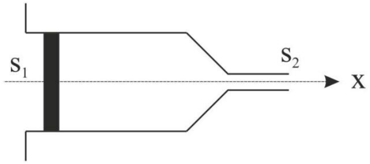
TD n°11 : Bilans en méca flu

Exercice 1 : Force sur une seringue

Une seringue contenant un liquide de masse volumique μ est constituée (figure ci-contre) d'un réservoir cylindrique de section s_1 dans lequel peut se déplacer un piston et d'un tube d'éjection de section $s_2 < s_1$ d'où le liquide sort à la pression atmosphérique p_0. Pour obtenir un débit volumique D_v constant et maintenir la seringue fixe, on exerce une force F_p sur le piston et une force F_r sur le réservoir.



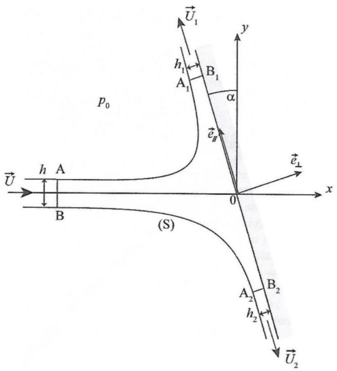
1) Exprimer les vitesses v_1 et v_2 du liquide respectivement dans le réservoir et dans la seringue en fonction de D_v, s_1 et s_2.

2) Exprimer F_p en fonction de μ, D_v, s_1 et s_2.

3) En faisant un bilan de quantité de mouvement sur un système bien choisi, exprimer $F_r + F_p$ en fonction de μ, D_v, s_1 et s_2. En déduire l'expression de F_r.

Exercice 2 : Jet sur un plan incliné (X-ESPCI)

Un jet d'eau est envoyé à vitesse constante U suivant l'axe horizontal (Ox) sur une plaque inclinée faisant un angle α avec la verticale (Oy). Le jet d'eau a une hauteur h (selon y) et une largeur $L \gg h$ (selon z). On suppose de plus que le régime permanent est établi et on négligera l'effet de la gravité.



1) Déterminer la force totale qui s'exerce sur la plaque.

2) Établir qualitativement le champ de pression le long de la plaque.

Exercice 3 : Jet-Pack (Centrale)

Un sportif peut se maintenir à une altitude $h = 10$ m constante au-dessus de l'océan à l'aide d'un "jet-pack" constitué d'une pompe de puissance $\mathcal{P}$ qui aspire l'eau de masse volumique $\mu = 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ via un tuyau vertical de section circulaire $S_i = 81\,\mathrm{cm^2}$ et l'éjecte vers le bas via deux tuyaux verticaux de section circulaire $S_f = 26\,\mathrm{cm^2}$ symétriques. La masse totale du sportif et de son équipement est $m = 100$ kg.

1) Exprimer la vitesse v_i de l'eau à l'entrée en fonction de sa valeur v_f à la sortie et des surfaces S_i et S_f. Calculer la vitesse v_f.

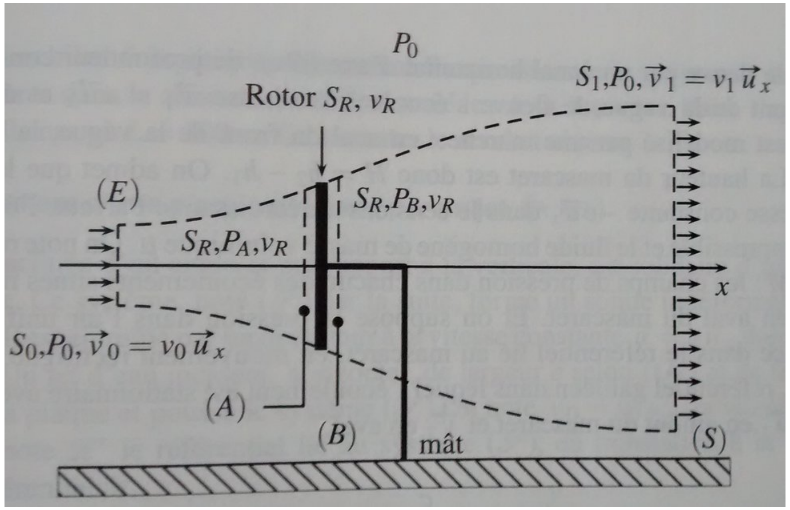
2) Calculer la puissance $\mathcal{P}$ de la pompe.

Exercice 4 : Éolienne

On cherche à déterminer la puissance prélevée au vent par le rotor d'une éolienne. En amont, loin de l'éolienne, le vent est uniforme et permanent de vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ et la pression est uniforme et vaut P_0. On néglige les effets de pesanteur. L'éolienne est formée d'un mât, dont on négligera l'influence, portant un rotor d'axe horizontal que l'on assimilera à un disque de diamètre D et de surface S_R.

L'écoulement de l'air est unidimensionnel, stationnaire, incompressible et parfait, sauf au voisinage immédiat du rotor. La masse volumique de l'air est notée μ.

La figure suivante représente l'allure du tube de courant s'appuyant sur le pourtour du rotor, les valeurs de la pression et de la vitesse sont précisées sur ce schéma.



Les surfaces (A) et (B) sont situées de part et d'autre du rotor à proximité immédiate et on prend donc $S_A = S_B = S_R$ et $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_R} = v_R \overrightarrow{u_x}$. On désigne par $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u_x}$ la force totale exercée par l'hélice sur le fluide.

1) Étant donné l'allure du tube de courant, que peut-on dire de v_1 et de v_0 ?

2) En faisant un bilan de quantité de mouvement sur un système que l'on précisera, établir une relation liant v_0, v_1, S_0, μ et F.

3) En faisant un bilan de quantité de mouvement, établir une équation liant P_A, P_B, S_R et F. En déduire l'expression de la vitesse de l'air au niveau du rotor v_R en fonction de v_0 et v_1.

4) Déterminer, à partir d'un bilan énergétique, l'expression de la puissance $\mathcal{P}$ des actions mécaniques que le vent exerce sur le rotor en fonction de μ, S_R, v_0 et du rapport $\alpha = v_1/v_0$. Pour quelle valeur de α cette puissance est-elle maximale ? Exprimer $\mathcal{P}_{\max}$ en fonction de μ, S_R et v_0.

5) On étudie deux éoliennes très différentes :

- une éolienne de faible puissance utilisée sur un voilier : diamètre $D = 1140$ mm, $v_0 = 24$ noeuds (1 noeud = $1852\,\mathrm{m\cdot h^{-1}}$) et $\mathcal{P}_{\text{nominale}} = 400$ W ;
- une éolienne de forte puissance (réseau de distribution électrique régional) : diamètre $D = 47$ m, $v_0 = 15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $\mathcal{P}_{\text{nominale}} = 660$ kW.

Commenter en liaison avec les résultats précédents sachant que la puissance nominale est la puissance pour laquelle l'éolienne a été conçue préférentiellement ; v_0 représente également la vitesse nominale. On prendra $\mu = 1{,}225\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Réponses

Exercice 1 : Force sur une seringue

1) $v_i = \dfrac{D_v}{S_i}$

2) PFD au piston : $F_p = \dfrac{\mu\, D_v^2\,(s_1^2 - s_2^2)}{2\, s_1\, s_2^2} > 0$

3) Bilan de $\overrightarrow{P}$: $F_r = -\dfrac{\mu\, D_v^2\,(s_1 - s_2)^2}{2\, s_1\, s_2^2} < 0$

Exercice 2 : Jet sur un plan incliné

La force sur la plaque s'écrit

$$\overrightarrow{F} = \mu L U^2 [h\overrightarrow{e_x} - (h_1 - h_2)\overrightarrow{e_\parallel}] = \mu L h U^2 \cos\alpha \overrightarrow{e_\perp}$$

Exercice 3 : Jet-Pack (Centrale)

1) $v_i = 2\, v_f\, S_f / S_i$; bilan de quantité de mouvement sur le système fermé constitué du sportif, de l'eau dans le jet-pack et de l'eau qui va y entrer ; $dP_z/dt = -2\,\mu\, S_f\, v_f^2 - \mu\, S_i\, v_i^2 = -mg + (p_i - p_0)\, S_i$; $p_i = p_0 - \mu\, v_i^2/2 - \mu\, g\, h$ via BERNOULLI ; $mg + \mu\, g\, h\, S_i = 2\mu\, S_f\, v_f^2\,(1 + S_f/S_i)$; $v_f = 16\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

2) TEC au même système ; $\mathcal{P} + 2S_f\, v_f\,(p_i - p_0) = 2\mu\, S_f\, v_f\,(v_f^2/2 - v_i^2/2)$; $\mathcal{P} = \mu\, S_f\, v_f\,(2gh + v_f^2) = 19$ kW.

Exercice 4 : Éolienne

2) $\overrightarrow{F} = \mu S_0 v_0 (\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_0})$.

3) $\overrightarrow{F} = \dfrac{1}{2} S_R \mu (v_1^2 - v_0^2)\overrightarrow{u_x}$ et $v_R = \dfrac{v_0 + v_1}{2}$.

4) $\mathcal{P} = \dfrac{1}{4}\mu S_R v_0^3 (1+\alpha)(1-\alpha^2)$ soit $\mathcal{P}_{\max} = \dfrac{8}{27}\mu S_R v_0^3$.