TD n°10 : Cinématique et équations locales de la méca flu

Exercice 1 : Ondes de gravité à la surface de l'eau

Un vibreur impose une oscillation sinusoïdale de période T et de très faible amplitude à la surface d'un bassin de grandes dimensions et à fond plat. On adopte le modèle de l'écoulement incompressible et irrotationnel, associé à un potentiel des vitesses de la forme :

$$\varphi = f(z)\cos(\omega t - kx)$$

dont la dépendance en x et t à z fixé décrit une onde progressive de vitesse $c = \omega/k$ et de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ se déplaçant dans la direction $\overrightarrow{u_x}$.

1) Établir l'équation différentielle dont est solution $f(z)$.

2) Écrire la condition aux limites au fond du récipient et en déduire $f(z)$ à une constante multiplicative près.

3) En déduire les composantes v_x et v_z du champ eulérien des vitesses.

4) Montrer que le champ des vitesses est stationnaire dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{U} = (\omega/k)\,\overrightarrow{u_x}$.

Exercice 2 : Plaque qui oscille dans un fluide visqueux

On considère, dans un récipient rempli d'un liquide de masse volumique μ et de viscosité η, un plateau vibrant de surface S et de cote $z = 0$. Ce plateau oscille **horizontalement** avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}(t) = v_{0m}\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$.

Il est suffisamment large pour pouvoir négliger les effets de bords et on admet, qu'en régime permanent, le liquide au dessus du plateau oscille avec une vitesse

$$\overrightarrow{v}(z,t) = v_m(z)\cos(\omega t + \varphi(z))\overrightarrow{u_x}$$

On suppose également que le niveau supérieur du liquide est largement au dessus du plateau et que la pression est indépendante de x.

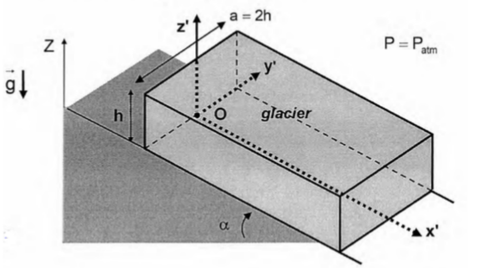
1) Commenter la forme recherchée pour $\overrightarrow{v}(z,t)$.

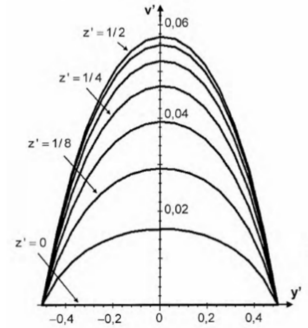
2) Déterminer $v(z,t)$.

3) Définir une profondeur de pénétration des vibrations, et préciser la dernière hypothèse.

Exercice 3 : Écoulement d'un glacier (CCP)

On étudie le mouvement d'un glacier en le modélisant par un écoulement très visqueux dans un canal de largeur a incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On néglige les forces de cisaillement à l'interface glace/air, située en $z = h$.





1) Que dire du nombre de REYNOLDS ? Déterminer la direction du champ des vitesse et les variables dont il dépend.

2) Déterminer le champ de pression à l'aide de l'équation de NAVIER-STOKES. En déduire qu'en régime permanent la vitesse vérifie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\eta}$$

3) On pose $y = y'a$ et $z = z'a$. Quelles sont les dimensions de y', z' et $\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}$? Transformer l'équation différentielle précédente en introduisant une vitesse caractéristique v_0 et en posant $v = v_0 v'$, de façon à obtenir une équation différentielle adimensionnée en $v'(y', z')$, pouvant s'écrire

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} = -1$$

Expliciter v_0.

4) Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par v' ? Le graphe des solutions donné ci-dessus est-il en accord avec celles-ci ?

5) Une rangée de pierres est alignée parallèlement à (Oy), comment évolue-t-elle dans le temps ? On observe que la vitesse maximale est de 110 m/an. Donner une estimation de η sachant que $\alpha = 15°$ et $a = 2h = 800$ m.

Exercice 4 : Récupération d'un coffre

Un coffre de masse $m = 30$ kg et de volume $V_A = 15$ L repose au fond de la mer à une profondeur $h = 30$ m. Pour la remonter à la surface on remplit d'air un ballon souple sous un volume V_M à la surface de l'eau où règne la pression atmosphérique $p_0 = 1{,}0$ bar, on descend le ballon au fond de l'eau, on l'attache au coffre et on

abandonne le tout. Déterminer la valeur minimale de V_M. On supposera le ballon en équilibre thermique avec l'eau, où on prendra un champ de température uniforme.
NB : L'évaluation d'une "résolution de problème" porte sur la mise en place d'une "stratégie de résolution", sur l'obtention d'une valeur explicite de V_M et sur la validation de cette solution.

Exercice 5 : Stabilité de l'atmosphère (X-ESPCI)

On envisage un modèle d'atmosphère en équilibre où le gradient thermique est constant et négatif : on pose $dT/dz = -a$ avec $a > 0$. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ et de rapport $\gamma = c_p/c_V = 1{,}4$. Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$ est uniforme avec $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. En $z = 0$, on note p_0 la pression et T_0 la température. On rappelle la valeur $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ de la constante des gaz parfaits.

1) Montrer que le champ de pression est tel que :

$$\frac{p(z)}{p_e} = \left(\frac{T(z)}{T_e}\right)^{\beta} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{Mg}{aR} \quad ; \quad p_e = p(z_e) \quad \text{et} \quad T_e = T(z_e)$$

2) On envisage une petite bulle d'air de masse m initialement située à la cote z_e, déplacée en $z > z_e$ et abandonnée sans vitesse initiale. On suppose que l'équilibre entre la pression moyenne au sein de la bulle et la pression extérieure est assuré à tout instant et que la bulle évolue de manière adiabatique et réversible. Exprimer la température T_{int} au sein de la bulle et la température extérieure T_{ext} en fonction de la pression $p(z)$, de la pression initiale $p_e = p(z_e)$, de la température initiale $T_e = T(z_e)$ et des coefficients β et γ. À quelle condition sur a la goutte revient-elle vers sa position d'équilibre ?

Exercice 6 : Centrifugeuse (X-ESPCI)

Un récipient cylindrique de hauteur h et de rayon R, en rotation uniforme autour de son axe Oz à vitesse angulaire ω constante contient N moles de diazote. Déterminer la répartition $n(r)$ à l'équilibre si le récipient est en équilibre avec un thermostat à la température T. Que se passe-t-il si on remplace le diazote par de l'air ?

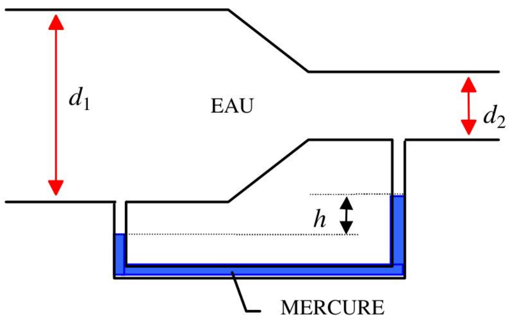
Exercice 7 : Nombre de FROUDE - Nombre de MACH

1) De l'eau s'écoule dans un canal de largeur $L(x)$ dont le fond plat est dans le plan $z = 0$; la surface libre de l'eau, de hauteur $h(x)$ est au contact de l'atmopshère à la pression p_0. L'écoulement est incompressible et homogène de masse volumique μ avec un champ des vitesses quasi-unidimensionnel $\overrightarrow{v} \approx v(x)\,\overrightarrow{u_x}$ et un champ de pression $p(x,z)$. Établir deux équations du problème. En déduire le signe de dh/dL en fonction du nombre de FROUDE $\mathcal{F}(x) = v(x)/\sqrt{g\,h(x)}$

2) Un gaz parfait s'écoule de manière isentropique et stationnaire dans une conduite cylindrique de section $S(x)$. L'écoulement est quasi-unidimensionnel décrit par le champ des vitesses $\overrightarrow{v} \approx v(x)\,\overrightarrow{u_x}$, le champ de pression $p(x)$ et le champ de masse volumique $\mu(x)$. Établir trois équations du problème. En déduire le signe de dv/dS en fonction du nombre de MACH $\mathcal{M}(x) = v(x)/c(x)$ où $c(x) = \sqrt{\gamma\, p(x)/\mu(x)}$ est la célérité du son. Vérifier que pour $\mathcal{M}^2 \ll 1$, le débit volumique se conserve avec une bonne approximation et commenter.

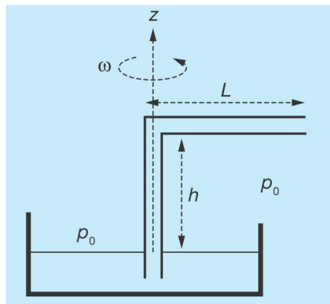
Exercice 8 : Débitmètre de Venturi

De l'eau parcourt de manière stationnaire une canalisation qui présente un étranglement. De part et d'autre, on a installé un manomètre à mercure. Lorsque le débit massique de l'eau est D, la dénivellation est h dans le manomètre.
Exprimer D en fonction de h, des masses volumiques μ_{H_2O} et μ_{Hg} et des diamètres d_1 et d_2 des sections à l'entrée et à la sortie.



Exercice 9 : Pompe à eau

Un tube coudé de section s de hauteur h et d'envergure L cylindrique plonge dans un réservoir d'eau de grande surface où l'eau est au repos, sa surface libre étant à la pression atmosphérique p_0. On fait tourner le tube à vitesse angulaire constante ω autour de Oz et on constate qu'un écoulement d'eau unidimensionnel se produit dans le tube. On suppose l'écoulement parfait, incompressible et homogène de masse volumique μ et le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$ uniforme.



1) Dans quel référentiel peut-on supposer l'écoulement stationnaire ? Montrer que le champ des vitesses possède dans ce référentiel la même norme v en tout point du tube.

2) Montrer que dans ce référentiel, la grandeur $p + \mu v^2/2 + \mu g z - \mu \omega^2 r^2/2$ se conserve le long du tube. Exprimer v en fonction de ω, R, g et L puis en déduire la valeur minimale de ω convenable.

3) On donne la pression de vapeur saturante de l'eau $p_{vs} = 2,4.10^3$ Pa. A quelle condition sur ω peut on éviter la formation de bulles ? En déduire que l'écoulement n'est possible que si $h < h_M$. Calculer h_M et la valeur maximale possible v_M pour v lorsque $h = h_M/2$.

Réponses

Exercice 1 : Ondes de gravité à la surface de l'eau

1) $\Delta\varphi = 0 \Longrightarrow \dfrac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0$.
2) $\varphi = 2A\mathrm{ch}(kz)\cos(\omega t - kx)$.
3) $v_x = 2kA\mathrm{ch}(kz)\sin(\omega t - kx)$ et $v_z = 2kA\mathrm{sh}(kz)\cos(\omega t - kx)$.
4) Transformation de GALILÉE : $z' = z$ et $x' = x - Ut$

Exercice 2 : Plaque qui oscille dans un fluide visqueux

2) Résolution d'une équation de diffusion : $v(z,t) = v_0 \exp\left(-\dfrac{\alpha z}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\omega t - \dfrac{\alpha z}{\sqrt{2}}\right)$, avec $\alpha = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\eta}}$. **3)** $\delta = \sqrt{\dfrac{2\eta}{\omega\mu}}$.

Exercice 3 : Écoulement d'un glacier

2) $p(z) = p_0 + \rho g \cos\alpha(h - z)$.
3) $v_0 = \dfrac{\rho g \sin\alpha a^2}{\eta}$.
4) $v(y,0) = 0$, $v(\pm h, z) = 0$ et $\eta\dfrac{dv}{dz}(z = h) = 0$.
5) $\eta = 2{,}7 \cdot 10^{13}\ \mathrm{Pa\cdot s}$.

Exercice 4 : Récupération d'un coffre

Stratégie de résolution : la poussée d'ARCHIMEDE au fond doit dominer les poids ; il faut prendre en compte les variations du volume $V(z)$ du ballon due aux variations $p(z)$ de la pression ;
Mise en oeuvre : $p(z) = p_0 + \mu g h - \mu g z$; $V(z) = V_M\, p_0/(p_0 + \mu g h - \mu g z)$ via la loi des gaz parfaits à T fixée ; la condition de "démarrage" au fond s'écrit $\mu\, V_A\, g + \mu\, g\, p_0\, V_M/(p_0 + \mu g h) > m\, g$ soit $V_M > (m - \mu V_A)\,(p_0 + \mu g h)/\mu\, p_0 = 60$ L ; puis la situation est de plus en plus favorable quand le coffre remonte.
Validation : $V \approx 4\, V_A$ donc c'est faisable

Exercice 5 : Stabilité de l'atmosphère (X-ESPCI)

1) $dp/dz = -\mu\, g$; $T(z) = T_0 - a\, z$; $dp/p = -Mg\, dz/R\, T = -\beta\, dT/T$

2) $T_{\mathrm{int}} = T_e\,(p/p_e)^{(\gamma-1)/\gamma}$ et $T_{\mathrm{ext}} = T_e\,(p/p_e)^{1/\beta}$; l'équilibre est stable si le poids domine la poussée d'ARCHIMÈDE ; $T_{\mathrm{int}} < T_{\mathrm{ext}}$ soit $(\gamma - 1)/\gamma > 1/\beta$ puis $a < (\gamma - 1)\, Mg/\gamma\, R = 0{,}01\ \mathrm{K\cdot m^{-1}}$.

Exercice 6 : Centrifugeuse (X-ESPCI)

$n(r) = A\exp(r^2/a^2)$ avec $a = \sqrt{2k_B T/m\omega^2}$; $N = \pi\, h\, a^2\, A\,(\exp(R^2/a^2) - 1) = \pi\, h\, a^2\, n_0$; l'air est plus riche en dioxygène en $r = R$ et en diazote en $r = 0$;

Exercice 7 : Nombre de FROUDE - Nombre de MACH

1) $v\, L\, h = D_v = cste$; $v^2(x)/2 + gh(x) = \mathrm{cste}$; $(1 - \mathcal{F}^2)\, dh/h = \mathcal{F}^2\, dL/L$
2) $p/\mu^\gamma = cste$; $\mu\, v\, S = D_m = \mathrm{cste}$; $\mu\, v\, dv/dx = -\,dp/dx$; $(\mathcal{M}^2 - 1)\, dv/v = dS/S$; écoulement quasi-incompressible si $\mathcal{M}^2 \ll 1$ (critère de MACH)

Exercice 8 : Débitmètre de Venturi

$$D^2 = \frac{\pi^2}{8}\frac{d_1^4 d_2^4}{d_1^4 - d_2^4}\mu_{H_2O}(\mu_{Hg} - \mu_{H_2O})gh$$

Exercice 9 : Pompe à eau

2) Généraliser BERNOULLI avec la force d'inertie d'entraînement, conservative. On obtient $v = \sqrt{\omega^2 L^2 - 2gh}$.
3) $p_{\min} = p_0 - \mu\omega^2 L^2/2 > p_{vs}$, soit $h_M = 10$ m et $v_M = 10\ \mathrm{m.s^{-1}}$.