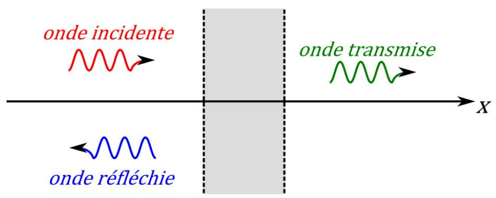
TD n°12 : Ondes acoustiques dans les fluides

Exercice 1 : Isolation phonique

Une cloison carrée de côté L et d'épaisseur négligeable, située au repos dans le plan $x = 0$ reçoit une onde sonore incidente décrite en notation complexe par la surpression $\underline{p}_i = p_M \exp(j\omega t - jkx)$, qui donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise. Sous l'effet de la discontinuité de pression, la vitre de masse surfacique σ vibre en bloc au voisinage de O.



On cherche les champs de surpression (indice 1 à gauche de la vitre ; indice 2 à droite) en notation complexe sous la forme :

$$\underline{p}_1 = p_M \exp(j\omega t - jkx) + \underline{r}\, p_M \exp(j\omega t + jkx) \quad \text{et} \quad \underline{p}_2 = \underline{t}\, p_M \exp(j\omega t - jkx)$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$.

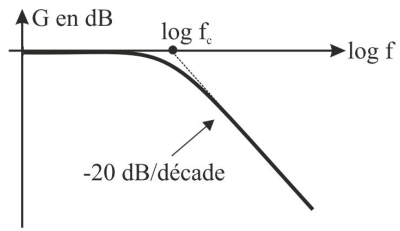
1) Expliciter les champs des vitesses correspondants.

2) Écrire les deux conditions aux limites sur la cloison. En déduire que le coefficient de transmission de la surpression se met sous la forme :

$$\underline{t} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c} \qquad \text{et exprimer } \omega_c \text{ en fonction de } \sigma, \mu_0 \text{ et } c.$$

3) Définir et déterminer le coefficient de transmission T de la puissance sonore. La figure ci-dessous donne le diagramme de Bode en amplitude c'est-à-dire le graphe du gain en décibels $G = 10 \log T$ en fonction du logarithme de la fréquence f.

Interpréter sommairement par analogie avec un filtre électrique classique



4) On souhaite un affaiblissement de 40 dB pour une fréquence de 200 Hz.

a) Dans quel domaine se situe la fréquence de coupure f_c ?

b) Conclure quant à l'atténuation entre deux pièces voisines, pour un son grave et un son aigu.

c) En déduire la masse surfacique σ, puis l'épaisseur e de la cloison sachant que sa masse volumique est $\rho = 1{,}2 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

d) Quels sont les facteurs permettant d'améliorer l'isolation phonique ?

Exercice 2 : Ondes sphériques stationnaires

Le but de cet exercice est de décrire les modes propres de vibrations centrales symétriques d'une enceinte sphérique rigide de rayon R.

1) Justifier la recherche d'une solution en surpression acoustique de la forme :

$$\underline{p} = \left(\frac{p_0}{r} \exp(-ikr) + \frac{p'_0}{r} \exp(ikr) \right) \exp(i\omega t)$$

et en déduire le champ des vitesses $\underline{v}$.

2) Quelle condition aux limites doit-on imposer à $\underline{p}(r = 0)$? La traduire, puis commenter le résultat et réécrire les expressions de $\underline{p}$ et de $\underline{v}$ avec uniquement p'_0.

3) Quelle condition aux limites doit-on imposer à $\underline{v}(r = R)$? En déduire l'équation permettant de déterminer k. La résoudre graphiquement.

4) Donner une valeur approchée de la fréquence f_1 la plus basse et faire l'application numérique pour un verre ballon de rayon $R = 4$ cm.

Exercice 3 : Ondes sonores dans un fluide en mouvement

On envisage la propagation d'ondes sonores dans un fluide de masse volumique μ_0 et de coefficient de compressibilité χ_s en mouvement avec une vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\, \overrightarrow{u_x}$. Le son est décrit par les champs :

$$p(M,t) = p_0 + p_1(x,t) \quad ; \quad \overrightarrow{v}(M,t) = (v_0 + v_1(x,t))\, \overrightarrow{u_x} \quad \text{et} \quad \mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t)$$

où les fluctuations d'indice 1 sont traitées comme des perturbations dans l'approximation acoustique.

1) Établir les équations aux dérivées partielles couplées dont sont solutions les champs $p_1(x,t)$, $\mu_1(x,t)$ et $v_1(x,t)$.

2) En déduire la relation de dispersion pour des champs proportionnels en notation complexe à $\exp(j\omega t - jkx)$. Pourquoi dit-on que le fluide "porte" le son ?

Exercice 4 : Amortissement par rayonnement (Centrale)

Un piston de masse m et de section S est libre de se déplacer dans un cylindre de section S horizontal occupant le demi-espace $x > 0$. A l'instant $t = 0$ on lance le piston avec une vitesse initiale U_0 ce qui engendre dans le tuyau une onde sonore associée à un champ de pression $p_0 + p_1(x,t)$ et à un champ des vitesses $v_1(x,t)$. En revanche on suppose qu'à gauche du piston la pression reste égale à p_0. On suppose le déplacement du piston faible devant l'échelle caractéristique des variations de $v_1(x,t)$.

1) Montrer en utilisant la notion d'impédance acoustique que la vitesse $U(t)$ du piston est solution de l'équation différentielle :

$$m\,\frac{dU}{dt} = -\,\mu_0\,S\,c\,U \qquad \text{et la résoudre.}$$

2) En déduire les expressions de $v_1(x,t)$ et $p_1(x,t)$. Tracer le graphe de $v_1(x,t)$ à t fixé et commenter.

3) Calculer l'énergie sonore totale de l'onde et commenter.

Exercice 5 : Amortissement du son par viscosité

On cherche à étudier ce qui est modifié dans la propagation des ondes sonores lorsque l'on prend en compte la viscosité du milieu.

1) Linéariser les trois équations locales de l'acoustique pour un fluide de viscosité dynamique η. Puis, en cherchant $\overrightarrow{v_1} = v_1(x,t)\overrightarrow{u_x}$, réécrire ces trois équations dans une situation unidirectionnelle en introduisant $c^2 = 1/\mu_0\chi_S$ et $\nu = \eta/\mu$ la viscosité cinématique.

2) Établir l'équation de propagation de la surpression. Commentaires ?

3) Introduire la grandeur $\tau = \nu/c^2$ et donner sa valeur numérique pour l'air, pour lequel à 20 °C, $\nu = 1{,}5.10^{-5}$ m^2·s^{-1}. En déduire que dans le domaine audible, $\omega\tau \ll 1$.

On cherche des solutions harmoniques de cette équation sous la forme d'ondes planes : $\underline{p_1} = p_M \exp i(kx - \omega t)$ avec ω réel.

4) À quelle relation de dispersion satisfont-elles ?

5) Déterminer l'expression approchée de k sous la forme $k \approx k_0 + i\alpha$ où k_0 et α sont réels. Commenter l'expression de k_0. Quelle est la vitesse de phase des ondes ? Quelle est l'expression du coefficient d'atténuation α ?

6) AN : En déduire la valeur numérique de la distance δ sur laquelle l'atténuation est sensible pour la fréquence $f = 1$ kHz. Que devient-elle pour $f = 10$ kHz ? Commenter

Réponses

Exercice 1 : Isolation phonique

1) $\underline{v_1} = \dfrac{p_M}{\mu_0 c} \exp(j\omega t - jkx) - \dfrac{\underline{r}\, p_M}{\mu_0 c} \exp(j\omega t + jkx)$ et $\underline{v_2} = \dfrac{\underline{t}\, p_M}{\mu_0 c} \exp(j\omega t - jkx)$

2) Attention à la CL en pression : $\sigma \dfrac{\partial \underline{v_2}}{\partial t} = \underline{p_1} - \underline{p_2}$ en appliquant le PFD à la cloison.
On en déduit $\underline{t} = \dfrac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$ avec $\omega_c = \dfrac{2\mu_0 c}{\sigma}$.

3) On repasse en réel et on utilise POYNTING sonore : $T = \dfrac{1}{1 + \omega^2/\omega_c^2}$

4) $f_c = 2$ Hz, $a = \frac{\sigma}{\rho} = 6$ cm.

Exercice 2 : Ondes sphériques stationnaires

1) $\underline{v} = \dfrac{1}{i\mu_0 \omega r^2} \left[p_0(1 + ikr)\exp(i(\omega t - kr)) + p_0'(1 - ikr)\exp(i(\omega t + kr))\right]$

2) $\underline{p} = 2ip_0' \dfrac{\sin kr}{r} \exp(i\omega t)$ et $\underline{v} = \dfrac{2p_0'}{\mu_0 \omega r^2} (\sin kr - kr\cos kr)\exp(i\omega t)$

3) $\tan kR = kR$.

4) $f_1 = \dfrac{3c}{4R} = 6,4$ kHz.

Exercice 3 : Ondes sonores dans un fluide en mouvement

1) Les trois équations sont $\begin{cases} \dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} + v_0 \dfrac{\partial \mu_1}{\partial x} = -\mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} \\ \mu_0 \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x}\right) = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x} \\ \mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1 \end{cases}$

2) Passer en complexe pour obtenir $k = \dfrac{\omega}{v_0 \pm c}$

Exercice 4 : Amortissement par rayonnement (Centrale)

1) $m\dot{U} = -S\, p_1(x = 0_+, t)$; $p_1(x = 0_+, t) = \mu_0\, c\, v_1(x = 0_+, t)$; $v_1(x = 0_+, t) = U(t)$; $U(t) = U_0 \exp(-t/\tau)$ avec $\tau = m/\mu_0\, S\, c$

2) $v_1(x < c\tau, t) = U_0 \exp(-(t - x/c)/\tau)$ et $v_1(x > c\tau, t) = 0$; $p_1(x, t) = \mu_0\, c\, v_1(x, t)$

3) $E_s = \int_0^{ct} \mu_0\, v_1^2(x, t)\, dx = (1/2)\, m\, (U_0^2 - U^2(t))$ prévisible par conservation de l'énergie

Exercice 5 : Amortissement du son par viscosité

1) Les trois équations sont $\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = -\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} \\ \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \\ \mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1 \end{cases}$

2) $\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \dfrac{\nu}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}\right) = 0$

4) $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} \dfrac{1}{1 - i\omega\tau}$

5) $p(x, t) = p_M \exp(-\alpha x)\cos\left(\omega\left(\dfrac{x}{c} - t\right)\right)$