

Correction du DM n°3 : Détecteur pyroélectrique (Centrale PC1 2009)

I Étude de la diffusion thermique

I.A) Étude du régime stationnaire

I.A.1) On suppose $T(z)$, donc les surfaces isothermes sont aussi celles d'équation $z = \text{cte}$. Or, le gradient de T est perpendiculaire aux surfaces isoT, il est donc dans la direction de l'axe (Oz) .

D'autre part, par définition du gradient, celui-ci est dans le sens des températures croissantes. Or, ici, on chauffe en $z = 0$ et on refroidit en $z = L$, donc le **gradient de T est selon $-\vec{u}_z$** .

La loi de FOURIER s'écrit

$$\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}}T$$

où la densité volumique de courant thermique \vec{j}_Q est en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, la conductivité thermique λ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et le gradient en $\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$.

Le signe négatif traduit que la chaleur se dirige dans le sens des températures décroissantes.

I.A.2) La puissance JOULE fournie par l'alimentation à la résistance s'écrit

$$\mathcal{P}_J = R_{\text{ch}} I^2 = \frac{U_0^2}{R_{\text{ch}}}$$

Puisque cette puissance est intégralement transférée à la barre en $z = 0$, on en déduit que

$$\mathcal{P}_J = \phi(z=0) = j_Q(z=0)S = j_Q(z=0)\pi \frac{d^2}{4}$$

soit

$$\vec{j}_Q(0) = \frac{4U_0^2}{\pi d^2 R_{\text{ch}}} \vec{u}_z$$

I.A.3) Le premier principe appliqué, entre t et $t + dt$, à une tranche dz de barre de section S s'écrit

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q_e = j_Q(z)Sdt - j_Q(z+dz)Sdt$$

puisque la barre est incompressible et qu'il n'y a pas de source de chaleur dans la barre. Le régime étant stationnaire $dU = 0$, ce qui conduit par un développement de TAYLOR à l'ordre 1 à

$$\frac{dj_Q}{dz} = 0 \text{ ou encore } j_Q = \text{cte} = j_Q(0)$$

L'utilisation des deux questions précédente donne alors

$$\frac{dT}{dz} + \frac{4U_0^2}{\lambda \pi d^2 R_{\text{ch}}} = 0$$

I.A.4) En intégrant la relation précédente entre z et L , on obtient

$$T(z) = T(L) - \frac{4U_0^2}{\lambda \pi d^2 R_{\text{ch}}}(z - L)$$

que l'on peut aussi évaluer entre z_1 et z_2 , ce qui donne

$$T_{p1} - T_{p2} = -\frac{4U_0^2}{\lambda \pi d^2 R_{\text{ch}}}(z_1 - z_2)$$

ce qui permet d'en déduire l'expression de la conductivité thermique du cuivre

$$\lambda = \frac{4U_0^2(z_2 - z_1)}{\pi d^2 R_{\text{ch}}(T_{p1} - T_{p2})}$$

L'application numérique donne

$$\lambda = \frac{4 \times (6,00)^2 \times 8 \cdot 10^{-2}}{\pi \times (15,0 \cdot 10^{-3})^2 \times 8,00 \times (46,4 - 41,4)} = 4,07 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

I.A.5) Le premier principe industriel appliqué à l'eau en écoulement stationnaire s'écrit $\Delta h = q + w_u = q$ ou encore, en multipliant par le débit volumique et en utilisant la deuxième loi de JOULE

$$\rho_e d_v c_e \Delta T_e = \mathcal{P}_J$$

où la puissance est la même que précédemment puisqu'il n'y a pas de pertes.
Finalement

$$\Delta T_e = \frac{U_0^2}{R_{ch} \rho_e d_v c_e}$$

I.B) Équation d'évolution de la température en régime variable

I.B.1) On cherche le coefficient de diffusion sous la forme

$$D = \text{cte} \lambda^\alpha c_p^\beta \rho^\gamma$$

avec

$$\begin{cases} [D] &= L^2 T^{-1} \\ [\lambda] &= \frac{ML^2 T^{-2}}{T} \theta^{-1} L^{-1} = ML T^{-3} \theta^{-1} \\ [c_p] &= ML^2 T^{-2} M^{-1} \theta^{-1} = L^2 T^{-2} \theta^{-1} \\ [\rho] &= ML^{-3} \end{cases}$$

ce qui donne

$$L^2 T^{-1} = (ML T^{-3} \theta^{-1})^\alpha (L^2 T^{-2} \theta^{-1})^\beta (ML^{-3})^\gamma$$

ou encore

$$L^2 T^{-1} = M^{\alpha+\gamma} L^{\alpha+2\beta-3\gamma} T^{-3\alpha-2\beta} \theta^{-\alpha-\beta}$$

d'où le système suivant

$$\begin{cases} 0 &= \alpha + \gamma \\ 2 &= \alpha + 2\beta - 3\gamma \\ -1 &= -3\alpha - 2\beta \\ 0 &= -\alpha - \beta \end{cases}$$

On en déduit $\alpha = 1$ et $\beta = -1 = \gamma$, soit finalement

$$D = \text{cte} \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

On prendra $\text{cte} = 1$ par la suite.

I.B.2) En se plaçant dans l'approximation des régimes quasi stationnaires pour permettre l'utilisation de la résistance thermique, on retrouve facilement qu'en une dimension $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ et donc que

$$r_{th} = \frac{R_{th}}{L} = \frac{1}{\lambda S}$$

D'autre part, la capacité thermique s'écrit $C_{th} = \rho V c_p = \rho S L c_p$, on en déduit que

$$c_{th} = \frac{C_{th}}{L} = \rho c_p S$$

On constate alors que

$$r_{th} c_{th} = \frac{\rho c_p}{\lambda} \quad \text{ou encore} \quad D = \frac{1}{r_{th} c_{th}}$$

I.B.3) Le passage de l'équation de diffusion thermique, que l'on demande à la question d'après, sous forme d'ordres de grandeurs permet de relier un temps caractéristique de diffusion Δt et une distance caractéristique L sous la forme

$$\Delta t = \frac{L^2}{D} = \frac{0,5^2}{1,19 \cdot 10^{-4}} = 2,1 \cdot 10^3 \text{ s} = 35 \text{ min}$$

On en déduit que le régime transitoire n'est pas négligeable devant la durée caractéristique de variation de la température, donc que l'ARQS sera difficile à utiliser. D'autre part, cette relation confirme que la diffusion est un phénomène lent et que si l'on double la taille du système il faut multiplier par quatre la durée de la diffusion.

I.B.4) Le premier principe de la thermodynamique appliqué, entre t et $t + dt$ à une portion de barre comprise entre z et $z + dz$ s'écrit $d^2 U = \delta^2 W + \delta^2 Q = \delta^2 Q_e$.

La première loi de JOULE permet d'exprimer

$$d^2 U = dU(t + dt) - dU(t) = \rho c_p S dz (T(z, t + dt) - T(z, t)) = \rho c_p S dz \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

et la chaleur échangée à travers les parois de section S en z et en $z + dz$ s'obtient par

$$\delta^2 Q_e = \phi(z, t) dt - \phi(z + dz, t) = -\frac{\partial \phi}{\partial z} dz dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S dz dt$$

ce qui, avec la loi de FOURIER, donne

$$\rho c_p S dz \frac{\partial T}{\partial t} dt = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} S dz dt$$

c'est-à-dire finalement l'équation de diffusion thermique

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

I.B.5) L'équation précédente n'est pas invariante par le changement de variable t en $-t$, donc le phénomène de diffusion est **irréversible**.

I.C) Ondes thermiques

I.C.1) En supposant que l'amplitude de $\theta_m(z)$ décroît avec z , la courbe supérieure est celle de $T(z_1, t)$. On lit 14 graduations crête à crête donc pour $2\theta_m(z_1)$. Or 5 graduations correspondent à 2°C , donc

$$\theta_m(z_1) = 7 \times \frac{2}{5} = 2,8^\circ\text{C}$$

De même, on lit 7 graduations pour $2\theta_m(z_2)$, donc $\theta_m(z_2) = 1,4^\circ\text{C}$.

La courbe du bas atteint son max après celle du haut, donc $T(z_2, t)$ est en retard par rapport à $T(z_1, t)$ et $\varphi(z_2) - \varphi(z_1) < 0$. On mesure un décalage de 2 carreaux entre les passages par l'axe des abscisses des deux courbes et deux périodes prennent 40 carreaux. On en déduit que

$$\varphi(z_2) - \varphi(z_1) = -\frac{2\pi\Delta t}{T} = -\frac{2\pi \times 2}{20} = -0,62 \text{ rad}$$

I.C.2) La puissance absorbée par la résistance s'écrit

$$p(t) = \frac{U^2(t)}{R_{ch}} = \frac{2U_0^2}{R_{ch}} \cos^2(\Omega t) = \frac{U_0^2}{R_{ch}} (1 + \cos(2\Omega t))$$

Elle est donc bien de la forme demandée en posant $P_0 = \frac{U_0^2}{R_{ch}}$ et $\omega = 2\Omega$.

On en déduit la fréquence du générateur $f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\omega}{4\pi}$. Or, 5 carreaux correspondent à 100 s et une période fait 20 carreaux, d'où

$$f = \frac{1}{2T} = \frac{1}{400} = 1,25 \text{ mHz}$$

I.C.3) $T_p(z)$ est la solution en régime permanent étudiée au I.A et vérifie donc $\frac{d^2 T_p}{dz^2} = 0$. Puisque $T(z, t)$ vérifie l'équation de diffusion alors il en sera de même pour $\theta(z, t) = T(z, t) - T_p(z)$, par linéarité :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

en remplaçant θ par son expression complexe $\underline{\theta} = A \exp(\omega t - \underline{K}z)$ on obtient alors la relation de dispersion

$$j\omega = -D\underline{K}^2 \text{ ou encore } \underline{K}^2 = -j\frac{\omega}{D} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{D}$$

En passant à la racine on en déduit

$$\underline{K} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{1-j}{2} = \epsilon \frac{1-j}{\delta}$$

avec

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c_p \omega}} = \sqrt{\frac{2}{r_{th} c_{th} \omega}}$$

I.C.4) Compte tenu de la relation de dispersion précédente, on peut écrire

$$\underline{\theta} = A \exp\left(j\left(\omega t - \epsilon \frac{1-j}{\delta} x\right)\right) = A \exp\left(-\frac{\epsilon}{\delta} z\right) \exp\left(j\omega t - j\frac{\epsilon}{\delta} z\right)$$

La barre étant semi infinie selon les z croissants, la température ne peut diverger donc $\epsilon = +1$. On en déduit

$$\underline{\theta} = A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(j\omega t - j\frac{z}{\delta}\right)$$

soit, en passant en réel,

$$\theta = A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) = \theta_m(z) \cos(\omega t + \varphi(z))$$

$$\text{avec } \theta_m(z) = A \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \text{ et } \varphi(z) = -\frac{z}{\delta}$$

Calculons

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,19 \cdot 10^{-4}}{2 \times 2\pi \times 1,25 \cdot 10^{-3}}} = 0,123 \text{ m}$$

On en déduit que $\exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) = 2 \cdot 10^{-2} \ll 1$, donc l'approximation est justifiée.

I.C.5) On peut utiliser tout d'abord utiliser les amplitudes pour déterminer δ

$$\frac{\theta_m(z_1)}{\theta_m(z_2)} = \frac{A \exp\left(-\frac{z_1}{\delta}\right)}{A \exp\left(-\frac{z_2}{\delta}\right)}$$

soit

$$\frac{z_2 - z_1}{\delta} = \ln\left(\frac{\theta_m(z_1)}{\theta_m(z_2)}\right)$$

ou encore

$$\delta = \frac{z_2 - z_1}{\ln\left(\frac{\theta_m(z_1)}{\theta_m(z_2)}\right)} = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{\ln\left(\frac{2,4}{1,4}\right)} = 0,116 \text{ m}$$

L'utilisation du déphasage est aussi possible

$$\varphi(z_2) - \varphi(z_1) = \frac{z_1 - z_2}{\delta}$$

qui donne

$$\delta = \frac{z_1 - z_2}{\varphi(z_2) - \varphi(z_1)} = \frac{-8 \cdot 10^{-2}}{-0,67} = 0,12 \text{ m}$$

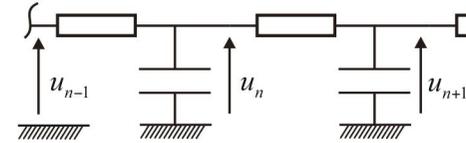
Ces mesures expérimentales sont en accord avec le calcul de la question précédente.

I.C.6) On est en présence d'une onde **plane** (plans $z = \text{cte}$), **progressive** à cause du terme en $\cos(\omega t - \frac{z}{\delta})$, **harmonique** (cos) et **amortie** exponentiellement puisque l'amplitude décroît en $\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$.

II Analogie électrocinétique et discrétisation

II.A) Chaînes de cellules RC en RSF

II.A.1) On applique la loi des nœuds sous forme de potentiel au niveau du n-ième condensateur



$$\frac{u_{n-1} - u_n}{R} = jC\omega u_n + \frac{u_n - u_{n+1}}{R}$$

ou encore

$$\frac{1}{R}(u_{n-1} + u_{n+1}) = \frac{2 + jRC\omega}{R} u_n$$

II.A.2) On remplace u_n par $k^n u_0$ dans la relation précédente

$$\frac{1}{R}(k^{n-1} + k^{n+1}) = \frac{2 + jRC\omega}{R} k^n$$

D'où l'équation du second degré

$$k^2 - (2 + jRC\omega)k + 1 = 0$$

II.A.3) Le discriminant s'écrit $\Delta = (2 + jRC\omega)^2 - 4 > 0$, donc les solutions sont de la forme

$$\begin{aligned} \underline{k} &= 1 + \frac{jRC\omega}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{jRC\omega}{2}\right)^2 - 1} \\ &= 1 + \frac{jRC\omega}{2} \pm \sqrt{jRC\omega - \frac{R^2C^2\omega^2}{4}} \\ &= 1 + \frac{jRC\omega}{2} \pm \sqrt{jRC\omega} \sqrt{1 + \frac{jRC\omega}{4}} \\ &\underset{DL_1}{\approx} 1 + \frac{jRC\omega}{2} \pm \sqrt{jRC\omega} \left(1 + \frac{jRC\omega}{8}\right) \end{aligned}$$

Le deuxième terme est un deuxième ordre en $\sqrt{RC\omega}$, le troisième un premier ordre et le quatrième un ordre trois. D'autre part,

$$\sqrt{j} = \sqrt{e^{-j\frac{\pi}{2}}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$$

En se limitant au premier ordre, on obtient donc bien

$$\boxed{k \approx 1 \pm (1+j)\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}}$$

II.A.4) La caractéristique complexe de \underline{k} traduit l'existence d'un **déphasage** entre la tension de sortie d'une cellule par rapport à la tension d'entrée.

$$\begin{aligned} |\underline{k}| &= \sqrt{\left(1 \pm \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right)^2 + \frac{RC\omega}{2}} \\ &= \sqrt{1 \pm 2\sqrt{\frac{RC\omega}{2}} + RC\omega} \\ &\underset{DL_1}{\approx} 1 \pm \sqrt{\frac{RC\omega}{2}} \end{aligned}$$

Les dipôles R et C étant passifs, la tension ne peut que diminuer avec n donc $|\underline{k}| < 1$, ce qui implique que l'on doit choisir le signe -

$$\boxed{|\underline{k}| \approx 1 - \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}}$$

II.B) Choix du nombre de cellules

II.B.1) Par définition de \underline{k}

$$\begin{aligned} U_n &= |\underline{k}|^n U_0 \\ &= \left(1 - \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right)^n U_0 \\ &\underset{DL_1}{\approx} \left(1 - n\sqrt{\frac{RC\omega}{2}}\right) U_0 \\ &\approx \exp\left(-\frac{n}{\sqrt{\frac{2}{RC\omega}}}\right) U_0 \\ &\approx \exp\left(-\frac{n}{n_0}\right) U_0 \end{aligned}$$

en posant $n_0 = \sqrt{\frac{2}{RC\omega}}$.

II.B.2) Puisque $\exp(-2) = 0,13$ et $\exp(-3) = 5 \cdot 10^{-3}$, on peut supposer la chaîne infinie pour $n \approx 3n_0$.

II.C) Validation expérimentale

II.C.1) Si $n_{0\text{exp}} = Af^s$ alors $\ln n_{0\text{exp}} = \ln A + s \ln f$ et donc le tracé de $\ln n_{0\text{exp}}$ en fonction de $\ln f$ doit être une droite.

$\ln f$	5,30	5,86	6,21	6,48
$\ln n_{0\text{exp}}$	1,4	1,1	0,92	0,79

On trouve une droite de pente $s = -0,5$, ce qui donne pour relation

$$\boxed{n_{0\text{exp}} = \frac{\text{cte}}{\sqrt{\omega}}}, \text{ en accord avec le II.B.1.}$$

II.C.2) On déduit de la relation $n_0 = \sqrt{\frac{2}{RC\omega}}$ que

$$\boxed{C = \frac{2}{2n_0^2 R \pi f} = \frac{2}{2 \times 4,02^2 \times 1,0 \cdot 10^3 \times \pi \times 200} = 0,1 \mu\text{F}}$$

II.D) Discrétisation

II.D.1) En passant aux réels dans la relation du II.A.1 on obtient

$$\frac{1}{R}(u_{n-1} + u_{n+1}) = \frac{2u_n}{R} + C \frac{\partial u_n}{\partial t}$$

L'approximation des milieux continus permet de faire les développements de TAYLOR à l'ordre deux suivants

$$\begin{cases} u_{n+1}(t) = u(na + a, t) = u(na, t) + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \\ u_{n-1}(t) = u(na - a, t) = u(na, t) - a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \end{cases}$$

On en déduit

$$C \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{R} \times 2 \times \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

C'est-à-dire bien l'équation de diffusion demandée en posant $rc = \frac{RC}{a^2}$. En passant aux dimensions dans l'équation on obtient

$$\frac{[u]}{T} = \frac{1}{[rc]} \frac{[u]}{L^2}$$

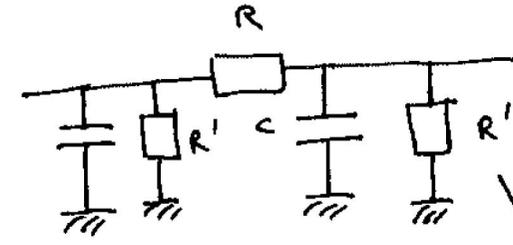
soit $[rc] = L^{-2}T$, donc l'unité de rc est $m^{-2} \cdot s$.

II.D.2) L'analogie est la suivante

Thermique	$T(x, t) - T_0$	$\frac{\Delta T}{R_{th}}$	$r_{th}c_{th}$	ρc_p	R_{th}	δ
Électrocinétique	$u(x, t) - u_0$	$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{R}$	rc		R	δ

II.D.3)

II.D.4) Les fuites thermiques pourraient être modélisées électriquement par un courant de fuite donc par **une résistance de fuite R' en parallèle du condensateur C** .



III Étude d'un détecteur pyroélectrique

III.A) Courant en régime variable

Le courant de polarisation selon l'axe (Ox) est donné par $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ donc l'intensité du courant s'écrit

$$i = \iint \vec{j}_p \cdot \vec{dS} = \frac{\partial P_x}{\partial t} S = p \frac{\partial T}{\partial t} S$$

III.B) Évolution de la température en régime forcé

III.B.1) Pour que la température soit uniforme dans le film cristallin il faut que la taille du film soit petite devant la distance caractéristique de diffusion (ou l'épaisseur de peau δ de la question I.C.3). On veut donc

$$e \ll \sqrt{D\tau} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c_p f}}$$

L'énoncé donne la capacité thermique $C_T = \rho c_p V$ avec $V = Se$ le volume du film, d'où

$$e \ll \sqrt{\frac{\lambda Se}{C_T f}} = \sqrt{\frac{100 \times 4 \cdot 10^{-6} \times 25 \cdot 10^{-6}}{3,1 \cdot 10^{-4} \times 1}} = 6 \text{ mm}$$

Cette condition est bien vérifiée ici puisque $e = 25 \mu\text{m}$.

III.B.2) R_T est en $K \cdot W^{-1}$ donc on peut écrire

$$P_{th} = \frac{T(t) - T_1}{R_T}$$

III.B.3) On applique un premier principe entre t et $t + dt$ au film

$$C_T dT = dU = \delta Q = \phi_l(t) dt - P_{th} dt$$

puisqu'il reçoit un flux lumineux du laser et qu'il cède de la puissance au support. On en déduit

$$C_T \frac{dT}{dt} = \phi_0 + \phi_m \cos \omega t - \frac{T(t) - T_1}{R_T}$$

ou encore

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T(t) - T_1}{C_T R_T} = \frac{\phi_0}{C_T} + \frac{\phi_m}{C_T} \cos \omega t$$

c'est-à-dire bien la forme voulue en posant $\tau_T = C_T R_T$, $A = \frac{\phi_0}{C_T}$ et

$$B = \frac{\phi_m}{C_T}$$

III.B.4) Lorsque le flux n'est pas modulé $T = T_0$ donc l'équation se simplifie en

$$\frac{T_0 - T_1}{C_T R_T} = \frac{\phi_0}{C_T} \text{ soit } T_0 = T_1 + R_T \phi_0$$

III.B.5) En remplaçant θ par son expression on obtient

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\tau_T} \theta = \frac{\phi_m}{C_T} \cos \omega t$$

ce qui donne en représentation complexe

$$j\omega \underline{\theta} + \frac{1}{R_T C_T} \underline{\theta} = \frac{\phi_m}{C_T} \text{ ou encore } \underline{\theta} = \frac{R_T \phi_m}{1 + j\omega \tau_T}$$

III.B.6) L'amplitude est donné par le module

$$\theta_m = \frac{R_T \phi_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

ou encore

$$\theta_m = \frac{512 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 + (2\pi \times 1 \times 512 \times 3,1 \cdot 10^{-4})^2}} = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ °C}$$

Le déphasage se déduit de l'argument

$$\varphi = -\arg(1 + j\omega\tau) = -\arctan(\omega\tau)$$

c'est-à-dire

$$\varphi = -\arctan(2\pi \times 512 \times 3,1 \times 10^{-4}) = -1 \text{ rad} = -45^\circ$$

puisque $\cos \phi > 0$ et $\sin \phi < 0$.

III.C) Conversion pyroélectrique

III.C.1) En passant en complexe la relation du III.A on obtient

$$\underline{i} = Spj\omega \underline{\theta} = Spj\omega \frac{R_T \phi_m}{1 + j\omega \tau_T}$$

III.C.2) L'amplitude des oscillations de courant vaut donc

$$|i| = Sp\omega \frac{R_T \phi_m}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

ou encore

$$|i| = 4 \cdot 10^{-6} \times 17 \cdot 10^{-5} \times 2\pi \times 1 \times 0,36 \cdot 10^{-3} = 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ A}$$

C'est très faible par rapport aux courants usuels et donc semble compliqué à mesurer.

III.D) Conversion courant-tension

III.D.1) Le montage de sortie est un suiveur à ALI, sa présence est nécessaire si l'on désire obtenir un générateur de tension idéal, c'est-à-dire fournissant une tension $u(t)$ indépendante de ce qui se passe en amont de l'ALI.

Les ALI utilisés en TP ont une résistance d'entrée différentielle de $1 \text{ M}\Omega$ insuffisante par rapport à $R_e = 24 \cdot 10^9 \Omega$, ce qui aurait pour conséquence une chute de tension entre le nœud d'entrée et la sortie.

III.D.2) l'ALI étant supposé idéal et en régime linéaire (puisque bouclé par la borne -), la loi des nœuds à l'entrée donne

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R_e} + \underline{u}jC_e\omega \text{ soit } \boxed{\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{R_e}{1 + jR_eC_e\omega}}$$

III.D.3) Le rapport demandé s'écrit

$$\frac{\underline{u}}{\phi_a} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} \frac{\underline{i}}{\phi_a} = \frac{R_e}{1 + jR_eC_e\omega} \frac{SpR_Tj\omega}{1 + j\omega\tau_T}$$

On en déduit

$$\boxed{u_m = \frac{R_e Sp R_T \omega}{\sqrt{[1 + (R_e C_e \omega)^2][1 + (\tau_T \omega)^2]}}}$$

III.E) Fonction de transfert

III.E.1) La fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\phi_a} = \frac{R_e Sp}{C_T} \frac{j\omega\tau_T}{1 + j(\tau_e\omega + \tau_T\omega) - \omega^2\tau_e\tau_T}$$

c'est-à-dire bien ce qui est demandé

$$\boxed{\underline{H} = \frac{R_e Sp}{C_T} \frac{\tau_T}{\tau_T + \tau_e} \frac{1}{j\omega(\tau_e + \tau_T) + 1 + \frac{j\omega\tau_T\tau_e}{\tau_e + \tau_T}}}$$

III.E.2) H tend vers 0 en haute et basse fréquences donc le filtre est un **passé bande**, ce qui est en accord avec la figure 6.

III.E.3) Par identification

$$\boxed{H_m = \frac{R_e p S \tau_T}{C_T (\tau_T + \tau_e)}}$$

mais aussi

$$\frac{Q}{f_0} = \frac{2\pi\tau_e\tau_T}{\tau_T + \tau_e} \text{ et } Qf_0 = \frac{1}{2\pi(\tau_e + \tau_T)}$$

on en déduit

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_e\tau_T}}} \text{ et } \boxed{Q = \frac{\sqrt{\tau_e\tau_T}}{\tau_e + \tau_T}}$$

III.E.4.a) $\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\phi_a}$ est en $\boxed{V \cdot W^{-1}}$. La réponse max est pour $\boxed{f = f_0 = 0,3 \text{ Hz}}$ et l'amplitude max vaut $\boxed{U_m = 5000F_1 = 5000 \cdot 10^{-6} = 5 \text{ mV}}$ par lecture du diagramme et de sa légende.

III.E.4.b) Le facteur de qualité est donné par $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$ où Δf est la largeur de la bande passante et les deux fréquences de coupure sont telles que

$$H(f_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{5000}{\sqrt{2}} = 3500$$

ce qui donne $\boxed{Q_{\text{exp}} = \frac{0,3}{0,8 - 0,15} = 0,5}$

III.E.4.c) On calcule la valeur théorique du facteur de qualité

$$Q_{\text{th}} = \frac{\sqrt{\tau_e\tau_T}}{\tau_e + \tau_T} = \frac{\sqrt{1,49 \times 0,159}}{1,49 + 0,159} = 0,3$$

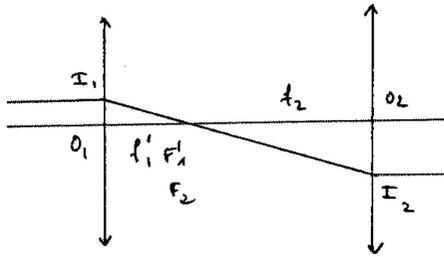
Ce qui est bien du même ordre de grandeur.

IV Interférences d'ondes thermiques

IV.A) Élargissement laser

IV.A.1) On noircit la face avant du film afin de réaliser un corps noir et donc d'**absorber** tout le rayonnement lumineux plutôt que de le réfléchir. Cela permet alors de l'échauffer le plus possible.

IV.A.2) On réalise un système afocal $\infty \rightarrow F'_1 = F_2 \rightarrow \infty$.



Le théorème de THALÈS donne

$$\frac{f'_2}{f'_1} = \frac{O_2I_2}{O_1I_1} = \alpha = 5$$

avec $f'_1 + f'_2 = D = 12 \text{ cm}$, d'où

$$\boxed{f'_1 = \frac{D}{1 + \alpha} = 2 \text{ cm}} \quad \text{et} \quad \boxed{f_2 = \frac{\alpha D}{1 + \alpha} = 10 \text{ cm}}$$

IV.B) Réflexion

IV.B.1) La continuité de la température à l'interface s'écrit

$$\boxed{\theta_i(0, t) + \theta_r(0, t) = \theta_t(0, t)}$$

IV.B.2) La continuité du flux thermique à l'interface s'écrit, avec la loi de FOURIER

$$\boxed{\lambda_1 \left[\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right)_{z=0} + \left(\frac{\partial \theta_r}{\partial z} \right)_{z=0} \right] = \lambda_2 \left(\frac{\partial \theta_t}{\partial z} \right)_{z=0}}$$

IV.B.3) L'onde incidente a la forme trouvée en I.C.4. L'onde transmise se propage dans le sens des z croissants et dans le milieu 2, alors que l'onde réfléchie se propage dans le sens des z décroissants et dans le milieu 1.

Le terme en $\exp(+z/\delta_1)$ pour l'onde réfléchie traduit bien une décroissance de l'amplitude quand z est négatif et tend vers $-\infty$.

Enfin, φ_r et φ_t traduisent l'existence d'un éventuel déphasage par rapport à l'onde incidente.

IV.B.4) L'équation de diffusion étant **linéaire**, la notation complexe est adaptée.

IV.B.5) En remplaçant les expressions complexes dans les équations de continuité du IV.B.1 et IV.B.2, on obtient

$$\begin{cases} \boxed{A_i + A_r = A_t} \\ \lambda_1 j k_1 (A_i - A_r) = \lambda_2 A_t j k_2 \end{cases}$$

Sachant que $k_i = \frac{1}{\delta_i}(1 - j)$, on peut aussi écrire la deuxième relation sous la forme $\boxed{\lambda_1 \delta_2 (A_i - A_r) = \lambda_2 \delta_1 A_t}$.

IV.B.6) Ces deux relations se réécrivent

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ \lambda_1 \delta_2 (1 - r) = \lambda_2 \delta_1 t \end{cases}$$

soit

$$\boxed{r = \frac{\lambda_1 \delta_2 - \lambda_2 \delta_1}{\lambda_1 \delta_2 + \lambda_2 \delta_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{t = \frac{2 \lambda_1 \delta_2}{\lambda_1 \delta_2 + \lambda_2 \delta_1}}$$

Or,

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c_p \omega}} \quad \text{donc} \quad \frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{2}{\omega}}$$

d'où

$$\boxed{r = \frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{t = \frac{2e_1}{e_1 + e_2}}$$

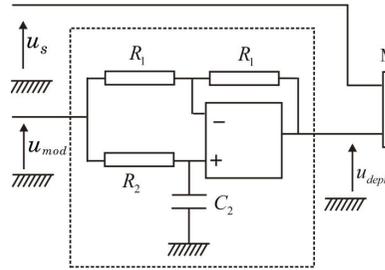
IV.B.7) Nous avons deux cas limites

- $e_1 \ll e_2$, ce qui donne $r \approx -1$ et $t \approx 0$;
- $e_1 \gg e_2$, ce qui donne $r \approx 1$ et $t \approx 0$.

Dans les deux cas l'onde est entièrement réfléchie, ce qui est normal puisque les deux milieux ont des caractéristiques (effusivités) très différentes.

IV.C) Traitement de la réponse du détecteur

IV.C.1) L'ALI étant idéal et supposé en régime linéaire $u_+ = u_-$.



La loi des nœuds sous forme de potentiel s'écrit aux entrées inverseuse et non inverseuse

$$\frac{u_{\text{mod}} - u_+}{R_1} = \frac{u_+ - u_{\text{deph}}}{R_1} \quad \text{et} \quad \frac{u_{\text{mod}} - u_+}{R_2} = jC_2\omega(u_+ - 0)$$

ou encore

$$2u_+ = u_{\text{mod}} + u_{\text{deph}} \quad \text{et} \quad u_{\text{mod}} = u_+(1 + jR_2C_2\omega)$$

on en déduit

$$u_{\text{deph}} = u_{\text{mod}} \frac{1 - jR_2C_2\omega}{1 + jR_2C_2\omega}$$

Ce montage est bien un déphaseur pur puisque

$$\left| \frac{u_{\text{deph}}}{u_{\text{mod}}} \right| = \left| \frac{1 - jR_2C_2\omega}{1 + jR_2C_2\omega} \right| = 1$$

et si $R_2C_2\omega = 1$ alors

$$\frac{u_{\text{deph}}}{u_{\text{mod}}} = \frac{1 - j}{1 + j} = \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right)$$

c'est-à-dire que les deux signaux sont en quadrature de phase.

IV.C.2) En sortie du multiplieur la tension s'écrit

$$u_{\text{mult}} = k'u_s u_{\text{deph}} = k'(f \cos \omega t + g \sin \omega t) U_{\text{mod}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

soit

$$u_{\text{mult}} = k'(f \cos \omega t + g \sin \omega t) U_{\text{mod}} \sin \omega t$$

ou encore, en passant aux valeurs moyennes

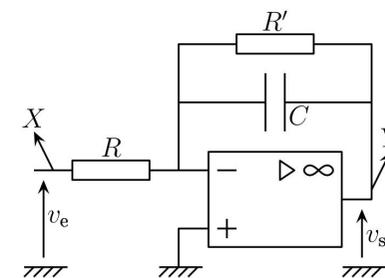
$$\langle u_{\text{mult}} \rangle = \frac{k'}{2} g U_{\text{mod}} = \text{Cte} \times g(\ell, \omega)$$

IV.C.3) On peut réécrire

$$u_{\text{mult}} = k' U_{\text{mod}} \left(\frac{f}{2} \sin 2\omega t + \frac{g}{2} (1 - \cos 2\omega t) \right)$$

Il faut donc éliminer les pulsations 2ω avec le filtre si l'on ne veut garder que la valeur moyenne proportionnelle à g . On prendra donc un passe bas de fréquence de coupure très petite devant 10 Hz.

On peut penser au circuit suivant (ou, mieux, à un ordre 2)



pour lequel $H' = -\frac{R'}{R} \frac{1}{1 + jR'C\omega}$

La condition $\omega_c = \frac{1}{R'C} \ll \omega = 2\pi f \approx 60 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ peut s'obtenir avec $R = 1 \cdot 10^4 \Omega$, $R' = 1 \cdot 10^6 \Omega$ et $C = 1 \mu\text{F}$.

IV.D) Balayage en fréquence

IV.D.1) On remarque que

$$\frac{f_2}{f_1} = 4, \frac{f_3}{f_1} = 9 \text{ et } \frac{f_4}{f_1} = 16$$

et donc que $f_n = n^2 f_1$

IV.D.2) L'onde s'écrit en $\cos(\omega t - \frac{z}{\delta}) = \cos(\omega t - \frac{2\pi z}{\Lambda})$ en posant pour la longueur d'onde

$$\Lambda_{\text{ther},n} = 2\pi\delta_n = 2\pi\sqrt{\frac{2D}{\omega_n}} = 2\pi\sqrt{\frac{2D}{n^2\omega_1}} = \frac{\Lambda_{\text{ther},1}}{n}$$

IV.D.3) On pourrait penser à la résonance d'une onde stationnaire lorsqu'on l'excite à la pulsation d'un de ses modes propres, même si ceux-ci ne croissent pas habituellement avec n^2 mais avec n . C'est le cas de la corde de MELDE ou des ondes acoustiques dans les instruments de musique à vent.

IV.D.4) On peut tracer $\ln \Lambda_{\text{ther},n}$ en fonction de $\ln n$. L'ordonnée à l'origine sera $\ln \Lambda_{\text{ther},1}$, ce qui permettra de remonter au coefficient de diffusion D .