delta Q = TdS$. Le premier principe associé à la première loi de Joule donne alors

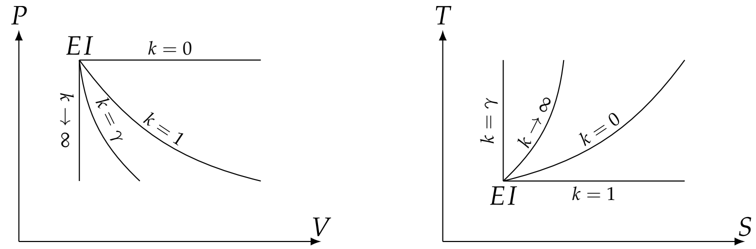
$$C_v dT = \frac{nR}{\gamma-1}dT = dU = \delta W + \delta Q = \frac{nRdT}{k-1} + TdS$$

ou encore $\boxed{dS = nR\left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{dT}{T} = nC\frac{dT}{T}}$

3) Suivant la valeur de k on peut écrire :

- $k = 0$ alors $PV^0 = P =$ cte : la transformation est isobare et C se simplifie en $C = \frac{R\gamma}{\gamma-1} = C_{pm}$ OK.
- $k = 1$ alors $PV =$ cte $= nRT$: la transformation est isotherme et $C \to \infty$. Cela signifie que quelle que soit la chaleur apportée, la température ne varie pas, c'est la caractéristique d'une source de chaleur. OK.
- $k = \gamma$ alors $PV^\gamma =$ cte : la transformation est adiabatique réversible donc isentropique : $dS = 0$, ce qui correspond bien à $C = 0$.
- $k \to \infty$ alors $PV^k = P_0V_0^k$ qui se réécrit $V = V_0\left(\frac{P_0}{P}\right)^{1/k} \underset{k\to\infty}{\to} V_0 =$ cte : la transformation est isochore et C se simplifie en $C = \frac{R}{\gamma-1} = C_{vm}$ OK.

4) Les représentations des différentes transformations en diagrammes (P, V) et (T, S) sont les suivantes :



(a) Diagramme (P, V) (b) Diagramme (T, S)

On remarque qu'en diagramme (T, S) l'équation des courbes correspondants aux différentes transformations correspond à des **exponentielles** $T = T_0 e^{\frac{\Delta S}{nC}}$ d'après la question 1. De plus, $C_{pm} > C_{vm}$ d'après la relation de Mayer, implique que les isochores croissent plus vite que les isobares.

Outre l'intérêt théorique de la transformation polytropique qui permet de retrouver toutes les autres transformations, il y a un intérêt expérimental. Une transformation réelle n'étant jamais parfaitement isobare/isotherme/isentropique ou isochore, on utilise la polytropique avec un paramètre k que l'on adapte à la transformation réelle étudiée grâce aux mesures expérimentales. Voir par exemple son utilisation dans l'étude de la troposphère en statique des fluides.

Exercice 9 : Entropie créée par frottements (X-ESPCI)

Le second principe permet de déterminer l'entropie créée

$$S_c = \Delta S - S_e = \Delta S - \frac{Q}{T_0}$$

à condition d'avoir accès au transfert thermique Q, que l'on peut relier au travail effectué par l'opérateur en utilisant le premier principe $\Delta U = W + Q$.
D'autre part, la main fait des allers retours, on peut donc supposer la transformation cyclique ce qui donne $\Delta S = 0 = \Delta U$.
On en déduit

$$S_c = -\frac{Q}{T_0} = \frac{W}{T_0}$$

en utilisant le premier principe. Il reste donc à calculer

$$W \overset{1AR}{=} 2\int_{-a}^{a} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

où $\overrightarrow{F}$ est la force exercée par l'effaceur sur le tableau. D'après la troisième loi de NEWTON, cette force est opposée à la force de la réaction du support exercée par le tableau sur l'effaceur

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{F'} = -(T'\overrightarrow{u_x} + N'\overrightarrow{u_y})$$

avec $|T'| = f|N'|$ d'après la loi de COULOMB puisque l'effaceur glisse sur le tableau. $|N| = |N'|$ est la force normale exercée par l'examinateur sur l'effaceur, égale à mg car opposée au poids d'après le PFD projeté sur la verticale. D'autre part, $\overrightarrow{T'} \cdot \overrightarrow{v_g} < 0$ donc $T' < 0$ pour un déplacement dans le sens de $\overrightarrow{u_x}$, ce qui donne $T = -T' = fN' = fmg > 0$
On en déduit que

$$W \overset{1AR}{=} 2\int_{-a}^{a} fmgdx = 4fmga$$

Finalement

$$\boxed{S_c = \frac{4fmga}{T_0} = \frac{4 \times 0,1 \times 1 \times 10 \times 0,1}{293} \approx 10^{-3}\,\mathrm{J \cdot K^{-1}} > 0}$$

De l'entropie est créée, qui est une mesure du désordre donc on augmente bien le désordre de l'Univers et la transformation est bien irréversible.