TD n°7 : Révisions d'optique géométrique

Exercice 1 : I ♡ frogs

Jusqu'à quel âge peuvent survivre les grenouilles d'un étang si leur prédateur principal vole ?

Exercice 2 : Méthode de BESSEL en focométrie

On dispose d'un objet AB dont on veut projeter une image $A'B'$ sur un écran situé à la distance D de AB. Pour ce faire, on dispose d'une lentille convergente de distance focale f'.
Montrer que si $D \geq 4f'$ alors les deux positions de la lentille permettant d'obtenir une image nette de AB sur l'écran (E) sont telles que :

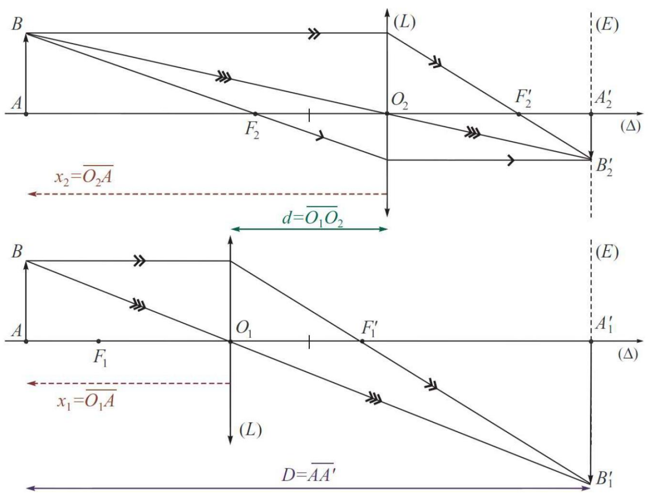
1) elles sont symétriques par rapport à $\dfrac{D}{2}$,

2) le produit de leurs grandissements est égal à 1,

3) et si l'on appelle d la distance entre ces deux positions alors :

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

On peut alors déterminer la distance focale f' de la lentille en mesurant expérimentalement D et d, cf TP.



Exercice 3 : Dioptre plan (X-ESPCI)

Deux pièces en or se trouvent au fond de deux récipients l'un vide et l'autre rempli d'eau d'indice $n = 1,33$ sur une hauteur $h = 20$ cm. L'oeil voit deux pièces identiques. Laquelle doit-il choisir ?

Exercice 4 : Oculaire (Mines)

Un oculaire est constitué d'une lentille mince divergente de focale $f_1' = -3a$ suivie d'une lentille mince convergente de focale $f_2' = 2a$ dont les centres optiques sont distants de $O_1O_2 = 5a$. Déterminer les foyers de l'oculaire par une construction géométrique puis par le calcul. L'énoncé fournissait les formules de conjugaison avec origine au centre et aux foyers :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} \qquad \text{et} \qquad \overline{F'A'}\,\overline{FA} = -f'^2$$

Exercice 5 : Mirage des routes goudronnées (Centrale)

1) On décrit l'atmosphère comme une superposition de couches homogènes d'indice $n(z)$ comprises entre $z - dz/2$ et $z + dz/2$. On envisage un rayon lumineux émis en O dans le plan xOz en faisant un angle θ_0 avec l'axe Ox. On note $\theta(z)$ l'angle que fait le rayon lumineux dans la couche d'indice $n(z)$. Montrer que le rayon reste dans le plan xOz et que $n(z)\ \cos\theta(z) = K$ est une constante.

2) On passe à la limite continue. Montrer que l'équation $z(x)$ du rayon lumineux est solution des équations différentielles :

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(z)}{K^2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{2K^2}\frac{d(n^2)}{dz}$$

Déterminer $z(x)$ si $d(n^2)/dz = \beta$ est une constante donnée.

3) En déduire qu'un observateur situé à une hauteur H au dessus d'une route goudronnée peut "voir le ciel comme s'il se réféchissait sur de l'eau". Exprimer la distance horizontale D entre l'observateur et le point du sol d'où semble provenir le rayon lumineux pour l'oeil en fonction de H et β. On supposera que $K \approx 1$.

4) Proposer un modèle pour estimer β et en déduire D.

Exercice 6 : Guidage optique par des lentilles minces (Centrale)

On considère une infinité de lentilles minces convergentes identiques L_n de distance focale f', de même axe optique $x'x$ et dont les centres O_n ont pour abscisse $x_n = na$ où a est une distance donnée et n un entier relatif.

1) Un rayon lumineux frappe la lentille L_n au point (x_n, y_n). Construire son émergent et en déduire la relation de récurrence entre y_n, y_{n+1}, y_{n-1}, f' et a.

2) Chercher des solutions de la forme $y_n = r^n$. À quelle condition sur le rapport a/f', l'approximation de GAUSS est-elle valable pour toutes les lentilles ?

Exercice 7 : Approche ondulatoire de la lentille mince

- **Version X-ESPCI**

Démontrer la relation de conjugaison de DESCARTES d'une lentille mince convergente en utilisant le fait qu'elle transforme une onde sphérique divergente en onde sphérique convergente.

- **Version Centrale**

Dans tout le problème on se place dans l'approximation paraxiale autour d'un axe optique Oz : on repère un point $M(x, y, z)$ par ses coordonnées cartésiennes et on limite les calculs à l'ordre deux en x/D et y/D où D est une distance caractéristique qu'il n'est pas nécessaire de préciser. On pose $r^2 = x^2 + y^2$.

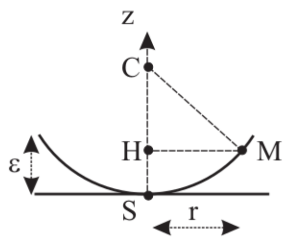
1) Un point $A(0, 0, z_A)$ émet une onde sphérique monochromatique de longueur d'onde λ en un point $M(x, y, z)$ éloigné. Montrer qu'à l'ordre deux en $r/|z - z_A|$ on a :

$$(AM) = |z - z_A| + \frac{r^2}{2\,|z - z_A|}$$

En déduire que le retard de phase de l'onde en $M(x, y, z)$ est tel que :

$$\Delta\phi(r, z) = \phi(r, z) - \phi(r = 0, z) = \frac{\pi\, r^2}{\lambda\,|z - z_A|}$$

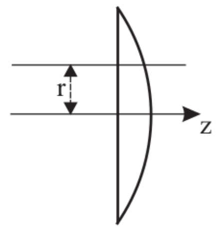
2) En utilisant le théorème de PYTHAGORE dans le triangle $\widehat{CHM}$, montrer que l'écart $\varepsilon(r)$ entre une sphère de rayon R centrée en un point C de l'axe Oz et son plan tangent vaut en limitant les calculs à l'ordre le plus bas non nul en r/R :



$$\varepsilon = \frac{r^2}{2R}$$

3) Soit une lentille mince plan convexe de rayon de courbure R, d'indice n et d'épaisseur e. On traite la lentille comme une lame de phase et on évalue les chemins optiques en supposant les rayons lumineux parallèles à l'axe optique.

a) Montrer que le retard de phase $\psi(r)$ qu'elle engendre à une distance r de son axe optique est tel que :



$$\Delta\psi(r) = \psi(r) - \psi(r = 0) = -\frac{\pi\,(n-1)\,r^2}{\lambda\,R}$$

b) On fixe l'origine des z au sommet de la lentille. On note $\phi_t(r)$ le retard de phase total d'une onde sphérique émise par un objet réel A de cote $z_A < 0$ évalué juste après la traversée de la lentille c'est-à-dire dans le plan $z = 0_+$. Montrer que :

$$\Delta\phi_t(r) = \phi_t(r) - \phi_t(r = 0) = -\frac{\pi\,\alpha\,r^2}{\lambda} \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{1}{z_A} + \frac{(n-1)}{R}$$

c) À quelle condition sur z_A, $z_{A'}$, n et R l'expression de $\Delta\phi_t(r)$ s'identifie-t-elle à celle qu'on aurait pour une onde sphérique émise par un point A' de cote $z_{A'}$? Vérifier qu'on retrouve ainsi la relation de conjugaison des lentilles minces et exprimer la distance focale f' en fonction de R et n. Vérifier sur un cas particulier.

Réponses

Exercice 1 : Survie des grenouilles

Demander à un ex-spé bio la relation entre l'âge d'une grenouille et sa taille.

Exercice 2 : Méthode de Bessel en focométrie

Utiliser la relation de conjugaison de Descartes et en déduire une équation du second degré sur la distance lentille-objet.

Exercice 3 : Dioptre plan (oral X-ESPCI)

L'œil n'est sensible qu'aux angles et un dioptre plan ne grandit pas mais il déplace avec la condition de stigmatisme $1/\overline{SA'} = n/\overline{SA}$ qui ne figure pas au programme mais se retrouve facilement en linéarisant les lois de Descartes ; l'image de la pièce située dans l'eau est plus proche de l'œil que celle située dans l'air et de même taille, donc elle paraît plus grosse qu'elle n'est ; il faut choisir l'autre.

Exercice 4 : Oculaire (Mines)

Il y a moins de calculs avec "origine aux foyers" ; $\overline{F_2'F'} = 2a/3$ et $\overline{F_1F} = -3a/2$

Exercice 5 : Mirage des routes goudronnées (Centrale)

2) $z(x) = \beta\, x^2/4K^2 + x\ \tan\theta_0$

3) $z(x) = \frac{\beta\, x^2}{4}$; $\tan\theta = dz/dx = \sqrt{\beta\, H}$ et $D = H/\tan\theta = \sqrt{H/\beta}$

4) $n - 1 = (n_0 - 1)\, T_0/T$; $n^2 - 1 \approx 2(n-1)$; $\beta \approx (2(n_0-1)/T_0)\,(dT/dz) \approx 2.(3\cdot 10^{-4}/300)\,(10/0.2) = 10^{-4}\ \text{m}^{-1}$; $D \approx 100$ m pour $H = 1$ m crédible

Exercice 6 : Guidage optique par des lentilles minces (Centrale)

1) $y_{n+1} + y_{n-1} + (a/f' - 2)\, y_n = 0$;

2) $a/f' < 4$

Exercice 7 : Approche ondulatoire de la lentille mince (X-ESPCI)

Modéliser une lentille plan-convexe d'épaisseur e et de rayon R ; exploiter l'écart $\varepsilon = r^2/2\rho$ entre une sphère de rayon ρ centrée sur l'axe optique et son plan tangent à une distance r de l'axe pour traduire le fait que le chemin entre la dernière surface d'onde incidente et la première surface d'onde émergente est indépendant de r ; soit $r^2/2|z_A| + n\,(e - r^2/2R) + r^2/2R + r^2/2|z_{A'}| = \text{cste}$; $1/|z_{A'}| + 1/|z_A| = 1/f'$ avec $f' = R/(n-1)$; vérifier la pertinence sur les cas particuliers $n = 1$ ou $R = \infty$.