TD n°13 : Électrostatique

Sauf mention contraire, toutes les densités de charge sont réparties uniformément.

Exercice 1 : Cartes de lignes de champ

Choisir une carte de lignes de champ en annexe et répondre aux questions suivantes :

1) Quels sont les plans de symétrie ? d'antisymétrie ?
2) Que peut-on dire du champ au centre ?
3) À quoi ressemblent le champ et le potentiel proches d'une charge et loin du système de charges ? Pourquoi ?
4) Que peut-on dire d'autre ?

Exercice 2 : Potentiel de Yukawa

Soit une distribution à symétrie sphérique créant le potentiel électrostatique de YUKAWA [1]

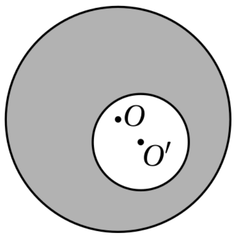
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

1) Déterminer le champ électrostatique crée par cette distribution.
2) Calculer le flux du champ électrostatique à travers une sphère de centre O et de rayon r et en déduire la charge intérieure correspondante.
3) Étudier les cas limites $r \ll a$ et $r \gg a$. En déduire une interprétation physique de a.
4) Montrer que ce champ correspond à celui crée par une charge ponctuelle $+q$ au point O et une densité volumique de charge négative dont on donnera l'expression. Que pourrait représenter cette distribution ?

Exercice 3 : Principe de superposition

Une boule de centre O et de rayon a portant la charge volumique uniformément répartie ρ possède une cavité sphérique de centre O' et de rayon b, vide de charges.

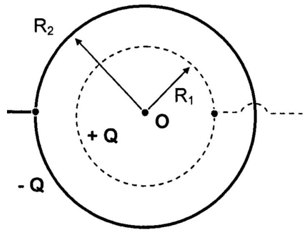
Déterminer le champ électrostatique dans la cavité.



1. Hideki Yukawa (1907-1981), physicien japonais, prix Nobel 1949 pour ses travaux sur les forces nucléaires.

Exercice 4 : Condensateur sphérique

On considère deux sphères de même centre O et de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. La petite sphère porte la charge $+Q$ sur sa surface , l'autre sphère porte la charge $-Q$.



1) Exprimer les densités surfaciques σ_1 et σ_2 de charge présentes sur chacune des deux sphères.
2) Calculer le champ E crée par les sphères en tout point de l'espace où il est défini (à préciser). Montrer que l'on peut raisonnablement parler de condensateur.
3) Déterminer l'expression de la capacité C de ce condensateur.
4) Dans le cas où $R_2 - R_1 \ll R_1$, que peut-on dire de la capacité C ? Peut-on faire un rapprochement avec le cours ?

Exercice 5 : Stabilité d'un faisceau d'électrons

On envisage un faisceau d'électrons cylindrique d'axe Oz et de rayon a de densité volumique n constante. On note $-e$ la charge d'un électron.

1) Exprimer le champ électrostatique créé par le faisceau en son sein. Quel est l'effet qualitatif de la force subie par un électron ?
2) On applique en outre un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ uniforme et stationnaire. Montrer que le faisceau est stabilisé si B dépasse une valeur critique B_c qu'on explicitera. Indication précieuse : on travaillera en coordonnées cartésiennes.

Exercice 6 : Goutte d'eau chargée (Centrale et début ENS Ulm)

1) Une goutte d'eau sphérique de rayon R porte une charge Q. On l'assimile à un conducteur de telle sorte que $\overrightarrow{j} = \sigma\,\overrightarrow{E}$, qu'on suppose en équilibre, de telle sorte que $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$. Exprimer le champ $\overrightarrow{E}$ dans tout l'espace et l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_{es}$ de la distribution de charges.
2) On suppose que la goutte explose en N gouttes identiques. On rappelle qu'il existe une énergie de tension superficielle $\mathcal{E}_{ts} = 4\pi R^2 A$. Déterminer N.

Exercice 7 : Écrantage du champ électrostatique par un électrolyte

Une grande plaque portant une charge uniformément répartie sur sa surface S avec une densité σ_0 est plongée dans un électrolyte constitué de cations K^+ et d'anions A^-, remplissant le demi-espace $z > 0$, le demi-espace $z < 0$ étant vide. On repère un point $M(x, y, z)$ du demi-espace $z > 0$ par ses coordonnées cartésiennes. On suppose la répartition des sources et donc aussi le potentiel $V(z)$ invariants par toute translation selon $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$

1) Les densités volumiques d'ions sont données par les expressions :

$$n_+(z) = n_0 \exp\left(-\frac{e\,V(z)}{k_B\,T}\right) \qquad \text{et} \qquad n_-(z) = n_0 \exp\left(\frac{e\,V(z)}{k_B\,T}\right)$$

Interpréter qualitativement ces expressions et exprimer la densité volumique de charges $\rho(z)$.

2) On suppose que $e\,|V(z)| \ll k_B\,T$. On pose $D = \sqrt{\varepsilon_0\,k_B\,T/2\,n_0\,e^2}$. Établir l'équation dont est solution le potentiel $V(z)$ et la résoudre. On supposera qu'en $z = 0_+$, seule la plaque contribue au champ électrostatique. Que représente concrètement le paramètre D ?

3) Exprimer $\rho(z)$. Retrouver l'expression du champ à l'infini en découpant l'espace en tranches d'épaisseur dz.

Réponses

Exercice 2 : Potentiel de Yukawa

1) $\overrightarrow{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)\overrightarrow{u_r}$

2) $\Phi = \dfrac{q}{\epsilon_0}\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$

3) $Q(r) = q\left(1+\dfrac{r}{a}\right)\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$

4) $\rho(r) = -\dfrac{q}{4\pi a^2 r}\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$

Exercice 3 : Principe de superposition

$\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$

Exercice 4 : Condensateur sphérique

1) $\sigma_1 = \dfrac{Q}{4\pi R_1^2}$ et $\sigma_2 = -\dfrac{Q}{4\pi R_2^2}$

2) $\overrightarrow{E}(r < R_1) = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{E}(r > R_2) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{E}(R_1 < r < R_2) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$.

3) $Q = CU \Rightarrow C = \dfrac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

Exercice 5 : Stabilité d'un faisceau d'électrons

1) $\overrightarrow{E} = -(n\,e\,r/2\varepsilon_0)\,\overrightarrow{u_r}$; $\overrightarrow{F} = -e\,\overrightarrow{E}$ fait exploser le faisceau radialement.

2) poser $\omega_p^2 = n\,e^2/2\,m\,\varepsilon_0$ et $\omega_c = e\,B/m$; $\ddot{x} + \omega_c\,\dot{y} - \omega_p^2\,x = 0$; $\ddot{y} - \omega_c\,\dot{x} - \omega_p^2\,y = 0$; $\ddot{z} = 0$; poser $u = x + jy$; $\ddot{u} - j\omega_c\,\dot{u} - \omega_p^2\,u = 0$; chercher $u(t) = A\,\exp(st)$; $s^2 - j\omega_c\,s - \omega_p^2 = 0$; $|u(t)|$ borné si $\Delta < 0$ soit $\omega_c > 2\,\omega_p$ puis $B > B_c = \sqrt{2\,n\,m/\varepsilon_0}$

Exercice 6 : Goutte d'eau chargée

1) $\overrightarrow{E} = E_r(r)\,\overrightarrow{u_r}$ avec $E_r(r < R) = 0$ et $E_r(r > R) = Q/4\pi\,\varepsilon_0\,r^2$; $\mathcal{E}_{es} = \iiint_{espace}(\varepsilon_0\,E^2/2)\,d\tau = Q^2/8\pi\,\varepsilon_0\,R$

2) $R_N = R\,N^{-1/3}$; $\mathcal{E} = Q^2\,N^{-2/3}/8\pi\,\varepsilon_0\,R + 4\pi\,R^2\,A\,N^{1/3}$ est minimale pour $N = Q^2/(16\pi^2\,\varepsilon_0\,A\,R^3)$

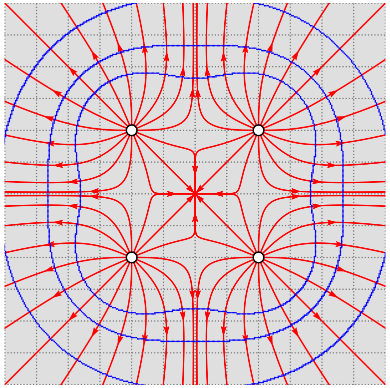
Exercice 7 : Écrantage du champ électrostatique par un électrolyte

1) facteur de BOLTZMANN avec $\mathcal{E}_p = q\,V$; $\rho(z) = -2n_0 e \mathrm{sh}(e\,V(z)/k_B\,T)$

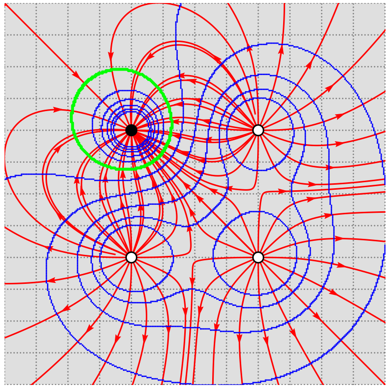
2) $\Delta V = -\rho/\varepsilon_0$; $V(z) = A\,\exp(-z/D)$; $\overrightarrow{E} = (A/D)\,\exp(-z/D)\,\overrightarrow{u_z}$; $A = D\sigma_0/2\varepsilon_0$; le champ est écranté au delà de quelques D.

3) $\rho(z) = -(\varepsilon_0\,A/D^2)\,\exp(-z/D)$; $E(z = +\infty) = \sigma_0/2\varepsilon_0 + \sum d\sigma/2\varepsilon_0$ avec $d\sigma = \rho(z)\,dz$; $E(z = +\infty) = 0$ ce qui confirme la pertinence de la condition aux limites ad hoc en **2**.

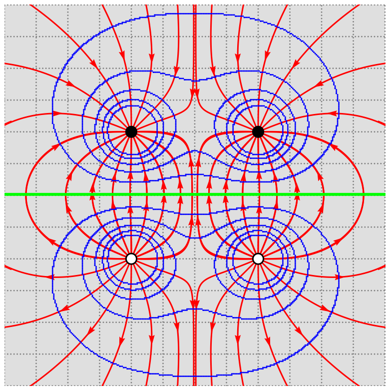
LIGNES DE CHAMP ET ÉQUIPOTENTIELLES
4 charges aux sommets d'un carré



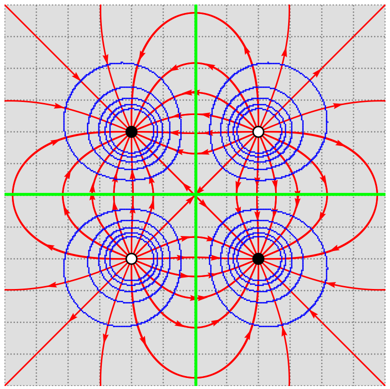
(a) 4 charges positives



(b) 1 charge négative et 3 positives



(c) 2 charges positives sous 2 négatives



(d) 2 négatives et 2 positives en diagonale