TD n°5 : Diffusion de particules

Exercice 1 : Écrantage nucléaire

On modélise un écran de plomb destiné à se protéger de particules α par un demi-espace $x > 0$ recevant en $x = 0$ un flux surfacique φ constant de particules α. Dans le plomb, ces particules diffusent avec un coefficient D. Par ailleurs, dans un élément de volume dV où leur densité particulaire vaut $n(x,t)$, un nombre $\delta^2 N_a = n(x,t)\, dV\, dt/\tau$ sont absorbées pendant dt, où τ est une constante caractéristique positive. On suppose le régime stationnaire.

1) Montrer que $n(x)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{n}{\delta^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \delta = \sqrt{D\,\tau}$$

2) En déduire l'expression de $n(x)$ et l'ordre de grandeur de l'épaisseur optimale d'un écran.

Exercice 2 : Diffusion de particules dans une hotte (Centrale)

De la vapeur d'eau diffuse avec un coefficient D dans une hotte de révolution d'axe (Oz) et de forme conique :

- en $z = 0$, la section vaut S_1 et la densité particulaire est nulle ;
- en $z = L$, la section vaut S_2 et la densité particulaire vaut n_0.

Déterminer la densité $n(z)$ en régime stationnaire.

Exercice 3 : Sédimentation de macromolécules

Un récipient contient un liquide homogène, de masse volumique ρ, dans lequel on ajoute des macromolécules insolubles de masse volumique $\rho_0 > \rho$.
La solution obtenue est maintenue homogène jusqu'à la date $t = 0$. À partir de cet instant elle est abandonnée à elle-même et, sous l'action des forces de pesanteur, les macromolécules se déplacent lentement vers le fond du récipient (pour les projections, prendre un axe Oz vertical ascendant, avec l'origine O au fond du récipient). Le mouvement est supposé unidirectionnel vertical et les macromolécules soumises, entre autres, à une force de frottement de type visqueux $\overrightarrow{F} = -f\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse des molécules.

1) Quelles sont les trois forces auxquelles est soumise chaque macromolécule ? En déduire l'équation différentielle du mouvement d'une macromolécule de masse m et montrer que ces particules atteignent une vitesse limite $\overrightarrow{v_{\text{lim}}}$.

2) Cette vitesse limite étant atteinte rapidement, exprimer la densité du flux d'entrainement moléculaire $\overrightarrow{j_E}$ des macromolécules à la cote z où leur concentration molaire est $c(z)$, en introduisant la masse molaire M des macromolécules.

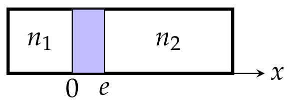
3) Justifier qu'il existe un courant ascendant $\overrightarrow{j_D}$. On note D le coefficient de diffusion ; donner l'expression de $\overrightarrow{j_D}$ à l'aide de la fonction $c(z)$.

4) Déterminer, en régime stationnaire, la loi de variation de c avec z.

5) On donne la relation d'EINSTEIN $D = k_B T/f$, de plus $\rho/\rho_0 = 0{,}8$ et $g = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Des mesures optiques montrent que, à 25°C, $c(z=0) = 2c(z = 2\text{ cm})$.
En déduire la masse molaire M des macromolécules ; commentaire.

Exercice 4 : Dialyse (Centrale)

De l'urée diffuse en régime stationnaire avec un coefficient D à travers une membrane d'épaisseur e et de section S dans laquelle la densité particulaire est de la forme $n(x)$.



1) Exprimer le flux d'urée en fonction de S, D, e et des densités particulaires $n_1 = n(x=0)$ et $n_2 = n(x=e)$.

2) La membrane sert à dialyser du sang contenu dans un récipient (1) de volume V en le reliant à un récipient (2) de volume $2V$ contenant initialement de l'eau pure. On donne le nombre volumique n_0 initial d'urée dans le sang. En admettant que le résultat de la question **1** reste valable, établir les équations différentielles dont sont solutions les nombres de molécules d'urée $N_1(t)$ et $N_2(t)$ dans les deux compartiments. Les molécules sont supposées uniformément réparties dans chaque compartiment.

3) Que peut on dire de $N_1(t) + N_2(t)$? En déduire la durée T nécessaire pour que la concentration en urée dans le sang soit divisée par deux.

Exercice 5 : Taille critique d'une bactérie aérobie (Centrale)

Une bactérie est modélisée par une sphère de centre O fixe, de rayon R et de masse volumique voisine de celle de l'eau. La bactérie évolue dans l'eau d'un lac et on note $n(r)$ le nombre de molécules de dioxygène dissous par unité de volume à la distance $r > R$. Dans l'eau, le dioxygène diffuse avec un coefficient de diffusion $D = 2\cdot 10^{-9}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ et le régime est stationnaire. Loin de la bactérie, la concentration volumique molaire en dioxygène dissous vaut $c_\infty = 0{,}2\,\text{mol}\cdot\text{m}^{-3}$.

1) Exprimer le nombre $\phi(r)$ de molécules de dioxygène traversant la sphère de centre O et de rayon $r > R$ dans le sens des r croissants par unité de temps. Justifier que $\phi(r)$ ne dépend pas de r. En déduire l'expression de $n(r)$ en fonction de ϕ, D, R, du nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_a$ et de c_∞.

2) La consommation en dioxygène de la bactérie est proportionnelle à sa masse avec un taux massique horaire $\mathcal{A} = 0{,}02\,\text{mol}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$.

- **a)** Exprimer ϕ en fonction de $\mathcal{N}_a$, $\mathcal{A}$, μ et R.
- **b)** En déduire l'expression de $n(R)$ en fonction de $\mathcal{N}_a$, $\mathcal{A}$, μ, R, D et c_∞. Montrer que la bactérie ne peut survivre que si son rayon est inférieur à un rayon critique R_c et calculer R_c.

Exercice 6 : Cas non stationnaire : diffusion d'un pic de concentration

Un tube de longueur L et de section S est suffisamment long suivant Ox et les temps d'étude suffisamment courts pour que l'on puisse négliger les effets de bord aux extrémités. À l'origine des temps, les molécules étudiées sont très fortement concentrées dans le plan yOz, soit N_0 leur nombre ; elles diffusent dans un fluide support et leur coefficient de diffusion est D.

1) À quelle condition sur la constante a la fonction $n(x,t) = \dfrac{K}{\sqrt{t}}e^{-\frac{ax^2}{t}}$ est elle solution de l'équation de diffusion ?

2) Pour quelle valeur de la constante K satisfait-elle aux conditions initiales ? Tracer l'allure de la courbe $n(x,t)$ à deux instants t_1 et $t_2 > t_1$; commentaire.

3) Donner la probabilité $dP = p(x,t)dx$ pour une molécule d'être à l'instant t dans la tranche en x d'épaisseur dx et en déduire l'abscisse moyenne $< x >$ ainsi que la distance quadratique moyenne $x_m =< x^2 >$; commentaire.
On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4) En prenant pour un soluté dans l'eau $D = 2\cdot10^{-9}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$, estimer le temps nécessaire pour que la diffusion atteigne une distance de 1 mm, puis 1 cm.

Réponses

Exercice 1 : Écrantage nucléaire

$n(x) = \dfrac{\varphi\delta}{D}\exp\left(-\dfrac{x}{D}\right)$.

Exercice 2 : Diffusion de particules dans une hotte (Centrale)

$\phi(z) = -D\dfrac{dn}{dz}S(z)$ se conserve, avec $S(z) = S_1\,(1+\alpha z)^2$ et $\alpha = \dfrac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}}{L\sqrt{S_1}}$.

$n(z) = -\dfrac{\phi z}{DS_1(1+\alpha z)}$, puis éliminer ϕ avec $n_0 = -\dfrac{L\phi}{DS_1(1+\alpha L)}$.

Exercice 3 : Sédimentation de macromolécules

1) Ne pas oublier la poussée d'Archimède. $\overrightarrow{v}_{\text{lim}} = -\dfrac{mg}{f}\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)\overrightarrow{u_z}$.

2) $\overrightarrow{j_E} = -\dfrac{Mg}{f}\left(1-\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)c(z)\overrightarrow{u_z}$ où $M = m\mathcal{N}_a$.

3) $\overrightarrow{j_D} = -D\mathcal{N}_a\dfrac{dc(z)}{dz}\overrightarrow{u_z}$.

4) $c(z) = c(0)\exp\left(-\frac{z}{h}\right)$ avec $h = \dfrac{\mathcal{N}_aDf}{MG(1-\rho/\rho_0)}$.

5) $M = \dfrac{RT}{(1-\rho/\rho_0)gz}\ln\dfrac{c(0)}{c(z)} = 43\cdot10^3\,\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Exercice 4 : Dialyse

1) $\phi = \dfrac{SD(n_1-n_2)}{e}$.

2) $\dfrac{dN_2}{dt} = -\dfrac{dN_1}{dt} = \dfrac{2N_1-N_2}{\tau}$ avec $\tau = \dfrac{2eV}{SD}$.

3) $N_1(t) = \dfrac{n_0V}{3}\left(1+2\exp\left(-\dfrac{3t}{\tau}\right)\right)$ et $T = \dfrac{\tau\ln 4}{3}$.

Exercice 5 : Taille critique d'une bactérie aérobie

1) $n(r) = \dfrac{\phi}{4\pi Dr} + \mathcal{N}_ac_\infty$.

2.a) $\phi = -\dfrac{4\pi R^3\mu\mathcal{A}\mathcal{N}_a}{3}$.

2.b) $n(R) = \mathcal{N}_ac_\infty - \dfrac{R^2\mu\mathcal{A}\mathcal{N}_a}{3D}$.

$R < R_c = \sqrt{\dfrac{3Dc_\infty}{\mu\mathcal{A}}} = 8\,\mu\text{m}$.

Exercice 6 : Cas non stationnaire : diffusion d'un pic de concentration

1) $a = \dfrac{1}{4D}$; **2)** $K = \dfrac{N_0}{2S\sqrt{\pi D}}$; **3)** $dP = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}dx$, $< x >= 0$ et $x_m = \sqrt{2Dt}$; **4)** $t = 4$ min et 7 h.