

Correction du DM n°2 : Chaîne de pendules couplés (XE MP 2015)

1 Étude d'une chaîne de pendules couplés

1.1) Cas de deux pendules couplés

- 1) Les phénomènes dissipatifs sont essentiellement le frottement avec l'air. Ces phénomènes vont entraîner une décroissance exponentielle du phénomène d'oscillation. Ils seront négligeables si le temps caractéristique de la décroissance est grand devant la période des oscillations.
- 2) Le système {pendule 1} est soumis, dans le référentiel galiléen terrestre :
 - à son poids de moment par rapport à (O_1x) : $M_{O_1x}(\vec{P}_1) = -mgl \sin(\theta_1) \approx -mgl\theta_1$
 - au couple de rappel du fil de droite : $\Gamma_{1d} = -C(\theta_1 - \theta_2)$
 - au couple de rappel du fil de gauche : $\Gamma_{1g} = -C\theta_1$ (à ne pas oublier !)
 - à la tension du câble, centrale, donc de moment nul.

Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (O_1x) fixe s'écrit

$$J\ddot{\theta}_1 = ml^2\ddot{\theta}_1 = -mgl\theta_1 - C(\theta_1 - \theta_2) - C\theta_1$$

soit, en faisant apparaître les pulsations caractéristiques introduites par l'énoncé :

$$\boxed{\ddot{\theta}_1 + (2\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_1 = \omega_c^2\theta_2}$$

Le même raisonnement avec le système {pendule 2} conduit à

$$\boxed{\ddot{\theta}_2 + (2\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_2 = \omega_c^2\theta_1}$$

$\omega_g = \sqrt{g/l} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ représente la pulsation du pendule s'il n'était soumis qu'à son poids et $\omega_c = \sqrt{C/(ml^2)} \approx 3,2 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ représente la pulsation du pendule s'il n'était soumis qu'au fil de rappel.

- 3) a) En sommant et en retranchant les deux équations différentielles obtenues à la question précédente on obtient

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{\theta}_+ + (\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_+ = 0 \\ \ddot{\theta}_- + (3\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_- = 0 \end{cases}}$$

- b) L'intérêt de ce changement de variable est de permettre une résolution des équations différentielles en transformant un système d'équations couplées en un système d'équations indépendantes.
- 4) a) Dans le cas où $\theta_-(t) = 0$, on a $\theta_1(t) = \theta_2(t) \forall t$: **les deux pendules vibrent en phase** (mode propre symétrique).
 Dans le cas où $\theta_+(t) = 0$, on a $\theta_1(t) = -\theta_2(t) \forall t$: **les deux pendules vibrent en opposition de phase** (mode propre antisymétrique).
 - b) Lorsque les deux pendules vibrent en phase, comme $\theta_-(t) = 0$ on en déduit $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \frac{\theta_+(t)}{2}$. Les deux pendules vérifient alors la même équation différentielle $\ddot{\theta}_+ + (\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_+ = 0$. Ils vibrent donc à la pulsation $\boxed{\omega_{1,1} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_g^2}}$.

Lorsque les deux pendules vibrent en opposition de phase, comme $\theta_+(t) = 0$ on en déduit $\theta_1(t) = -\theta_2(t) = \frac{\theta_-(t)}{2}$. Les deux pendules vérifient alors la même équation

différentielle $\ddot{\theta}_- + (3\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_- = 0$. Ils vibrent à la pulsation $\boxed{\omega_{1,-1} = \sqrt{3\omega_c^2 + \omega_g^2}}$

c) Dans un mode propre, θ_1 et θ_2 sont régis par la même équation, ils oscillent donc à la même pulsation.

d) Dans le mode symétrique le câble central n'est pas tordu puisque $\theta_1 = \theta_2$. Un seul câble relié à un pendule est donc tordu ce qui ne fait alors intervenir qu'un terme en ω_c^2 , d'où

l'expression $\boxed{\omega_{1,1} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_g^2}}$

Dans le mode antisymétrique le câble central est deux fois plus tordu que les câbles latéraux puisque $\theta_1 = -\theta_2$. Le câble central a donc une contribution double de celle d'un câble latéral, d'où une contribution triple de ω_c^2 et une pulsation de la forme

$$\boxed{\omega_{1,-1} = \sqrt{3\omega_c^2 + \omega_g^2}}.$$

5) La constante de raideur de torsion C s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}$ tandis que G s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$. Les deux autres paramètres étant des longueurs on en déduit que C est proportionnel à G et donc que $C = \text{cte}G(\text{longueur})^3$.

De plus, la raideur augmente avec le rayon du câble et diminue avec sa longueur donc $C = \text{cte} \times G \frac{R^p}{a^q}$, avec p et q entiers naturels.

Il s'agit donc de résoudre $p - q = 3$ dans \mathbb{N}^2 , la solution la plus simple (plus petites valeurs) est $p = 4$ et $q = 1$, ce qui donne

$$\boxed{C = \text{cte} \times G \frac{R^4}{a}}$$

1.2) Cas de N pendules couplés

6) On généralise ce que l'on a fait ci-dessus en prenant comme système le n -ième pendule dans un référentiel galiléen.

Il est soumis :

- à son poids de moment par rapport à $(O_n x)$: $M_{O_n x}(\vec{P}_n) = -mgl \sin(\theta_n) \approx -mgl\theta_n$
- au couple de rappel du fil de droite : $\Gamma_{nd} = -C(\theta_n - \theta_{n+1})$
- au couple de rappel du fil de gauche : $\Gamma_{ng} = -C(\theta_n - \theta_{n-1})$

Le théorème du moment cinétique appliqué par rapport à $(O_n x)$ fixe s'écrit alors

$$ml^2\ddot{\theta}_n = -mgl\theta_n - C(2\theta_n - \theta_{n+1} - \theta_{n-1})$$

soit

$$\boxed{\ddot{\theta}_n + (2\omega_c^2 + \omega_g^2)\theta_n = \omega_c^2(\theta_{n+1} + \theta_{n-1})}$$

On vérifie que l'on retrouve bien le cas de deux pendules en prenant $n = 1$ et $n = 2$ avec $\theta_0 = 0 = \theta_3$ (murs fixes).

7) L'approximation des milieux continus permet de faire les développements de TAYLOR à l'ordre deux suivants

$$\begin{cases} \theta_{n+1}(t) = \theta(na + a, t) = \theta(na, t) + a \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{na} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na} \\ \theta_{n-1}(t) = \theta(na - a, t) = \theta(na, t) - a \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{na} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n = -a^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{na}$$

c'est-à-dire l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - a^2 \omega_c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_g^2 \theta = 0$$

où $c_0 = a\omega_c$ et $\omega_0 = \omega_g$

Dans le cas où $\omega_0 = 0$ on trouve une équation de d'Alembert et c_0 est la vitesse de propagation de l'onde.

Dans le cas où $c_0 = 0$ on trouve l'équation d'un pendule oscillant dont ω_0 est la pulsation propre.

- 8) Le passage à la limite du milieu continu est valide si la fonction $\theta(x, t)$ varie peu à l'échelle du pas a . Il faut donc que

$$\frac{a^3}{6} \left| \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \right| \ll \frac{a^2}{2} \left| \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right|$$

soit, en ordre de grandeur

$$\frac{a^2 \theta}{\lambda^2} \ll \frac{a \theta}{\lambda}$$

si on considère une perturbation sinusoïdale (cf question 12) de longueur d'onde λ , ce qui donne $a \ll \lambda$.

- 9) On a trouvé $c_0 = a\omega_c = a\sqrt{\frac{c}{ml^2}} = \sqrt{\frac{Ca^2}{ml^2}}$ ce qui donne $c_0 = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$

- 10) On a vu précédemment que $C = \text{cte} \times \frac{GR^4}{a}$ donc $\kappa = Ca$ ne dépend pas de a . Si on maintient μ constant, c_0 reste constant.

- 11) L'application numérique donne $c_0 = \sqrt{\frac{20 \times (10^{-2})^2}{20 \cdot 10^{-3} \times (10^{-1})^2}} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- 12) Avec l'onde proposée on a $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -k^2 \theta_0 \exp[j(\omega t - kx)]$ et $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -jk\theta_0 \exp[j(\omega t - kx)]$. La condition de validité de la question 8 s'exprime par $ak \ll 1$

- 13) a) On remplace $\theta(x, t) = \theta_0 \exp[j(\omega t - kx)]$ dans l'équation différentielle : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \theta = 0$, ce qui donne :

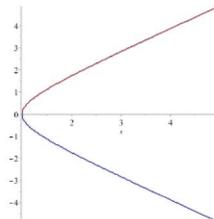
$$-\omega^2 \theta_0 \exp[j(\omega t - kx)] + k^2 c_0^2 \theta_0 \exp[j(\omega t - kx)] + \omega_0^2 \theta_0 \exp[j(\omega t - kx)] = 0$$

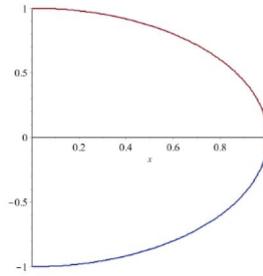
D'où la relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2}$

En utilisant les notations de l'énoncé on en déduit $K^2 = \Omega^2 - 1$

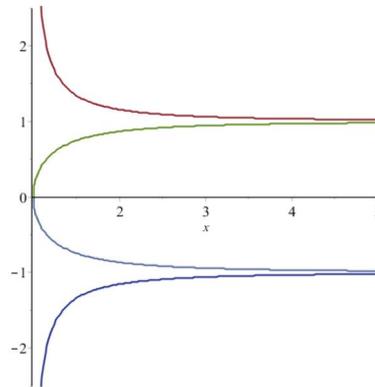
- b) Deux cas sont à envisager :

- $\Omega > 1$: $K = \pm \sqrt{\Omega^2 - 1}$ ce qui donne $\text{Re}(K) = \pm \sqrt{\Omega^2 - 1}$ et $\text{Im}(K) = 0$.
- $\Omega < 1$: $K = \pm j\sqrt{1 - \Omega^2}$ ce qui donne $\text{Im}(K) = \pm \sqrt{1 - \Omega^2}$ et $\text{Re}(K) = 0$.





- 14) La vitesse de phase adimensionnée est définie par $V_\varphi = \frac{\Omega}{K}$ soit $V_\varphi = \pm \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 - 1}}$.
 La vitesse de groupe est définie par $V_g = \frac{d\Omega}{dK}$. On a $K = \pm\sqrt{\Omega^2 - 1}$ ce qui donne :
 $2KdK = 2\Omega d\Omega$ soit $V_g = \frac{K}{\Omega}$ ce qui donne $V_g = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}}$.



La vitesse de groupe ne peut jamais dépasser la valeur c_0 alors que la vitesse de phase peut dépasser cette valeur. Le milieu est dispersif de manière générale puisque V_φ dépend de Ω .

À hautes fréquences, il devient non dispersif et on obtient : $v_\varphi = v_g = c_0$.

- 15) Deux cas peuvent se produire :
 Si $\Omega > 1$: une onde harmonique s'établit dans la chaîne de pendules et on obtient : $\underline{\theta}(x, t) = \theta_o \exp[j(\omega t - kx)]$
 Si $\Omega < 1$: k est un imaginaire. On note $k = -j\beta$. Dans ce cas on obtient $\underline{\theta}(x, t) = \theta_o \exp(-\beta x) \exp(j\omega t)$. Il s'agit d'une onde évanescente et la perturbation ne va pas se propager.

1.3) Analogie électrique de la chaîne de pendules

1.3.1) Impédance mécanique des éléments constituant le motif de la chaîne

- 16) Si on considère un élément (C, a) du câble de torsion, cet élément n'a pas de masse donc son moment d'inertie est nul. Le théorème du moment cinétique à cet élément soumis au couple de torsion et au moment extérieur donne alors $0 = -C\underline{\dot{\theta}} + \underline{M}$ soit $C\underline{\dot{\theta}} = \underline{M}$

L'angle $\underline{\theta}$ est sous la forme $\underline{\theta} = \theta_0 \exp(j\omega t)$ ce qui donne :

$$\underline{\dot{\theta}} = j\omega\theta_0 \exp(j\omega t) = j\omega\underline{\theta} = \frac{j\omega}{C}\underline{M} \text{ d'où l'impédance mécanique de cet élément}$$

$$\frac{\underline{M}}{\underline{\dot{\theta}}} = Z_{\text{câble}}(\omega) = \frac{C}{j\omega}$$

- 17) On applique le théorème du moment cinétique à la masse m . Elle subit le moment du poids et le moment extérieur, d'où

$$ml^2\ddot{\theta} = \underline{M} - mgl\theta$$

Or, $\dot{\theta} = j\omega\theta$ et $\ddot{\theta} = j\omega\dot{\theta}$, ce qui donne

$$\left(ml^2j\omega + \frac{mgl}{j\omega} \right) \dot{\theta} = \underline{M}$$

d'où

$$\boxed{\frac{\underline{M}}{\dot{\theta}} = Z_{\text{pendule}}(\omega) = \frac{mgl}{j\omega} + ml^2j\omega}$$

- 18) On remarque que $Z_{\text{c\^a}ble}$ est \u00e9quivalent \u00e0 un condensateur et que Z_{pendule} est \u00e9quivalent \u00e0 un condensateur et \u00e0 une bobine en s\u00e9rie.

C'est donc le sch\u00e9ma de la **figure (a)** qui est le plus satisfaisant avec

$$\boxed{L_1 = ml^2, C_1 = \frac{1}{mgl} \text{ et } C_2 = \frac{1}{C}}$$

- 19) La c\^a}ble coaxial propos\u00e9 ne laisse passer que les signaux sinuso\u00efdaux et pas les signaux continus alors que les c\^a}bles coaxiaux utilis\u00e9s en TP laissent passer les signaux sinuso\u00efdaux et les signaux continus. L'analogie n'est donc pas mat\u00e9rialisable par un c\^a}ble coaxial.

1.3.2) Imp\u00e9dance m\u00e9canique de la cha\u00eene de pendules

- 20) On prend comme syst\u00e8me le c\^a}ble entre n et $n + 1$; celui-ci n'a pas de masse. On lui applique le th\u00e9or\u00e8me du moment cin\u00e9tique, ce qui donne

$$0 = M - C(\theta_n - \theta_{n+1}), \text{ ce qui donne } M = -C(\theta_{n+1} - \theta_n) \sim -C\left(\theta(x) - \left(\theta(x) - a\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\right)$$

On obtient $M = -Ca\frac{\partial\theta}{\partial x}$ soit en notation complexe : $\underline{M} = jkCa\theta = \frac{kCa}{\omega}\dot{\theta}$

On en d\u00e9duit l'expression de l'imp\u00e9dance m\u00e9canique de la cha\u00eene $Z_{\text{m\u00e9ca}} = \frac{kCa}{\omega}$

- 21) On reprend les expressions obtenues \u00e0 la question 13 : $K = \pm\sqrt{\Omega^2 - 1}$ si $\Omega > 1$ et $K = \pm j\sqrt{1 - \Omega^2}$ si $\Omega < 1$ avec $K = \frac{c_0k}{\omega_0}$

ce qui donne :

$$\begin{cases} k = \frac{K\omega_0}{c_0} = \pm \frac{\omega_0\sqrt{\Omega^2-1}}{c_0} \text{ si } \Omega > 1 \\ k = \frac{K\omega_0}{c_0} = \pm j \frac{\omega_0\sqrt{1-\Omega^2}}{c_0} \text{ si } \Omega < 1 \end{cases}$$

d'o\u00f9

$$\begin{cases} Z_{\text{m\u00e9ca}} = \frac{kCa}{\omega} = \pm \frac{\sqrt{\Omega^2-1}\omega_0Ca}{c_0\omega} \text{ si } \Omega > 1 \\ Z_{\text{m\u00e9ca}} = \frac{kCa}{\omega} = \pm j \frac{\sqrt{1-\Omega^2}\omega_0Ca}{c_0\omega} \text{ si } \Omega < 1 \end{cases}$$

Mais $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $c_0 = \sqrt{\frac{Ca^2}{ml^2}}$ donc $Ca = \frac{ml^2}{a}c_0^2$ et $\mu = \frac{m}{a}$ soit $= \mu l^2 c_0^2$.

On obtient pour l'imp\u00e9dance m\u00e9canique :

$$\begin{cases} Z_{\text{m\u00e9ca}} = \pm \mu l^2 c_0 \frac{\sqrt{\Omega^2-1}}{\Omega} \text{ si } \Omega > 1 \\ Z_{\text{m\u00e9ca}} = \pm \mu l^2 c_0 j \frac{\sqrt{1-\Omega^2}}{\Omega} \text{ si } \Omega < 1 \end{cases}$$

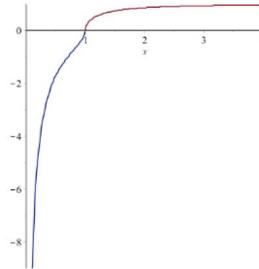
On pose $Z_{\text{m\u00e9ca}} = \pm \mu l^2 c_0 \Gamma(\Omega)$ avec

$$\begin{cases} \Gamma(\Omega) = \frac{\sqrt{\Omega^2 - 1}}{\Omega} \text{ si } \Omega > 1 \\ \Gamma(\Omega) = -j \frac{\sqrt{1 - \Omega^2}}{\Omega} \text{ si } \Omega < 1 \end{cases}$$

Si on s'intéresse à la solution se propageant vers les $x > 0$, il faut que la partie imaginaire soit négative et la partie réelle positive

22) $\Gamma(\Omega)$ est sans dimension comme Ω .

23) Le graphe est le suivant :



24) En hautes fréquences, l'impédance est quasiment constante. La chaîne est équivalente à un conducteur ohmique. Il n'y a plus le phénomène de dispersion et on a $V_G = \Gamma(\Omega)$

25) Si on suppose la chaîne infinie, au fur et à mesure que l'onde se propage, les pendules acquièrent une énergie cinétique et une énergie potentielle. Il faut donc sans arrêt fournir de l'énergie.

26) Dans le cas où l'impédance mécanique est imaginaire si M est de la forme $M_0 \cos(\omega t)$ on a $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$

La puissance mécanique est $P = M\dot{\theta} = M_0\theta_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t)$ ce qui donne en valeur moyenne : $\langle P \rangle = 0$. L'opérateur ne transmet aucune puissance en valeur moyenne car l'onde est évanescence et ne se propage pas.

2 Non-linéarité et propagation d'un soliton

27) On cherche des solutions sous la forme $\theta(x, t) = F(x - vt) = F(z)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \text{ et } \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{d^2 F}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 F}{dz^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{dF}{dz} \text{ et } \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -v \frac{d^2 F}{dz^2} \frac{\partial z}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 F}{dz^2} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation différentielle on obtient :

$$(v^2 - c_0^2) \frac{d^2 F}{dz^2} + \omega_0^2 \sin F = 0$$

On multiplie cette expression par $\frac{dF}{dz}$ ce qui donne $(v^2 - c_0^2) \frac{dF}{dz} \frac{d^2 F}{dz^2} + \omega_0^2 \frac{dF}{dz} \sin F = 0$ soit

$$(v^2 - c_0^2) \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 - \omega_0^2 \frac{d}{dz} (\cos F) = 0 \quad \text{ou encore en intégrant}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} \cos F = B$$

On en déduit que

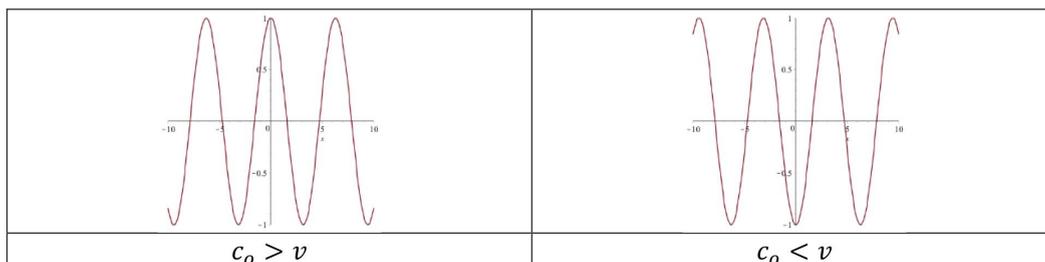
$$A = \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2}$$

- 28) a) L'équation obtenue ressemble à une équation de conservation de l'énergie pour un point matériel de masse m , soumis au potentiel $V(x)$

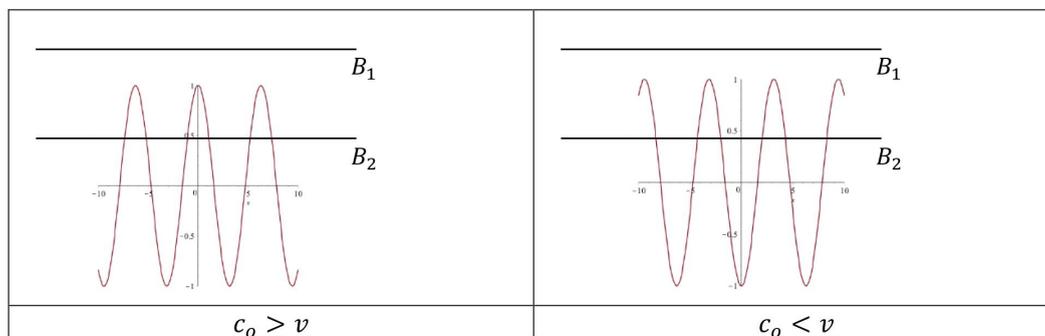
$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) = E \text{ soit } \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{V(x)}{m} = E'$$

Si le potentiel est du type $Am \cos(x)$, on se trouve dans une situation semblable à la question 27 avec une équation différentielle analogue : $\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + A \cos(x) = E'$.

- b) Par analogie avec le problème du point matériel de la question 28-a, la constante B joue le rôle de l'énergie mécanique massique du système.
- 29) a) Le potentiel est de la forme $A \cos F$ avec $A > 0$ si $c_0 > v$ et $A < 0$ si $c_0 < v$



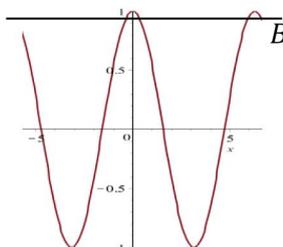
- b) On a $\frac{1}{2} \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 + A \cos F = B$ donc $B - A \cos F > 0$ soit $B > A \cos F$
 On aura les situations suivantes :



Dans les deux situations $B = B_1$, toutes les valeurs de F sont autorisées puisqu'on a toujours $B > A \cos F$. On est en présence d'état non liés.

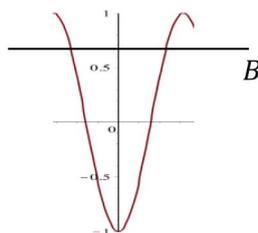
Dans la situation $B = B_2$ on est en présence d'états liés, toutes les valeurs de F n'étant pas autorisées.

- 30) a) On se place dans le cas où $v < c_0$ et $B \rightarrow A^-$



La particule est piégée entre $[0, 2\pi]$. Si on s'intéresse à F en fonction de z , on a $\frac{dF}{dz} \sim 0$ au voisinage de 0 et de 2π . Comme la vitesse de la particule y est nulle, la particule restera plus longtemps au voisinage de 0 et de 2π

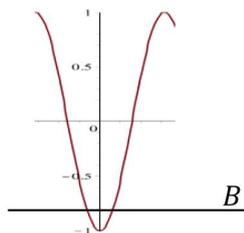
b) On se place dans le cas où $v > c_0$ et $A < B < -A$



La particule est piégée sur un intervalle $[-F_0, +F_0]$

Pour la chaîne de pendules, on va avoir une propagation vers les $x > 0$ à la vitesse v régit par $\theta(x, t) = F(x - vt)$ avec F oscillant entre $-F_0$ et $+F_0$

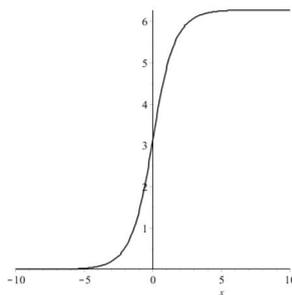
c) On se place dans le cas où $v > c_0$ et $A < B < -A$ mais $B \rightarrow A^+$



Le système est forcé d'osciller au voisinage de 0 et on se retrouve dans l'approximation des petits angles.

2.1) Onde solitaire, ou soliton

31) a) La solution est dans le cas où $v < c_0$ et $B \rightarrow A^-$: $F_d(z) = 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{z}{\lambda} \right) \right]$. Cette fonction a l'allure suivante



puisque $F_d(z = 0) = \pi$; $\lim_{z \rightarrow -\infty} F_d(z) = 0$; $\lim_{z \rightarrow +\infty} F_d(z) = 2\pi$.

b) On a déjà vu que $\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = \frac{dF_d(z)}{dz}$

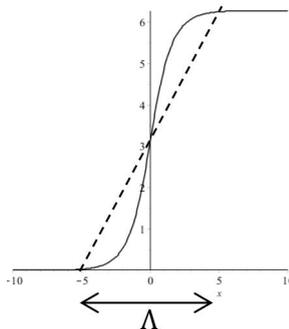
Graphiquement, on observe que la fonction $F_d(z)$ est horizontale pour $z \rightarrow \pm\infty$. Donc $\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = 0$ pour $x \rightarrow \pm\infty$

On peut aussi le vérifier plus analytiquement $F_d(z) = 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{z}{\lambda} \right) \right]$ donne $\frac{dF_d(z)}{dz} = \frac{4 \exp \left(\frac{z}{\lambda} \right)}{\lambda (1 + \exp \left(\frac{2z}{\lambda} \right))}$; donc

- quand $z \rightarrow -\infty$, $\frac{dF_d}{dz} = \frac{4 \exp \left(\frac{z}{\lambda} \right)}{\lambda (1 + \exp \left(\frac{2z}{\lambda} \right))} \rightarrow \frac{4 \exp \left(\frac{z}{\lambda} \right)}{\lambda} \rightarrow 0$
- quand $z \rightarrow +\infty$, $\frac{dF_d}{dz} = \frac{4 \exp \left(\frac{z}{\lambda} \right)}{\lambda (1 + \exp \left(\frac{2z}{\lambda} \right))} \rightarrow \frac{4 \exp \left(\frac{z}{\lambda} \right)}{\lambda \exp \left(\frac{2z}{\lambda} \right)} \rightarrow \frac{4 \exp \left(-\frac{z}{\lambda} \right)}{\lambda} \rightarrow 0$

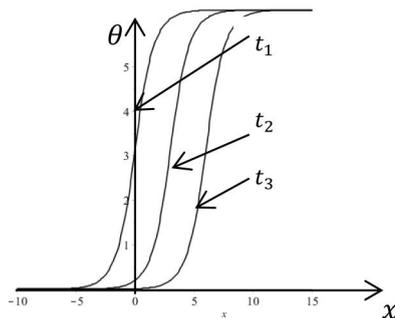
- c) La tangente de la courbe en 0 vaut : $\left(\frac{dF_d}{dz}\right)_{z=0} = \frac{2}{\lambda}$. On peut donc modéliser la fonction $F_d(z)$ par la droite : $y = \frac{2}{\lambda}z + b$ sur un domaine $[-z_0, +z_0]$ tel $2\pi = \frac{2}{\lambda}z_0 + b$ et $0 = -\frac{2}{\lambda}z_0 + b$ ce qui donne $b = \pi$ et $z_0 = \frac{\lambda\pi}{2}$.

L'extension spatiale de cette zone est donc $\boxed{\Lambda = \lambda\pi}$



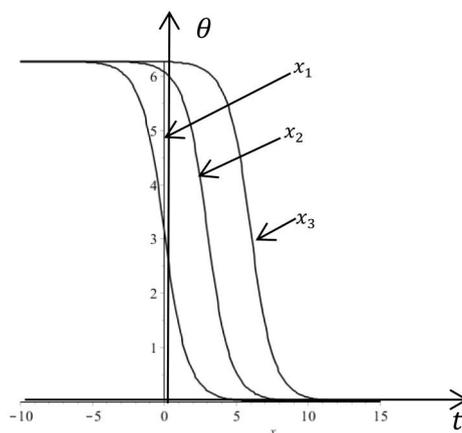
- d) $\boxed{\lambda_0 = 0,3 \text{ m}}$

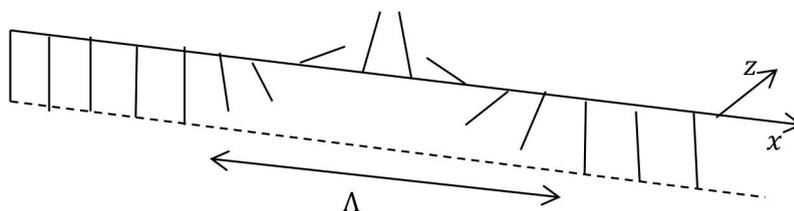
- 32) a) On a vu que $\theta(x, t) = F_d(x - vt)$ ce qui donne les trois graphes suivants avec $t_1 < t_2 < t_3$



Le soliton avance vers les $x > 0$ sans déformation.

- b) On trace $\theta(x, t) = F_d(x - vt)$ fonction du temps pour $x_1 < x_2 < x_3$





33)

34) a) Lorsque le soliton passe, en regardant vers les $x < 0$, le soliton tourne vers la droite d'où le terme de soliton dextre.

b) Pour un soliton senestre, les pendules doivent tourner vers la gauche. On peut donc prendre $F_s(z) = -F_d(z) = -4 \arctan \left[\exp \left(\frac{z}{\lambda} \right) \right]$

En effet, quand z augmente, $F_s(z)$ varie de 0 à -2π ce qui correspond bien à une rotation vers la gauche.

35) a) Sur les schémas a) et b) on constate que l'angle $\theta(x, t)$ augmente avec le temps à x fixé. C'est donc l'opposé de la situation du 32-a. Les solitons de la figure 4a sont senestres.

b) Sur la figure 4-a, on constate que le soliton arrive en $x = 2$ au temps t_2 et en $x = 3$ au temps t_5 . On en déduit la vitesse de propagation du soliton

$$v = \frac{x_3 - x_2}{t_5 - t_2} = \frac{1}{3\Delta t} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Sur la figure 4-b, avec la même démarche on constate que le soliton arrive en $x = 1$ au temps t_1 et en $x = 3$ au temps t_8 .

On en déduit la vitesse de propagation du soliton

$$v = \frac{1}{7\Delta t} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) On peut déterminer λ en mesurant l'extension spatiale du soliton soit Λ .

Pour la figure 4-a $\Lambda = 0,3 \text{ m}$ ce qui donne $\lambda = \frac{\Lambda}{\pi} = 0,1 \text{ m}$ et pour la figure 4-b $\Lambda = 1 \text{ m}$

ce qui donne $\lambda = \frac{\Lambda}{\pi} = 0,3 \text{ m}$.

2.2) Initiation d'une onde soliton

36) a) Cette excitation en $x = 0$ va mettre en rotation les pendules de chaque côté et créer ainsi deux solitons dans la chaîne, l'un se propageant vers les $x > 0$ et l'autre se propageant vers les $x < 0$.

b) On nous donne $\theta_0(t) = 4 \arctan [\exp(\Omega_0 t)]$ ce qui donne pour le soliton se propageant vers les $x > 0$: $\theta(x, t) = 4 \arctan [\exp(\Omega_0 (t - \frac{x}{v}))]$. Cette solution correspond donc à un soliton senestre puisque l'angle augmente au cours du temps (par rapport à la question 33, l'exponentielle est en $-x$ et non en x).

Pour le soliton qui se propage vers les $x < 0$ correspond à la solution $\theta(x, t) = 4 \arctan [\exp(\Omega_0 (t + \frac{x}{v}))]$ donc si on regarde comme à la question 33 le long de l'axe des x , quand x diminue le soliton tourne vers la gauche. Mais si on regarde vers l'onde, il tourne vers la droite donc cette solution est dextre.

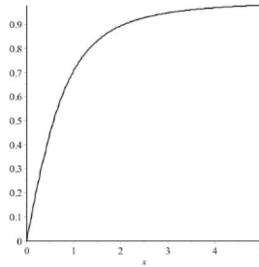
Récapitulatif : le soliton se propageant vers les $x > 0$ est senestre; le soliton se propageant vers les $x < 0$ est dextre.

37) a) Au temps $t = 0$ on a $\theta_0(x = 0, t) = 4 \arctan [\exp(\Omega_0 t)] = F_d(-vt)$; on en déduit que $\theta(x, t) = \theta(t - \frac{x}{v}) = 4 \arctan [\exp(\Omega_0 (t - \frac{x}{v}))] = F_d(-z) = 4 \arctan [\exp(-\frac{z}{\lambda})]$ ce qui donne la relation : $\Omega_0 (t - \frac{x}{v}) = -\frac{z}{\lambda} = -\frac{(x-vt)}{\lambda}$ d'où : $\Omega_0 = \frac{v}{\lambda}$ soit $v = \lambda \Omega_0$

Or on nous donne $\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}$ et $\lambda_0 = \frac{c_0}{\omega_0}$ d'où $v = \frac{c_0}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} \Omega_0$

d'où $\frac{v^2}{c_0^2} \frac{\omega_0^2}{\Omega_0^2} = 1 - \frac{v^2}{c_0^2}$ et $\frac{v^2}{c_0^2} = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\Omega_0^2} + 1}$ soit $\boxed{\frac{v}{c_0} = \frac{\frac{\Omega_0}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}}}}$

Ce qui donne la courbe suivante :



b) $\boxed{v \sim 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$

2.3) Aspects énergétiques

- 38) La relation (10) fournie par l'énoncé représente l'énergie pour une chaîne infinie. On a vu que le soliton avait une extension spatiale de Λ . En dehors de cette zone, l'angle de torsion vaut 0 ou 2π . Dans ce cas les pendules sont au repos et l'énergie mécanique est nulle. L'énergie du soliton ne concerne donc pas toute la chaîne mais uniquement une extension spatiale de Λ . Le fait que le soliton ne se propage que dans un demi espace ne modifie pas le résultat de l'énergie puisque dans le demi espace où il ne se propage pas, l'énergie est la même avec ou sans soliton.
- 39) Sur la figure 5-c, le soliton se propage vers les $x > 0$ dans l'espace $x < 0$, puis se réfléchit en $x = 0$ et se propage vers les $x < 0$ dans le demi espace $x < 0$.
Sur la figure 5-d, le soliton se propage vers les $x > 0$ dans l'espace $x < 0$, puis se transmet en $x = 0$ et se propage vers les $x > 0$ dans le demi espace $x > 0$.
- 40) a) Dans la seconde partie de la chaîne, le soliton a une énergie

$$E^+ = 8 \frac{\sqrt{\mu^+ g \kappa l}}{\sqrt{1 - \frac{v_+^2}{c_{0+}^2}}}$$

L'énergie minimale dont doit disposer le soliton est donc $\boxed{E_{\min} = 8\sqrt{\mu^+ g \kappa l}}$ valeur obtenue quand la vitesse de propagation v_+ est nulle.

- b) On considère un soliton à la vitesse v_- dans le milieu $x < 0$. Ce soliton transporte une énergie $E^- = 8 \frac{\sqrt{\mu^- g \kappa l}}{\sqrt{1 - \frac{v_-^2}{c_{0-}^2}}}$. Il peut se propager dans le milieu $x > 0$ à la condition que cette

énergie soit supérieure à E_{\min} soit : $8 \frac{\sqrt{\mu^- g \kappa l}}{\sqrt{1 - \frac{v_-^2}{c_{0-}^2}}} > 8\sqrt{\mu^+ g \kappa l}$ soit $\sqrt{\frac{\mu^-}{\mu^+}} > \sqrt{1 - \frac{v_-^2}{c_{0-}^2}} \rightarrow$

$v_- > c_{0-} \sqrt{1 - \frac{\mu^-}{\mu^+}}$ On a donc une vitesse critique : $v_c = c_{0-} \sqrt{1 - \frac{\mu^-}{\mu^+}}$. Or on a vu que

$c_0 = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ ce qui donne $\boxed{v_c = \frac{1}{l} \sqrt{\kappa \left(\frac{1}{\mu^-} - \frac{1}{\mu^+} \right)}}$

- 41) On veut que le soliton soit intégralement transmis sans modification de sa vitesse. Pour qu'il soit intégralement transmis il faut que $E^- = E^+$ ce qui donne

$$8 \frac{\sqrt{\mu^- g \kappa^- l^-}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_{0-}^2}}} = 8 \frac{\sqrt{\mu^+ g \kappa^+ l^+}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_{0+}^2}}}$$

soit

$$\frac{\mu^- \kappa^- l^-}{\mu^+ \kappa^+ l^+} \left(1 - \frac{v^2}{c_{0+}^2} \right) = 1 - \frac{v^2}{c_{0-}^2}$$

ou encore

$$\frac{\mu^- \kappa^- l^-}{\mu^+ \kappa^+ l^+} - 1 = v^2 \left(\frac{\mu^- \kappa^- l^-}{\mu^+ \kappa^+ l^+ c_{0+}^2} - \frac{1}{c_{0-}^2} \right)$$

Si cette relation doit être vraie quel que soit v il faut donc : $\frac{\mu^- \kappa^- l^-}{\mu^+ \kappa^+ l^+} = 1$ et $\frac{1}{c_{0+}^2} = \frac{1}{c_{0-}^2}$.

Comme $c_0 = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ et $\frac{\mu^+}{\mu^-} = 8$ on obtient $\frac{\kappa^- l^-}{\kappa^+ l^+} = 8$

$\frac{1}{l_+^2} \frac{\kappa^+}{\mu^+} = \frac{1}{l_-^2} \frac{\kappa^-}{\mu^-}$ soit $\frac{\kappa^+ l_-^2}{\kappa^- l_+^2} = 8$

Ce qui donne

$$\boxed{\frac{l^+}{l^-} = \left(\frac{1}{64} \right)^{1/3} = \frac{1}{4} \text{ et } \frac{\kappa^+}{\kappa^-} = \left(\frac{1}{8} \right)^{1/3} = \frac{1}{2}}$$

- 42) Lorsque que les paramètres κ, μ et l varient continument le long de la chaîne, les grandeurs $c_0 = \frac{1}{l(x)} \sqrt{\frac{\kappa(x)}{\mu(x)}}$ et $\omega_0^2 = \frac{g}{l(x)}$ deviennent fonction de x . Si ces grandeurs varient sur une échelle caractéristique grande devant a , on peut reprendre l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\kappa(x)}{l^2(x) \mu(x)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{g}{l(x)} \theta = 0}$$

2.4) Analogies avec d'autres systèmes physiques

- 43) L'énergie ressemble à l'expression de l'énergie en relativité $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

L'expression de la longueur d'onde ressemble à la longueur d'onde de DE BROGLIE relativiste :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

- 44) Ce type d'onde se rencontre en mécanique des fluides :
- dans un fleuve c'est le phénomène du **mascaret** (le mascaret de la Seine est connu car responsable de la mort de Léopoldine Hugo)
 - dans la mer c'est un **tsunami**, provoqué par un tremblement de Terre.
- 45) Pour observer un soliton il faut des phénomènes non linéaires. Dans un câble coaxial de TP ou dans une fibre optique, les phénomènes sont linéaires donc on n'observe pas de soliton.