Correction du TD n°10

Exercice 5 : Stabilité de l'atmosphère (X-ESPCI)

1) Le principe fondamental de la statique des fluides s'écrit en projection sur les trois axes :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \ ; \ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \ \text{ et } \ \frac{\partial p}{\partial z} = -\mu g$$

Ainsi, $p(z)$ ne dépend que de z. En éliminant la masse volumique $\mu = M p / RT$ via l'équation d'état des gaz parfaits, il vient :

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mg\,p}{RT}$$

Avec un gradient thermique constant on a $T(z) = T_0 - a\,z$. En remplaçant et en séparant les variables, il vient :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg\,dz}{R\,(T_0 - a\,z)} \quad \text{soit} \quad \ln\left(\frac{p(z)}{p_e}\right) = \frac{Mg}{aR}\ln\left(\frac{T(z)}{T_e}\right)$$

puis

$$\boxed{\frac{p(z)}{p_e} = \left(\frac{T(z)}{T_e}\right)^{Mg/aR}}$$

2) Avec un gradient thermique constant à l'extérieur de la bulle, on a :

$$T_{\text{ext}}(z) = T_{\text{ext}}(z_e) - a\,(z - z_e) \quad \text{soit} \quad \boxed{T_{\text{ext}}(z) = T(z_e) - a\,Z}$$

La loi de LAPLACE pour un gaz parfait de coefficient γ constant évoluant de manière adiabatique et réversible s'écrit :

$$\frac{T_{\text{int}}(z)}{T(z_e)} = \left(\frac{p(z)}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

en remarquant qu'il n'y a pas lieu de distinguer la pression à l'intérieur et à l'extérieur puisqu'elles sont égales ; de même en z_e, il n'y a pas lieu de distinguer la température à l'intérieur et à l'extérieur puisqu'elles sont égales. Avec $z = z_e + Z$, on peut faire un développement de TAYLOR d'ordre un de $p(z)$:

$$\frac{T_{\text{int}}(z)}{T(z_e)} = \left(1 + \frac{Z}{p_0}\frac{dp}{dz}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \approx 1 + \frac{(\gamma-1)\,Z}{\gamma\,p_0}\frac{dp}{dz}$$

soit

$$\boxed{T_{\text{int}} = T(z_e)\left(1 + \frac{(\gamma-1)\,Z}{\gamma\,p}\frac{dp}{dz}\right)}$$

Le principe fondamental de la statique des fluides et la loi des gaz parfaits permettent d'éliminer le gradient de pression :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu_e\,g \quad \text{d'où} \quad T_{\text{int}} = T(z_e) - \frac{(\gamma-1)\,Z\,T(z_e)\,\mu(z_e)\,g}{\gamma\,p(z_e)}$$

puis

$$\boxed{T_{\text{int}} = T(z_e) - \frac{(\gamma-1)\,M_a g\,Z}{\gamma\,R}}$$

La poussée d'ARCHIMEDE est égale à l'opposé $-m_f\,\vec{g}$ du poids de l'air déplacé, c'est-à-dire de la masse m_f d'air qui occuperait le même volume V que la bulle d'air mais à la température $T_{\text{ext}}(z)$. En écrivant l'équation d'état des gaz parfaits pour l'air extérieur et l'air de la bulle qui sont à la même pression $p(z)$, il vient :

$$p(z)\,V = \frac{m_f\,RT_{\text{ext}}(z)}{M_a} \quad \text{et} \quad p(z)\,V = \frac{m\,RT_{\text{int}}(z)}{M_a}$$

d'où

$$m_f = \frac{m\,T_{\text{int}}(z)}{T_{\text{ext}}(z)} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\Pi} = \frac{mg\,T_{\text{int}}(z)}{T_{\text{ext}}(z)}\,\vec{u_z}}$$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la bulle et projetée sur $\vec{u_z}$ s'écrit alors :

$$m\,\ddot{Z} = m\ddot{z} = mg\left(\frac{T_{\text{int}}(z)}{T_{\text{ext}}(z)} - 1\right) \quad \text{soit} \quad \ddot{Z} = g\left(\frac{T_{\text{int}}(z) - T_{\text{ext}}(z)}{T_{\text{ext}}(z)}\right)$$

En remplaçant les températures par leurs expressions établies précédemment et en remarquant que le dénominateur peut être évalué à l'ordre zéro en Z, il vient :

$$\ddot{Z} = \frac{g}{T_{\text{ext}}(z)}\left(T(z_e) - \frac{(\gamma-1)\,M_a g\,Z}{\gamma\,R} - T(z_e) + a\,Z\right)$$

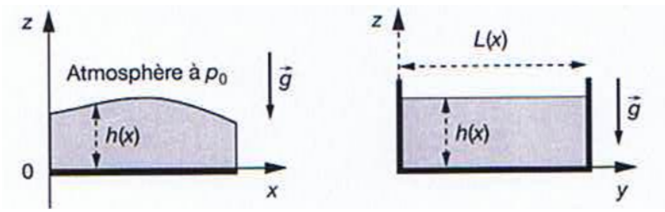
puis

$$\boxed{\ddot{Z} + \frac{g\,Z}{T_{\text{ext}}(z_e)}\left(\frac{(\gamma-1)\,M_a g}{\gamma\,R} - a\right)}$$

L'équilibre en $z = z_e$ est stable si les solutions de cette équation différentielle n'explosent pas, soit si :

$$\boxed{a < a_c = \frac{(\gamma-1)\,M_a g}{\gamma\,R} = 0{,}01\ \mathrm{K}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$$

Exercice 7 : Nombre de FROUDE - Nombre de MACH



1) L'écoulement étant stationnaire, le débit massique se conserve dans le canal qui constitue un tube de courant naturel :

$$\boxed{D_m = \mu\,L(x)\,h(x)\,v(x) \text{ est constant}} \qquad (1)$$

D'autre part, l'écoulement étant parfait, stationnaire, incompressible et homogène (μ constante) dans le champ de pesanteur uniforme, on peut appliquer la relation de Bernoulli entre deux points d'une même ligne de courant située à la surface libre où la pression p_0 est connue. Ainsi :

$$p_0 + \mu\,g\,h(x) + \frac{\mu\,v^2(x)}{2} = cste \ \text{ donc } \boxed{g\,h(x) + \frac{v^2(x)}{2} \text{ est constant}} \qquad (2)$$

Pour lier les petites variations dL, dh et dv via la relation (1), il est commode de la différentier *logarithmiquement* car elle se présente sous la forme d'un produit constant :

$$\ln(h\,L\,v) = \text{constante donc } \frac{dh}{h} + \frac{dL}{L} + \frac{dv}{v} = 0 \qquad (3)$$

Pour lier les petites variations dv et dh via la relation (2), différentions cette relation :

$$g\,dh + v\,dv = 0 \qquad (4)$$

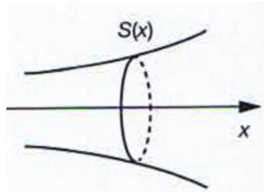
En éliminant dh entre (3) et (4) il vient :

$$-\frac{v\,dv}{gh} + \frac{dL}{L} + \frac{dv}{v} = 0 \text{ et donc } \boxed{(\mathcal{F}^2 - 1)\frac{dv}{v} = \frac{dL}{L}} \text{ avec } \boxed{\mathcal{F} = \frac{v}{\sqrt{gh}}}$$

Ainsi pour augmenter $v(x)$, $L(x)$ doit diminuer tant que $\mathcal{F}(x) < 1$ (écoulement fluvial) et doit augmenter dès que $\mathcal{F}(x) > 1$ (écoulement torrentiel).

2) Comme en **1)** le débit massique se conserve :

$$\boxed{D_m = \mu(x)\,S(x)\,v(x) \text{ est constant}} \qquad (1)$$



D'autre part, l'écoulement étant parfait, les particules de fluide évoluent de manière isentropique. Dans le cas d'un gaz parfait de coefficient γ constant, cela permet d'écrire la loi de Laplace, de telle sorte que :

$$\boxed{\frac{p(x)}{\mu^\gamma(x)} \text{ est constant}} \qquad (2)$$

On ne peut pas utiliser ici la relation de Bernoulli car l'écoulement est compressible. Pour coupler $p(x)$ et $v(x)$, on est donc naturellement amené à écrire l'équation d'Euler. Avec $\vec{v} = v(x)\,\vec{u_x}$ il vient :

$$\boxed{\mu(x)\,v(x)\,\frac{dv}{dx} = -\frac{dp}{dx}} \qquad (3)$$

Comme en **1** on peut différentier logarithmiquement (1) et (2) puis éliminer $d\mu/\mu$ entre les relations obtenues :

$$\frac{d\mu}{\mu} + \frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} = 0 \text{ et } \frac{dp}{p} - \gamma\,\frac{d\mu}{\mu} = 0 \text{ donc } \frac{1}{\gamma}\,\frac{dp}{p} = \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dS}{S} - \frac{dv}{v} \qquad (4)$$

D'autre part en multipliant (3) par dx, on passe aux différentielles sous la forme :

$$\mu\, v\, dv = -\,dp \ \text{ soit aussi bien } \ \frac{1}{\gamma}\,\frac{dp}{p} = -\,\frac{\mu\, v\, dv}{\gamma\, p} = -\,\frac{v\, dv}{c^2} \qquad (5)$$

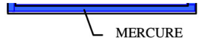
en faisant apparaître la vitesse du son $c = \sqrt{\gamma\, p/\mu}$. En éliminant dp/p entre (4) et (5) nous obtenons la relation attendue :

$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} = \frac{v\, dv}{c^2} \ \text{ soit } \ \boxed{(\mathcal{M}^2 - 1)\,\frac{dv}{v} = \frac{dS}{S}} \ \text{ avec } \ \boxed{\mathcal{M} = \frac{v}{c}}$$

Ainsi pour augmenter $v(x)$, la section $S(x)$ doit diminuer tant que $\mathcal{M}(x) < 1$ (écoulement subsonique) et doit augmenter dès que $\mathcal{M}(x) > 1$ (écoulement supersonique). Cela explique la tuyère à section variable des avions de chasse.

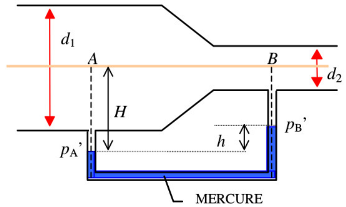
Notons par ailleurs que le modèle de l'écoulement incompressible aboutirait à la conservation du débit volumique, ce qui revient à faire disparaître le terme en $d\mu/\mu$ dans (4) ou aussi bien le terme en $\mathcal{M}^2$ dans le résultat final. On voit ici qu'en régime stationnaire, un fluide compressible peut être approximativement en écoulement incompressible si $\mathcal{M}^2 \ll 1$ c'est-à-dire si l'écoulement est suffisamment lent devant la vitesse du son.

Exercice 8 : Débitmètre de Venturi



On parle du débit D sans préciser la section ; il est donc conservé et on en déduit que l'écoulement est stationnaire.

Le débit de masse est $D = \mu_{H_2O} S_1 v_A = \mu_{H_2O} S_2 v_B$. On en déduit $v_A = \dfrac{D}{\mu_{H_2O} S_1}$ (où $S_1 = \pi \dfrac{d_1^2}{4}$) d'une part et $v_B = v_A \dfrac{S_1}{S_2}$ d'autre part.



Le fluide est de l'eau (qui est incompressible). On suppose l'écoulement parfait.

On peut alors appliquer le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant passant par les points A et B de l'axe de symétrie de la conduite.

$$\frac{1}{2}\mu_{H_2O} v_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\mu_{H_2O} v_B^2 + p_B \ \text{ car } z_A = z_B.$$

On en déduit $p_A - p_B = \dfrac{1}{2}\mu_{H_2O}\left[v_A^2\left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^2 - v_A^2\right]$

$$= \frac{1}{2}\mu_{H_2O}\left(\frac{D}{\mu_{H_2O} S_1}\right)^2\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\mu_{H_2O}}\left[\frac{1}{S_2^{\,2}} - \frac{1}{S_1^{\,2}}\right] = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\mu_{H_2O}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}\left[\frac{1}{d_2^{\,4}} - \frac{1}{d_1^{\,4}}\right]$$ soit enfin

$$p_A - p_B = \frac{8D^2}{\pi^2 \mu_{H_2O}}\left[\frac{d_1^{\,4} - d_2^{\,4}}{d_1^{\,4} d_2^{\,4}}\right].$$

Le long d'une section droite de l'écoulement qui est unidimensionnel au voisinage de cette section, on peut appliquer la loi de l'hydrostatique soit

$$p_A' = p_A + \mu_{H_2O} g H \ \text{ et } \ p_B' = p_B + \mu_{H_2O} g (H - h)$$

d'où $p_A' - p_B' = (p_A - p_B) + \mu_{H_2O} g h$.

On applique la loi de l'hydrostatique dans les colonnes de mercure et l'on trouve $p_A' = p_B' + \mu_{Hg} g h$ d'où, avec la relation précédente $(p_A - p_B) = (\mu_{Hg} - \mu_{H_2O}) g h$.

En identifiant les deux expressions de $p_A - p_B$, on trouve finalement :

$$\boxed{D^2 = \frac{\pi^2}{8}\,\frac{d_1^{\,4} d_2^{\,4}}{d_1^{\,4} - d_2^{\,4}}\,\mu_{H_2O}\left(\mu_{Hg} - \mu_{H_2O}\right) g h}$$

Pour un débitmètre donné, (d_1, d_2 fixés), le débit est donc proportionnel à $\sqrt{h}$ où h est la hauteur mesurée dans le manomètre à mercure.