Correction du TD n°7 : OG

Exercice 7 : Approche ondulatoire de la lentille mince (Centrale)

1) Le chemin optique mesuré dans l'air entre le point A et le point M vaut :

$$(AM) = AM = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_A)^2} = |z - z_A| \sqrt{1 + \frac{r^2}{(z - z_A)^2}}$$

en factorisant le terme dominant. En limitant les calculs à l'ordre deux en $r/|z - z_A|$, il vient :

$$(AM) = |z - z_A| \left(1 + \frac{r^2}{2\,(z - z_A)^2}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{(AM) = |z - z_A| + \frac{r^2}{2\,|z - z_A|}}$$

D'où un retard de phase :

$$\phi(r, z) = \frac{2\pi\,(AM)}{\lambda} \frac{2\pi}{\lambda} \left(|z - z_A| + \frac{r^2}{2\,|z - z_A|}\right)$$

On obtient alors la variation de retard de phase lorsqu'on s'éloigne de l'axe optique en soustrayant la valeur du retard pour $r = 0$ soit :

$$\boxed{\Delta\phi(r, z) = \frac{\pi\, r^2}{\lambda\,|z - z_A|}}$$

et on remarque que ce décalage de retard de phase contient toute l'information sur la cote z_A du point d'émission de l'onde.

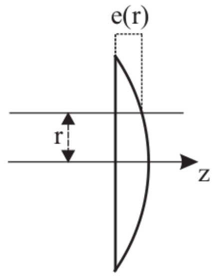
2) Une sphère est définie par l'équation :

$$\|\overrightarrow{CM}\|^2 = R^2 \quad \text{soit} \quad x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2 \quad \text{puis} \quad r^2 + z^2 - 2\,z\,R + R^2 = R^2$$

et $r^2 + z^2 - 2\,z\,R = 0$, en prenant l'origine en son sommet S. Avec $|z| \ll R$ on peut négliger le terme en z^2 d'ordre deux devant le terme en $R\,z$ d'ordre un. Ainsi :

$$r^2 = 2\,z\,R \quad \text{et} \quad z = \frac{r^2}{2R} \quad \text{soit} \quad \boxed{\varepsilon = \frac{r^2}{2R}} \quad \text{en remarquant que} \quad z = \varepsilon$$

3.a) On voit sur la figure ci-contre que la lentille en tant que lame de phase remplace une épaisseur $e(r)$ d'air par une épaisseur $e(r)$ de verre d'indice n, ce qui conduit à un retard de phase :



$$\psi(r) = \frac{2\pi\,(n-1)\,e(r)}{\lambda}$$

En remarquant que $e(r = 0) - e(r) = e - e(r)$ est l'écart $\varepsilon(r)$ entre une sphère et son plan tangent, nous obtenons le résultat attendu en utilisant le résultat de la question **1)** :

$$e(r) = e - \frac{r^2}{2R} \quad \text{puis} \quad \psi(r) = \frac{2\pi\,(n-1)\,e}{\lambda} - \frac{2\pi\,(n-1)\,r^2}{2\,R\,\lambda} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta\psi(r) = -\frac{\pi\,(n-1)\,r^2}{R\,\lambda}}$$

3.b) En prenant en compte l'effet de la propagation du point-source A jusqu'à la lentille calculé en **2)** avec $z_A < 0$ donc $|z_A| = -z_A$ et l'effet de la lentille en tant que lame de phase calculé en **3.a)**, nous obtenons juste à la sortie de la lentille dans le plan de son sommet un retard de phase total :

$$\phi_t(r, z = 0_+) = \phi(r, z = 0_-) + \psi(r)$$

et donc

$$\Delta\phi_t(r, z = 0_+) = \Delta\phi(r, z = 0_-) + \psi(r) - \psi(r = 0)$$

En exploitant les relations établies en **1)** et **3.a)**, il vient alors :

$$\Delta\phi_t(r, z = 0_+) = -\frac{\pi\, r^2}{\lambda\, z_A} - \frac{\pi\,(n-1)\,r^2}{R\,\lambda} = -\frac{\pi\, r^2}{\lambda}\left(\frac{1}{z_A} + \frac{(n-1)}{R}\right)$$

de telle sorte que $\Delta\phi_t(r, z = 0_+)$ a bien la forme attendue avec :

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{z_A} + \frac{(n-1)}{R}}$$

3.c) Pour une onde sphérique émise par un point A' de cote $z_{A'}$, le retard de phase mesuré dans le plan de front $z = 0_+$ du sommet de la lentille vaudrait d'après la question **2** en remarquant que $z_{A'} > 0$:

$$\Delta\phi_t(r, z = 0) = \frac{\pi\, r^2}{\lambda\, z_{A'}}$$

Cette expression s'identifie à celle obtenue en **3.b** si :

$$\frac{1}{z_{A'}} = \alpha = \frac{1}{z_A} + \frac{(n-1)}{R} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{1}{z_{A'}} - \frac{1}{z_A} = \frac{1}{f'}} \quad \text{avec} \quad \boxed{f' = \frac{R}{n-1}}$$

de telle sorte que nous retrouvons *la relation de conjugaison* des lentilles minces avec origine au centre optique. De plus f' est infinie si R est infini (dioptre plan) ou si $n = 1$ (pas de lentille) ce qui constitue un bon test de pertinence car dans ce cas le foyer image est à l'infini.