TD n°6 : Diffusion thermique

Exercice 1 : Combien de temps un plongeur peut-il rester sous l'eau ?

Un plongeur est équipé de sa combinaison. On note T_e la température de l'eau environnante, uniforme et constante. La température initiale du plongeur est $T_0 = 37\,°\text{C}$. Les pertes thermiques ont lieu au niveau de la peau et de la combinaison.

1) Rappeler la définition de la résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel en fonction de la section S, de l'épaisseur e et de la conductivité thermique λ.

2) On modélise les pertes par convection par un flux thermique $\phi_c = hS(T - T_e)$. Quelle résistance R_c peut-on associer aux pertes par convection ?

3) On modélise les pertes par rayonnement par un flux thermique surfacique $\phi_r = \sigma(T^4 - T_e^4)$, où σ est la constante de STEFAN. On suppose $|T - T_e| \ll T_e$. Montrer que l'on peut associer aux pertes par rayonnement une résistance thermique R_r dont on donnera l'expression en fonction de σ, T_e et de la surface S du système.

4) Quelle est alors la résistance thermique R_T équivalent à l'ensemble, en fonction de R_c, R_r, R_{peau} et R_{combi} ?

5) Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ sachant que la puissance thermique produite par le métabolisme humain est $\mathcal{P} = 120\,\text{W}$ et sa capacité thermique massique $c = 3{,}5\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

6) Pour $T_e = 17\,°\text{C}$, au bout de combien de temps le plongeur est-il en hypothermie (c'est-à-dire que sa température corporelle est descendue à 35 °C) ?

Pour l'application numérique, on prendre la masse du plongeur $m = 75\,\text{kg}$, la surface totale de la combinaison $S = 1{,}3\,\text{m}^2$, $R_{\text{peau}} = 3{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, $h = 10\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, l'épaisseur de la combinaison $e = 3$ mm et la conductivité de la combinaison $\lambda = 4{,}4 \cdot 10^{-2}\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

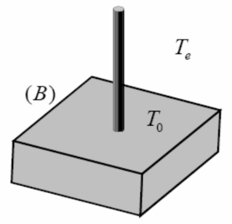
Exercice 2 : Igloo

Quelle doit être l'épaisseur minimale des murs d'un igloo, contenant un seul occupant, si la température extérieure est de $-20\,°\text{C}$?
On prendra la conductivité thermique de la glace égale à $\lambda = 0{,}05\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, la température minimale de survie égale à $10\,°\text{C}$, et on considèrera que le métabolisme de l'occupant dégage une puissance $\mathcal{P} = 50\,\text{W}$.

Exercice 3 : Ailette

On considère un corps solide (B) qui peut être un processeur d'ordinateur. Les phénomènes dissipatifs dont il est le siège le portent à une température T_0 supérieure à la température ambiante.

Pour faciliter le transfert thermique du processeur vers l'extérieur, on prolonge (B) par un barreau cylindrique, de longueur L et de section $S = \pi a^2$, suffisamment mince pour que sa température ne dépende que de la variable x, comptée dans le sens de sa longueur.



Ce barreau, appelé ailette, n'étant pas calorifugé, il présente des pertes conducto-convectives égales à $h(T(x) - T_a)$, où $T(x)$ est la température locale du barreau, T_a la température ambiante et h le coefficient de transfert thermique de surface en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

1) Montrer que la répartition de température dans le barreau est donnée par

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a}T(x) = -\frac{2h}{\lambda a}T_a$$

et en déduire son expression pour $L \gg a$.

2) Calculer le rapport ρ des puissances évacuées par le corps (B) à travers la surface, en présence du barreau et sans celui-ci ; dans ce dernier cas on supposera que les pertes thermiques de surface du processeur obéissent à la loi de NEWTON, avec le même coefficient h que pour le barreau.

Exercice 4 : Gel d'un lac

Lorsque l'air au-dessus d'un lac de surface S est à température $T_a < T_F$, on constate que l'épaisseur $e(t)$ de la couche de glace croît lentement avec $e(t) \propto \sqrt{t}$ pour t élevée. On note T_F la température de l'eau liquide, supposée uniforme, et $T(z,t)$ la température de la glace pour $0 \leq z \leq e(t)$.
On donne la température de fusion $T_F = 273\,\text{K}$ et la chaleur latente de fusion $\ell_F = 330\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ de la glace, ainsi que sa masse volumique μ, sa capacité calorifique massique $c = 4{,}18\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et sa conductivité thermique λ. On adoptera la même valeur μ pour la masse volumique de l'eau liquide.

1) On suppose que le profil de température $T(z,t)$ est le même que si le régime était stationnaire (approximation des régimes quasi-stationnaires). Exprimer le flux thermique ϕ traversant la couche de glace en fonction de λ, $e(t)$, S, T_a et T_F.

2) En déduire l'équation différentielle qui pilote l'évolution de $e(t)$ et la résoudre. À quelle condition l'ARQS est-elle validée ?

Exercice 5 : Effusivité (Mines)

On met en contact en $x = 0$ deux cylindres très longs de même section S en contact à $t = 0$. Initialement le cylindre (1) de masse volumique μ_1, de capacité thermique massique c_1 et de conductivité thermique λ_1 est à la température T_1, alors que le cylindre (2) de masse volumique μ_2, de capacité thermique massique c_2 et de conductivité thermique λ_2 est à la température T_2.

1) On envisage une solution approchée affine par morceaux avec
$T(x \leq -\sqrt{D_1 t}) = T_1$; $T(x \geq \sqrt{D_2 t}) = T_2$ et $T(x = 0) = T_0(t)$ où $D_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i c_i}$.
Déterminer $T_0(t)$ en fonction de T_1, T_2, $E_1 = \sqrt{\lambda_1 \mu_1 c_1}$ et $E_2 = \sqrt{\lambda_2 \mu_2 c_2}$. Expliquer pourquoi les sièges (et les clous !) d'un sauna sont en bois et pas en acier sachant que $E_{\text{acier}} \gg E_{\text{eau}} \gg E_{\text{bois}}$.

2) Reprendre en cherchant une solution exacte sachant que la fonction $f(x,t) = \int_0^{x/2\sqrt{Dt}} \exp(-v^2)\,dv$ est solution de l'équation de la diffusion thermique. On donne $\int_0^{+\infty} \exp(-v^2)\,dv = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 6 : Feu de bois (X-ESPCI)

En été, je me mets au Soleil pour avoir chaud. En hiver, je me mets au coin du feu. Comment expliquer que l'on ressente le même effet ?

Exercice 7 : Température dans une automobile au Soleil

Une automobile arrive vitres ouvertes sur un parking ensoleillé où la température extérieure vaut $T_e = 30\,°\text{C}$. L'automobiliste ferme les vitres et sort. Au bout de quelle durée τ la température dans l'automobile augmente-t-elle de $\Delta T = 10\,°\text{C}$ du fait de l'effet de serre dû aux vitres ?

On fournit des données dont certaines peuvent être inutiles : rapport des capacités thermiques $\gamma = 1{,}4$ de l'air ; pression atmosphérique $p_0 = 1{,}0$ bar ; constante $R = 8{,}31\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ des gaz parfaits ; masse molaire de l'air $M = 29\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$; volume $V = 2\,\text{m}^3$ de l'habitacle ; surface totale des vitres $S = 2\,\text{m}^2$; les vitres sont approximativement transparentes pour le rayonnement incident et opaques pour le rayonnement de l'air contenu dans l'automobile ; les vitres et l'air contenu dans l'automobile peuvent être assimilés à des corps noirs pour ce qui est du flux surfacique total émis ; loi de Stefan $\varphi = \sigma T^4$ avec $\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$; la capacité thermique totale C des vitres est négligeable devant celle de l'air contenu dans l'habitacle.

Réponses

Exercice 1 : Combien de temps un plongeur peut-il rester sous l'eau ?

1) $R = \dfrac{\lambda S}{e}$; **2)** $R_c = \dfrac{1}{hS}$ **3)** $R_r = \dfrac{1}{4\sigma T_e^3 S}$

4) $R_T = R_{\text{peau}} + R_{\text{combi}} + \dfrac{R_c R_r}{R_c + R_r}$

5) $\dfrac{dT}{dt} + \dfrac{T}{\tau} = \dfrac{T_\infty}{\tau}$ avec $\tau = mcR_T$ et $T_\infty = \mathcal{P}R_T + T_e$; **6)** $\Delta t = 6,3$ h.

Exercice 2 : Igloo

$G_{\text{th}} = 2\pi\lambda \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ avec $R_2 = R_1 + e$, et $e = \dfrac{2\pi\lambda R_1^2}{\frac{\mathcal{P}}{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}} - 2\pi\lambda R_1} \approx 23$ cm pour $R_1 \approx 1$ m.

Exercice 3 : Ailette

1) Ne pas oublier les pertes latérales : $T(x) = (T_0 - T_a)e^{-x/\delta} + T_a$.

2) $\phi = \dfrac{\lambda\pi a^2}{\delta}(T_0 - T_a)$ et $\phi_0 = h\pi a^2 (T_0 - T_a)$.

Exercice 4 : Gel d'un lac

1) $\phi_{\text{air}\to\text{eau}} = \frac{\lambda\,(T_a - T_F)\,S}{e(t)} < 0$

2) $e\frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_F - T_a)}{\mu\,\ell_F}$; $e^2(t) = e_0^2 + 2\frac{\lambda\,(T_F - T_a)\,t}{\mu\,\ell_F}$; ARQS valable si $T_F - T_a \ll \frac{\ell_F}{c} = 79\,\text{K}$

Exercice 5 : Effusivité

1) $T_0(t) = (E_1\,T_1 + E_2\,T_2)/(E_1 + E_2)$; l'acier impose sa température au corps humain alors que le corps humain impose sa température au bois.
2) $T(x > 0, t) = T_0 + 2\,(T_0 - T_1)\,f_1(x,t)/\sqrt{\pi}$; $T(x < 0, t) = T_0 + 2\,(T_2 - T_0)\,f_2(x,t)/\sqrt{\pi}$; $T_0(t) = (E_1\,T_1 + E_2\,T_2)/(E_1 + E_2)$ comme en 1).

Exercice 6 : Feu de bois

Égalite entre le flux solaire au niveau de la Terre et celui dû à une sphère de rayon R de type corps noir à la température T inconnue et ressenti à une distance D : $\varphi_S = \frac{\sigma T^4 R^2}{D^2}$.

Exercice 7 : Température dans une automobile au Soleil

Flux solaire : $\varphi_s = \sigma\,T_e^4 = 0{,}48\,\text{kW}\cdot\text{m}^{-2}$

Capacité thermique de l'habitacle : $C_V = \frac{p_0\,V}{(\gamma-1)\,T} = 1{,}6\cdot 10^3\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$

Équation différentielle $C_V\,\frac{dT}{dt} = S\,\sigma\,T_e^4 - \frac{S\,\sigma\,T^4}{2}$

Temps caractéristique $\tau = \frac{2\,C_V\,\Delta T}{S\,\sigma\,T_e^4} = 34$ s