Correction du TD n°6

Exercice 1 : Combien de temps un plongeur peut-il rester sous l'eau ?

1) En régime stationnaire, $T - T_e = R_{\text{th}}\phi$ avec $\boxed{R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}}$ pour un modèle unidimensionnel.

2) $\phi_c = hS(T - T_e)$, donc $T - T_e = \frac{1}{hS}\phi$, ce qui implique que $\boxed{R_c = \frac{1}{hS}}$.

3) Posons $T = T_e + \Delta T$, avec $\Delta T \ll T_e$. Alors

$$T^4 = (T_e + \Delta T)^4 = T_e^4 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_e}\right)^4 \overset{\text{DL}}{\approx} T_e^4 \left(1 + 4\frac{\Delta T}{T_e}\right)$$

Ainsi, $T^4 - T_e^4 \approx 4T_e^3 \Delta T$ et le flux radiatif s'écrit

$$\phi_r \approx 4\sigma T_e^3 S(T - T_e) = \frac{T - T_e}{R_r}$$

Soit, finalement $\boxed{R_r = \dfrac{1}{4\sigma T_e^3 S}}$.

4) Les résistances de conduction associées au corps humain et à la combinaison sont en série, car traversées par le même flux thermique. Les résistances de convection et de radiation sont en parallèle, car vues entre les mêmes différences de température. On en déduit, par analogie avec l'électricité

$$\boxed{R_T = R_{\text{peau}} + R_{\text{combi}} + \frac{R_c R_r}{R_c + R_r}}$$

5) On se place dans l'ARQS, pour pouvoir utiliser les résistances thermiques en dehors du régime stationnaire. Le premier principe appliqué au plongeur pendant dt donne :

$$dU = \delta Q_e + \delta Q_c = -\phi_T dt + \mathcal{P} dt \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{T - T_e}{R_T} + \mathcal{P}$$

Or $dU = mc(T(x, t + dt) - T(x, t))$, ce qui donne

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau}(T_e + R_T\mathcal{P}) \text{ avec } \tau = mcR_T$$

6) La solution particulière de l'équation précédente est $T_\infty = T_e + R_T\mathcal{P}$ et la solution homogène $Ae^{-t/\tau}$ ce qui, avec $T(0) = T_0$, conduit à

$$\boxed{T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-t/\tau}}$$

On cherche maintenant Δt tel que $T(\Delta t) = T_{\text{hypo}}$, ce qui donne

$$\boxed{\Delta t = \tau \ln\left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_{\text{hypo}} - T_\infty}\right) = 2{,}3 \cdot 10^4\ \text{s} = 6{,}3\ \text{h}}$$

L'ordre de grandeur parait en accord avec l'expérience. On pourrait vérifier que ce temps est beaucoup plus court en l'absence de combinaison (cela enlève une résistance thermique) !

La jarre est à symétrie sphérique. Par invariance par rotation selon θ et ϕ de celle-ci, le principe de CURIE assure qu'il en sera de même pour le champ de température et donc qu'il ne dépendra que de la distance à l'axe r.

La loi de FOURIER assure alors que le vecteur $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \frac{dT}{dr}\overrightarrow{u_r}$ est radial, et donc que le flux de chaleur sortant à travers une sphère de rayon r s'écrit

$$\phi(r) = \iint \overrightarrow{j_Q}(r) \cdot \overrightarrow{dS} = j_Q(r)4\pi r^2$$

.

Considérons alors la couronne sphérique comprise entre deux rayons r_1 et r_2 quelconques. La variation de son énergie interne au cours du temps est nulle, puisque l'on est en régime stationnaire. Le premier principe appliqué à ce système fermé permet alors d'écrire

$$O = dU = \delta Q_e = \phi(r_1)dt - \phi(r_2)dt \Rightarrow \phi(r_1) = \phi(r_2) = cte$$

On en déduit

$$-\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2 = j_Q(r)S = \phi \Rightarrow T(r) = \frac{\phi}{4\pi\lambda r} + \text{ cte}$$

Les conditions aux limites dans les parois de la jarre s'écrivent $T_i = T(r = R)$ et $T_e = T(r = R + e)$, ce qui donne

$$T_i - T_e = \frac{\phi}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + e}\right) \Rightarrow \phi = \frac{4\pi R^2 \lambda}{e}(T_i - T_e)$$

puisque $e \ll R$.

Remarque : on retrouve l'expression de la conductance thermique en cartésienne $G_{\text{th}} = \frac{\lambda S}{e}$, avec $S = 4\pi R^2$ la surface de la paroi de la jarre. Ceci est dû au fait que son épaisseur e est faible, et donc que les deux parois en R et $R+e$ peuvent être assimilées à leurs plans tangents.

ϕ étant le flux (ou puissance) thermique sortant, l'eau reçoit pendant la durée τ une chaleur :

$$Q = -\tau\,\phi = \frac{4\pi\,R^2\,\lambda\,\tau\,(T_e - T_i)}{e}$$

Cette chaleur provoque l'évaporation de la moitié du volume initial d'eau soit un volume $2\pi R^3/3$ et donc une masse $m = 2\pi R^3\,\mu/3$ d'eau. La variation d'enthalpie correspondante étant égale à $m\,l_v$, le premier principe de la thermodynamique s'écrit, à pression constante, dans une version "enthalpique" absorbant le travail des forces de pression :

$$\Delta H = Q \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi\,R^3\,\mu\,l_v}{3} = \frac{4\pi\,R^2\,\lambda\,\tau\,(T_e - T_i)}{e}$$

On en déduit

$$\boxed{T_i - T_e = -\frac{\mu\,R\,e\,l_v}{6\,\lambda\,\tau} = -\,10\,°\text{C}}$$

ce qui constitue un effet réfrigérant appréciable. Notons que cet effet dépend du taux d'évaporation, plus élevé au soleil (atmosphère sèche et température élevée) que dans une cave.

Remarque : On peut mettre ce processus à profit pour refroidir une bouteille d'eau au bord de la plage. Il suffit de l'entourer d'une serviette mouillée qui, par évaporation de l'eau, va refroidir la bouteille placée en plein Soleil !

Exercice 3 : Ailette

1) On se place dans un petit morceau cylindrique d'ailette, de section transverse $S = \pi a^2$, compris entre x et $x+dx$. La différence avec la démonstration du bilan local du cours est que, cette fois-ci, il y a des pertes sur la surface latérale du cylindre $2\pi a dx$, modélisées par la loi de NEWTON. Le premier principe s'écrit alors

$$d^2U = \delta^2 Q_e = j(x)Sdt - j(x+dx)Sdt - h(T(x) - T_a)2\pi a dx dt$$

En régime stationnaire $dU = U(t+dt) - U(t) = 0$, il suffit alors d'utiliser la loi de FOURIER $\overrightarrow{j} = -\lambda \frac{dT}{dx}\overrightarrow{u_x}$ pour en déduire l'équation différentielle souhaitée

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2}\pi a^2 - h(T(x) - T_a)2\pi a = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda a}T = -\frac{2h}{\lambda a}T_a}$$

On cherche des solutions sous forme d'exponentielles réelles puisque le milieu n'est pas borné ($L >> a$), cela va nous permettre d'éliminer un terme. En effet, T s'écrit alors

$$T(x) = Ae^{\frac{x}{\delta}} + Be^{-\frac{x}{\delta}} + T_a$$

avec $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}}$. La condition aux limites en bout d'ailette $x = L \gg a$, soit $x \gg \delta$ implique que l'exponentielle croissante diverge, ce qui n'est pas physique. On en déduit que A est nécessairement nul.
L'autre condition aux limites $T(x=0) = T_0$ permet d'obtenir $B = T_0 - T_a$, soit finalement

$$\boxed{T(x) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-\frac{x}{\delta}}}$$

2) On s'intéresse maintenant à quantifier l'intérêt de l'ailette de refroidissement, en déterminant la valeur du flux thermique évacué vers l'atmosphère par celle-ci.
On détermine ce flux à l'aide de la loi de FOURIER en $x = 0$. En effet, en régime permanent, tout ce que l'ailette reçoit en $x = 0$ de la part du processeur doit être cédé à l'air ambiant.

$$\phi = j(x=0)S = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0}\pi a^2 = \frac{\lambda\pi a^2}{\delta}(T_0 - T_a)$$

Remarque : On aurait bien obtenu le même résultat en intégrant, sur toute la surface latérale de l'ailette, le flux conducto-convectif cédé :

$$\phi = \int_0^\infty h(T(x) - T_a)2\pi a dx = 2\pi a h\int_0^\infty (T_0 - T_a)e^{-\frac{x}{\delta}}dx$$

ou encore

$$\phi = 2\pi a h\delta(T_0 - T_a) = \frac{\lambda a}{\delta^2}\pi a\delta(T_0 - T_a) = \frac{\lambda\pi a^2}{\delta}(T_0 - T_a)$$

En l'absence d'ailette, le flux du processeur vers l'atmosphère, à travers une surface $S = \pi a^2$, aurait été

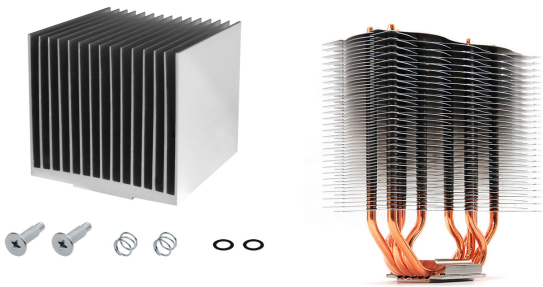
$$\phi_0 = h\pi a^2 (T_0 - T_a)$$

Le rapport des deux flux vaut donc

$$\boxed{\frac{\phi}{\phi_0} = \frac{\lambda}{h\delta} = \sqrt{\frac{2\lambda}{ha}} \approx 40}$$

en prenant $h = 10\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$, $\lambda = 10^2\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ et $a = 1\,\mathrm{cm}$. **L'ailette permet donc évacuer 40 fois plus de puissance thermique du processeur.**

Remarque : plus a est petit et meilleure est l'ailette, car alors le rapport surface sur volume de celle-ci augmente, ce qui permet de favoriser les échanges avec l'atmosphère. C'est pour cela que les ailettes ressemblent en pratique à des feuillets comme ci-dessous



Exercice 5 : Effusivité (Mines)

1) Lorsque l'on met en contact les deux cylindres, de la diffusion thermique a lieu dans ceux-ci, modifiant leurs températures. Sachant qu'au bout d'un temps t, la diffusion se fait sentir sur une distance de l'ordre de $\sqrt{D_i t}$, on suppose que la température reste à sa valeur initiale en dehors de l'intervalle $[-\sqrt{D_1 t}, \sqrt{D_2 t}]$. À l'intérieur de celui-ci, l'équation de LAPLACE du régime (quasi)stationnaire conduit à chercher une solution affine par morceaux de la forme

$$\begin{cases} T(x,t) = A_1(t)x + B_1(t) \text{ pour } -\sqrt{D_1 t} \leq x \leq 0 \\ T(x,t) = A_2(t)x + B_2(t) \text{ pour } 0 \leq x \leq \sqrt{D_2 t} \end{cases}$$

Les conditions aux limites en température donnent alors

$$\begin{cases} T(0,t) = T_0(t) = B_1(t) = B_2(t) \\ T_1 = T(x = -\sqrt{D_1 t}, t) = -A_1(t)\sqrt{D_1 t} + T_0(t) \Rightarrow A_1(t) = \dfrac{T_0(t) - T_1}{\sqrt{D_1 t}} \\ T_2 = T(x = \sqrt{D_2 t}, t) = A_2(t)\sqrt{D_2 t} + T_0(t) \Rightarrow A_2(t) = \dfrac{T_2 - T_0(t)}{\sqrt{D_2 t}} \end{cases}$$

Auxquelles il faut ajouter la continuité du flux entre $x = 0$

$$j_{Q1}(x=0,t) = j_{Q2}(x=0,t) \overset{\text{FOURIER}}{\Rightarrow} -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0^-, t) = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0^+, t)$$

ou encore

$$\lambda_1 \frac{T_1 - T_0(t)}{\sqrt{D_1 t}} = -\lambda_2 \frac{T_2 - T_0(t)}{\sqrt{D_2 t}} \Rightarrow E_1(T_1 - T_0) = -E_2(T_2 - T_0)$$

en utilisant le fait que $D_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i c_i}$ et $E_i = \sqrt{\lambda_i \mu_i c_i}$. Finalement, on obtient

$$\boxed{T_0 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}}$$

Le cas limite $E_2 \gg E_1$ donne que $T_0 = T_2$, c'est-à-dire que **le corps avec la plus grande effusivité impose sa température**. Ainsi, lors d'un contact entre un métal et la peau, celui-ci nous apparait très chaud, voire peut nous bruler. Alors que si l'on touche du bois à la même température que le métal, on le sent beaucoup plus froid.

Cela explique pourquoi les sièges d'un sauna sont en bois et non en métal. De même, le banc est maintenu par des chevilles en bois et non par des clous :)

2) On cherche une solution de l'équation de diffusion sous la forme

$$\begin{cases} T(x<0,t) = \alpha_1(t) \int_0^{x/2\sqrt{D_1 t}} \exp(-v^2)\, dv + \beta_1(t) \\ T(x>0,t) = \alpha_2(t) \int_0^{x/2\sqrt{D_2 t}} \exp(-v^2)\, dv + \beta_2(t) \end{cases}$$

La condition aux limites en $x = 0$ conduit à $\beta_1(t) = \beta_2(t) = T_0(t)$. Les conditions *initiales* ($t \to 0$) conduisent à $\frac{x}{2\sqrt{D_i t}} \to \pm\infty$ et donc à l'équation suivante

$$\begin{aligned} T_1 = T(x=-\infty,0) &= \alpha_1(t)\int_0^{-\infty}\exp(-v^2)\,dv + \beta_1(t) \\ &\overset{w=-v}{=} \alpha_1(t)\int_0^{\infty}\exp(-w^2)\,d(-w) + \beta_1(t) \\ &= -\alpha_1(t)\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \beta_1(t) \end{aligned}$$

Ce qui conduit à $\alpha_1(t) = \frac{2(T_0(t)-T_1)}{\sqrt{\pi}}$. De la même façon , la condition sur T_2 donne $\alpha_2(t) = \frac{2(T_2-T_0(t))}{\sqrt{\pi}}$. La température dans les cylindres s'écrit donc

$$\begin{cases} T(x<0,t) = \frac{2(T_0(t)-T_1)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{D_1 t}}\exp(-v^2)\,dv + T_0(t) \\ T(x>0,t) = \frac{2(T_2-T_0(t))}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{D_2 t}}\exp(-v^2)\,dv + T_0(t) \end{cases}$$

Il reste à traduire la continuité du flux thermique en $x=0$

$$-\lambda_1\frac{\partial T}{\partial x}(x=0^-,t) = -\lambda_2\frac{\partial T}{\partial x}(x=0^+,t)$$

Pour calculer la dérivée de T, on utilise la formule de dérivation d'une fonction composée sur la fonction f de l'énoncé

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \overset{u=\frac{x}{2\sqrt{D_i t}}}{=} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sqrt{D_i t}}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{D_i t}}$$

ce qui conduit à

$$-\lambda_1\frac{2(T_0(t)-T_1)}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{D_1 t}} = -\lambda_2\frac{2(T_2-T_0(t))}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{D_2 t}}$$

On retrouve la même condition qu'à la question **1)**, le résultat est donc identique.

Exercice 6 : Feu de bois (X-ESPCI)

Si l'on ressent la même chose dans les deux cas, c'est que les flux thermiques sont identiques.

- Pour le Soleil, on a déjà calculé dans le cours son expression surfacique à la surface de la Terre

$$\varphi_{S\to T} = \frac{\sigma T_S^4 \cancel{4\pi} R_S^2}{\cancel{4\pi} d_{TS}^2} = \frac{5{,}67\cdot10^{-8}\times(6\cdot10^3)^4\times(7\cdot10^8)^2}{(1{,}5\cdot10^{11})^2} = 1{,}6\,\mathrm{kW\cdot m^{-2}}$$

- En ce qui concerne le feu de cheminée, on peut le modéliser par un corps noir de rayon $R = 10$ cm à un température T inconnue. La formule pour le flux surfacique à une distance $d = 1$ m est la même que pour le Soleil $\varphi = \frac{\sigma T^4 R^2}{d^2}$.
- L'égalité des flux donne alors la température que doit avoir le feu de cheminée

$$\boxed{T = \sqrt[4]{\frac{\varphi_{S\to T} d^2}{\sigma R^2}} = 1{,}3\cdot10^3\,\mathrm{K}}$$

ce qui ne parait pas délirant. La loi de WIEN donne comme longueur d'onde du maximum de rayonnement

$$\lambda_{\text{Max}} = \frac{3\cdot10^{-3}}{T} = 2{,}3\,\mu\mathrm{m}$$

c'est-à-dire de l'infrarouge, ok.

Exercice 7 : Température dans une automobile au Soleil

• Analyse

Le problème posé met en jeu l'évolution temporelle de la température de l'air dans l'automobile, donc est liée aux puissances qu'il reçoit c'est-à-dire $\mathcal{P}_s$ de la part du Soleil et $\mathcal{P}_v$ de la part des vitres. Ceci introduit comme inconnues outre les températures T dans l'automobile et T_v des vitres, le flux solaire surfacique φ_s et la capacité thermique C de l'air dans l'automobile. On peut donc décomposer le problème en trois étapes :

- détermination de φ_s en exploitant la température ambiante ;
- détermination de C en exploitant le volume de l'habitacle ;
- détermination de l'équation d'évolution de T et T_v.

• Étape 1

Un élément de surface S du sol supposé en équilibre à la température T_e reçoit le flux incident $S\,\varphi_s$ et émet le flux $S\,\sigma\,T_e^4$. La température T_e est stationnaire, donc le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$0 = S\,\varphi_s\,dt - S\,\sigma\,T_e^4\,dt \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\varphi_s = \sigma\,T_e^4 = 0{,}48\,\mathrm{kW\cdot m^{-2}}}$$

• **Étape 2**

Le nombre de moles d'air dans l'habitacle s'obtient via l'équation d'état des gaz parfaits et permet de calculer la capacité thermique à volume constant :

$$n = \frac{p_0 V}{RT} \quad \text{et} \quad C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad \text{puis} \quad n = \frac{p_0 V}{RT} \quad \text{donc} \quad \boxed{C_V = \frac{p_0 V}{(\gamma-1)T} = 1{,}6 \cdot 10^3 \,\mathrm{J \cdot K^{-1}}}$$

• **Étape 3**

L'air de l'habitacle reçoit le flux solaire $S\,\varphi_s$ car la vitre est transparente pour ce rayonnement ; il reçoit en outre le flux des vitres $S\,\sigma\,T_v^4$. L'air de l'habitacle émet le flux $S\,\sigma\,T^4$. En supposant que l'air dans l'habitacle constitue un système fermé évoluant de manière isochore, le premier principe appliqué à l'air s'écrit :

$$C_V\,dT = S\,\varphi_s\,dt + S\sigma\,T_v^4\,dt - S\,\sigma\,T^4\,dt \quad \text{d'où} \quad C_V\,\frac{dT}{dt} = S\,\varphi_s + S\,\sigma\,T_v^4 - S\,\sigma\,T^4 \quad (1)$$

Les vitres ne reçoivent pas le flux solaire car elles sont transparentes pour ce rayonnement. Elles reçoivent le flux de l'habitacle $S\,\sigma\,T^4$ et émettent sur une surface $2S$ (deux faces) un flux total $2S\,\sigma\,T_v^4$. Le premier principe appliqué aux vitres s'écrit donc :

$$C\,dT = S\,\sigma\,T^4\,dt - 2S\,\sigma\,T_v^4\,dt \quad \text{soit} \quad C\,\frac{dT}{dt} = S\,\sigma\,T^4 - 2S\,\sigma\,T_v^4 \quad (2)$$

La combinaison $(1) + (2)/2$ permet d'éliminer la température des vitres :

$$\left(C_V + \frac{C}{2}\right)\frac{dT}{dt} = S\,\varphi_s - \frac{S\,\sigma\,T^4}{2} \quad \text{soit} \quad C_V\,\frac{dT}{dt} = S\,\varphi_s - \frac{S\,\sigma\,T^4}{2}$$

en négligeant $C/2$ devant C_V. En utilisant l'expression de φ_s obtenue en **1**, il vient alors :

$$\boxed{C_V\,\frac{dT}{dt} = S\,\sigma\,T_e^4 - \frac{S\,\sigma\,T^4}{2}}$$

L'équation différentielle obtenue est non linéaire, mais on peut remarquer que la variation relative de température $\Delta T/T = 10/300 = 3.10^{-2}$ est faible. Il est donc naturel d'exploiter l'équation différentielle à l'instant $t = 0$ où $T(t=0) = T_e$ et de remplacer la dérivée par un taux d'accroissement pendant la durée τ cherchée :

$$C_V\,\frac{\Delta T}{\tau} = S\,\sigma\,T_e^4 - \frac{S\,\sigma\,T_e^4}{2} = \frac{S\,\sigma\,T_e^4}{2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\tau = \frac{2\,C_V\,\Delta T}{S\,\sigma\,T_e^4} = 34\,\mathrm{s}}$$

Ce chiffre semble trop faible mais il rend bien compte de l'efficacité de l'effet de serre.

Parmi les défauts du modèle adopté on peut penser que l'habitacle cède de la chaleur aussi par diffusion thermique. En adoptant un modèle de type loi de Newton $h\,(T - T_e)$ pour le flux surfacique correspondant, on peut majorer ce terme par $h\,\Delta T$, ce qui permet de l'omettre dans le bilan si :

$$h\,S\,\Delta T \ll \frac{S\,\sigma\,T_e^4}{2} \qquad \text{soit} \qquad h \ll \frac{\sigma\,T_e^4}{2\,\Delta T} = 24\,\mathrm{W \cdot K^{-1}}$$

Il est probable que cette inégalité n'est pas franchement vérifiée, ce qui revient à allonger la durée du réchauffement. On peut aussi penser à la contribution des éléments de l'habitacle (sièges...) à la capacité thermique et à la contribution de la carrosserie au rayonnement émis.