Ecole Polytechnique – ESPCI

Deuxième composition de physique ; année 2001 ; filière PC

Première partie : Propagation d'une onde sonore dans un tuyau.

1. Équation d'Euler, en négligeant la pesanteur : $r\dfrac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P$. L'approximation acoustique (on ne garde que les termes d'ordre 1), et le fait que $P = P_0 + p$, donnent alors $\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ **(1)**

2. **a)** Masse contenue à l'instant t dans une tranche $[x,x+\mathrm{d}x]$: $\mathrm{d}M(t) = r(x,t)\,S(x,t)\,\mathrm{d}x$. Elle ne peut varier que par les flux de masse en x et $x+\mathrm{d}x$:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}\,M)}{\mathrm{d}\,t} = +r(x,t)S(x,t)v(x,t) - r(x+\mathrm{d}\,x,t)S(x+\mathrm{d}\,x,t)v(x+\mathrm{d}\,x,t)$$

D'où l'équation $\dfrac{\partial}{\partial t}(rS) + \dfrac{\partial}{\partial x}(rSv) = 0$ **(2)**

b) L'équation d'Euler est une équation locale, valable en tout point du fluide. Elle est indépendante des conditions aux limites.

c) (2) s'écrit $\dfrac{\partial}{\partial t}(rS) + \dfrac{\partial}{\partial x}\big((r_0 + dr)(S_0 + dS)v\big) = 0$; S_0 étant indépendante de x (énoncé), et en ne gardant que les termes d'ordre 1, il vient : $\dfrac{\partial}{\partial t}(rS) + r_0 S_0\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ **(2').**

3. **a)** On dérive (1) par rapport à x : $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$ **(1'')**

(2') peut aussi s'écrire : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,P}S + \dfrac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,P}r\right)\dfrac{\partial P}{\partial t} + r_0 S_0\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$; au premier ordre (et comme $\dfrac{\partial P}{\partial t} = \dfrac{\partial p}{\partial t}$) on a alors : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,P}S_0 + \dfrac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,P}r_0\right)\dfrac{\partial p}{\partial t} + r_0 S_0\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$. On dérive par rapport à t : $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2\,r}{\mathrm{d}\,P^2}S_0 + \dfrac{\mathrm{d}^2\,S}{\mathrm{d}\,P^2}r_0\right)\left(\dfrac{\partial p}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,P}S_0 + \dfrac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,P}r_0\right)\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + r_0 S_0\dfrac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = 0$, et en ne gardant que les termes du premier ordre : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,P}S_0 + \dfrac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,P}r_0\right)\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + r_0 S_0\dfrac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = 0$ **(2'')**

La combinaison de (1'') et (2'') donne alors $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ avec $\dfrac{1}{r_0 c^2} = \dfrac{1}{r_0}\left.\dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,P}\right|_{p=0} + \dfrac{1}{S_0}\left.\dfrac{\mathrm{d}\,S}{\mathrm{d}\,P}\right|_{p=0}$.

b) Un terme lié aux propriétés élastiques du fluide, l'autre à celles du solide constituant le tuyau.

c) (a) par les propriétés des deux (b) par les propriétés du fluide
(g) par les propriétés du solide (d) par les propriétés des deux

Pour un instrument à vent, on est dans le cas (b) : l'influence des parois de l'instrument de musique sur le son émis est donc négligeable.

Deuxième partie : Notes émises par un instrument à vent.

1. **a)** Pour $x<0$, on aura $\begin{cases} p = p_1 = p_I \exp[j(w\,t - kx)] + p_R \exp[j(w\,t + kx)] \\ v = v_1 = \dfrac{1}{Z}\{p_I \exp[j(w\,t - kx)] - p_R \exp[j(w\,t + kx)]\} \end{cases}$, où l'on a posé $Z = r_0 c$ et $k = \dfrac{w}{c}$, et pour $x>0$: $\begin{cases} p = p_2 = p_T \exp[j(w\,t - kx)] \\ v = v_2 = \dfrac{p_T}{Z}\exp[j(w\,t - kx)] \end{cases}$.

Pour la suite, on note S_1 et S_2 les sections du tuyau.

RFD à une tranche de fluide $[-e,+e]$: $\mathrm{d}m\ a_G = P_1(-e,t)S_1 + P_2(0,t)(S_2 - S_1) - P_2(e,t)S_2$. On fait $e \to 0$: le membre de gauche tend vers zéro (a_G finie, et $\mathrm{d}m \to 0$), les P_0 s'éliminent à droite et il reste finalement : $p_1(0,t) = p_2(0,t) \quad \forall t$ (première condition à l'interface).

Conservation de la masse pour la même tranche $[-e,+e]$: $\mathrm{d}m = r(0,t)[S_1 e + S_2 e]$, donc $\dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{d}m)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial r}{\partial t}(0,t)e(S_1 + S_2) = r(-e,t)v_1(-e,t)S_1 - r(e,t)v_2(e,t)S_2$. Puis $e \to 0$: le membre de gauche $\to 0$; et il reste $r_1 v_1 S_1 = r_2 v_2 S_2$ en $x = 0$, $\forall t$. En ne gardant que les termes d'ordre 1, on peut en fait remplacer r_1 et r_2 par r_0 et on a alors la deuxième condition à l'interface : $v_1(0,t)S_1 = v_2(0,t)S_2 \quad \forall t$.

Remarque : si $S_1 \neq S_2$, il y a discontinuité des vitesses en $x = 0$ (de toutes les façons, c'est une modélisation approchée, les ondes ne peuvent être planes en réalité au voisinage de la discontinuité).

On reporte ces deux conditions dans les expressions des ondes, et on obtient : $\begin{cases} p_I + p_R = p_T \\ S_1(p_I - p_R) = S_2 p_T \end{cases}$, dont la résolution donne $\begin{cases} r = \dfrac{p_R}{p_I} = \dfrac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} = \dfrac{1 - c^2}{1 + c^2} \\ t = \dfrac{p_T}{p_I} = 1 + r = \dfrac{2S_1}{S_1 + S_2} = \dfrac{2}{1 + c^2} \end{cases}$. On note que ces coefficients sont réels, donc, si on prend p_I réel, p_R et p_T le sont aussi.

Vecteur densité de courant d'énergie sonore de l'onde incidente : $\vec{p}_i = \dfrac{p_I^2}{Z}\cos^2(wt - kx)\vec{e}_x$, soit en valeur moyenne dans le temps $\langle \vec{p}_i \rangle = \dfrac{p_I^2}{2Z}\vec{e}_x$. D'où la puissance moyenne transportée par cette onde : $I_i = \dfrac{p_I^2 S_1}{2Z}$.

De même $I_r = \dfrac{p_R^2 S_1}{2Z}$ pour l'onde réfléchie et $I_t = \dfrac{p_T^2 S_2}{2Z}$ pour l'onde transmise.

Donc $\begin{cases} R = \dfrac{I_r}{I_i} = r^2 = \left(\dfrac{1 - c^2}{1 + c^2}\right)^2 \\ T = \dfrac{I_t}{I_i} = \dfrac{S_2}{S_1}t^2 = \dfrac{4c^2}{(1 + c^2)^2} \end{cases}$; on note bien sûr que $R + T = 1$ (conservation de l'énergie).

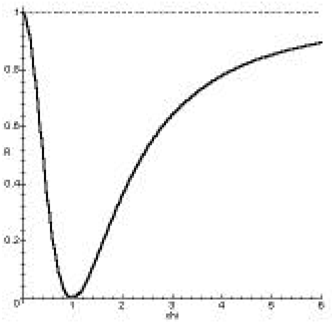
b) Le coefficient R atteint son minimum (qui est nul) pour $c = 1$: il n'y a alors pas d'onde réfléchie, ce qui est normal puisqu'il n'y a en fait aucune discontinuité ($\Phi_1 = \Phi_2$).

c) Si $c \to 0$ à Φ_1 donné : correspond à $\Phi_2 << \Phi_1$ et donc à un tuyau fermé. On a alors $r = 1$, donc $p_R = p_I$ et par conséquent $v_1(x=0,t) = 0\ \forall t$.
Si $c \to \infty$ à Φ_2 donné : correspond à $\Phi_2 >> \Phi_1$ et donc à un tuyau ouvert. On a alors $r = -1$, donc $p_R = -p_I$ et par conséquent $p_1(x=0,t) = 0\ \ \forall t$.

2. **a)** Dans une onde stationnaire, nœuds et ventres alternent régulièrement tous les $\dfrac{l}{4}$. Pour des conditions aux limites paires, on a donc $L = n\dfrac{l_n}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Or $l_n = \dfrac{c}{n_n}$, donc $n_n = n\dfrac{c}{2L}$. Le fondamental a pour fréquence $n_1 = \dfrac{c}{2L}$.

Pour des conditions aux limites impaires, $L = (2n+1)\dfrac{l_n}{4}$ avec maintenant $n \in \mathbb{N}$.

Donc $n_n = (2n+1)\dfrac{c}{4L}$. Le fondamental a pour fréquence $n_0 = \dfrac{c}{4L}$.



b) Flûte : conditions paires ; L = 51,5 cm
Clarinette : conditions impaires donc, à L égales, son fondamental est

plus bas que celui de la flûte (et plus précisément fréquence moitié)

Orgue : les valeurs correspondent à des conditions paires.

c) C.L. paires : $n_{n+1} - n_n = \dfrac{c}{2L}$; C.L. impaires : $n_{n+1} - n_n = \dfrac{c}{2L}$. Donc notes régulièrement espacées dans les deux cas, avec un écart de $\dfrac{c}{2L}$ entre deux harmoniques successifs, dans les deux cas.

<u>Troisième partie : Influence du diamètre du tuyau.</u>

1. **a)** $Y(y)$ et $Z(z)$ décrivent la variation de l'amplitude avec y et z (onde non plane) ; le terme $\mathrm{e}^{i(kx-wt)}$ traduit le caractère harmonique de l'onde et sa propagation selon $x'x$.

b) La vitesse normale doit être nulle sur les parois (condition de non pénétration). En utilisant alors l'équation d'Euler à 3D, qui, en ne gardant que les termes d'ordre 1, devient $r_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p$,

on obtient en particulier $\begin{cases} v_y = \dfrac{1}{i r_0 w} Y'(y) Z(z)\, \mathrm{e}^{i(kx-wt)} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ ou } D, \forall t \\ v_z = \dfrac{1}{i r_0 w} Y(y) Z'(z)\, \mathrm{e}^{i(kx-wt)} = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ ou } D, \forall t \end{cases}$. Ce n'est possible que si $Y'(y=0) = Y'(y=D) = 0$ et $Z'(z=0) = Z'(z=D) = 0$.

c) On reporte l'expression de $p(x,y,z,t)$ dans l'équation d'onde et on divise tout par $Y(y)Z(z)$: $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} + \dfrac{w^2}{c^2} = k^2 - \dfrac{Z''(z)}{Z(z)} \quad \forall y, z$. Le membre de gauche ne dépend que de y, celui de droite que de z, donc l'expression est égale à une constante K_1. D'où $Y''(y) + \left(\dfrac{w^2}{c^2} - K_1\right) Y(y) = 0 \quad \forall y$. Il ne peut y avoir de solution non identiquement nulle et vérifiant les conditions du b) si $\dfrac{w^2}{c^2} - K_1 \leq 0$; on pose donc $\dfrac{w^2}{c^2} - K_1 = K_2^2$, avec $K_2 \in \measuredangle^{+*}$. D'où $Y(y) = C_1 \cos(K_2 y) + C_2 \sin(K_2 y)$ et $Y'(y) = -C_1 K_2 \sin(K_2 y) + C_2 K_2 \cos(K_2 y)$.

La condition $Y'(y=0) = 0$ donne $C_2 = 0$. Et la condition $Y'(y=D) = 0$ donne alors $K_2 D = a p$ avec a entier. D'où maintenant $K_1 = \dfrac{w^2}{c^2} - a^2 \dfrac{p^2}{D^2}$, et donc $Z''(z) + \left(\dfrac{w^2}{c^2} - a^2 \dfrac{p^2}{D^2} - k^2\right) Z(z) = 0 \quad \forall z$. Même raisonnement que ci-dessus : le contenu de la parenthèse doit être strictement positif : $\dfrac{w^2}{c^2} - a^2 \dfrac{p^2}{D^2} - k^2 = K_3^2$ avec $K_3 \in \measuredangle^{+*}$. Et de même $K_3 D = b p$ avec b entier. D'où la relation de dispersion $w^2 = k^2 c^2 + \dfrac{p^2 c^2}{D^2}\left(a^2 + b^2\right)$ avec a et b entiers. Une onde plane correspond à $a = b = 0$.

d) Cette relation se met sous la forme $\dfrac{n}{n_c} = \sqrt{a^2 + b^2 + \left(\dfrac{kD}{p}\right)^2}$. n_c est la fréquence de coupure pour les modes {1,0} et {0,1} : il n'y a pas d'onde de la forme cherchée de fréquence inférieure à n_c dans ces deux modes.

e) Pour identifier les courbes : on regarde l'ordonnée à $kD = 0$.

Courbe 1 : mode {0,0} Courbe 2 : modes {1,0} et {0,1}

Courbe 3 : mode {1,1} Courbe 4 : modes {2,0} et {0,2}

2. **a)** Si les C.L. sont paires, on a $k_n = n\dfrac{p}{L}$ avec $n \in$.·˙*. Si elles sont impaires, on a $k_n = (2n+1)\dfrac{p}{2L}$ avec $n \in$.·˙. Dans les deux cas, les k_n sont équidistants. Donc, si $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}k} =$ Cte, alors les fréquences des divers harmoniques sont équidistantes elles aussi, et l'instrument est harmonieux. Le seul mode transverse autorisé est alors le mode {0,0} (onde plane). Il ne faut donc pas faire jouer à l'instrument de note de fréquence supérieure à n_c, sous peine de voir apparaître des modes non harmonieux. Donc $n_M = v_c$.

b) Pour $D = 10$ mm, $n_M \approx 17$ kHz, soit l'ordre de grandeur des notes audibles les plus aiguës : il ne servirait à rien de prendre D plus grand, et si on prenait D plus petit, on perdrait des notes du côté des aigus.

c) Si les C.L. sont paires, $n_n = n\dfrac{D}{L}n_c$ avec $n \in$.·˙*. La condition $n_n < n_c$ laisse alors $N = E\left(\dfrac{L}{D}\right)$ notes harmonieuses possibles. Si elles sont impaires, $n_n = (2n+1)\dfrac{D}{2L}n_c$ avec $n \in$.·˙. La condition $n_n < n_c$ donne alors $N = E\left(\dfrac{L}{D}+\dfrac{1}{2}\right)$. Comme $L >> D$, la richesse dépend très peu des conditions aux limites. Pour le cor d'harmonie, $N \approx 400$ et pour la flûte, $N \approx 50$ (en prenant dans les deux cas $D \approx 10$ mm).

__Quatrième partie : rôle du pavillon.__

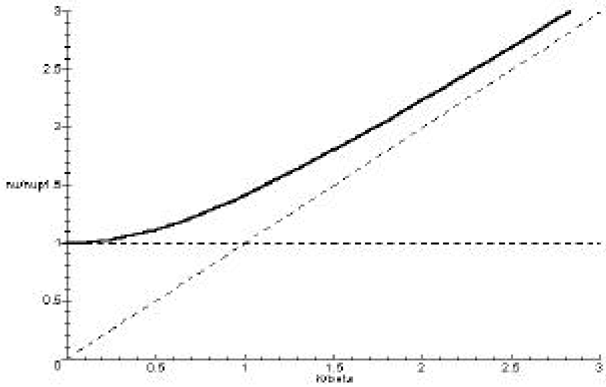
1. **a)** On reprend (2) avec $S(x,t) = S_0(x)$, ce qui donne, à l'ordre 1 : $S_0(x)\dfrac{\partial r}{\partial t} + r_0\dfrac{\partial}{\partial x}\left(S_0(x)v\right) = 0$. On développe la dérivée, divise par $S_0(x)$ pour arriver à $\dfrac{\partial r}{\partial t} + r_0\dfrac{\partial v}{\partial x} + r_0 v\dfrac{1}{S_0(x)}\dfrac{\mathrm{d}S_0}{\mathrm{d}x} = 0$. (1) est toujours valable ➔ $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial t} + \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$ et par ailleurs $\dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2} + r_0\dfrac{\partial^2 v}{\partial t\partial x} + r_0\dfrac{\partial v}{\partial t}\dfrac{1}{S_0(x)}\dfrac{\mathrm{d}S_0}{\mathrm{d}x} = 0$. Ce qui conduit, avec (1), à $\dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{1}{S_0(x)}\dfrac{\mathrm{d}S_0}{\mathrm{d}x} = 0$.

Enfin $\dfrac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}P}\dfrac{\partial P}{\partial t}\right] = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}P}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \left(\dfrac{\partial p}{\partial t}\right)^2\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}P^2}$; le deuxième terme étant d'ordre 2, on le néglige, et on arrive à l'équation d'onde $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \dfrac{1}{S_0}\dfrac{\mathrm{d}S_0}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ avec $\dfrac{1}{c^2} = \left.\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}P}\right|_{p=0}$.

Pour le pavillon exponentiel, elle s'écrit $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2b\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$.

b) On considère ici une onde harmonique plane (implicite dans l'énoncé) ; on la cherche sous la forme $p = C_5\,\mathrm{e}^{i(Kx - wt)}$ où $w \in$ ∠⁺* et $K \in$ ∐. L'équation d'onde donne alors $K^2 - 2ibK - \dfrac{w^2}{c^2} = 0$. L'onde ne peut se propager que si K a une partie réelle non nulle, ce qui implique un discriminant $\Delta = 4\left(\dfrac{w^2}{c^2} - b^2\right) > 0$. La condition de propagation s'écrit donc $n > n_P = \dfrac{bc}{2p}$.

Et $K = ib \pm\sqrt{\dfrac{w^2}{c^2} - b^2}$, donc $p(x,t) = C_5\,\mathrm{e}^{-bx}\mathrm{e}^{i\left[\pm\sqrt{\frac{w^2}{c^2} - b^2} - wt\right]}$. Le signe ± correspond au sens de propagation (signe + pour une propagation vers l'extérieur du pavillon). L'amplitude de la surpression décroît en e^{-bx}, ce qui est normal étant donné que l'énergie de l'onde se répartit sur une surface de plus en plus grande au cours de la propagation.



Le nombre d'onde <u>réel</u> est alors $K=\sqrt{\frac{w^2}{c^2}-b^2}$, ce qui peut s'écrire aussi $\frac{n}{n_P}=\sqrt{1+\frac{K^2}{b^2}}$.

c) $b=\frac{1}{L_P}\ln\frac{\Phi}{j}\approx 2{,}17$, et donc $n_P \approx 117{,}3$ Hz.

2. **a)** Pour le cor sans son pavillon, on reprend l'expression de T trouvée au II.1.a : $T=\frac{4c^2}{\left(1+c^2\right)^2}$ avec $c^2=\frac{4}{pj^2}\approx 8840$. D'où $T \approx 4{,}52.10^{-4}$.

Pour le cor avec son pavillon, et en admettant que la raccord tuyau–pavillon ne donne pas lieu à une réflexion, on a $c^2=\frac{4}{p\Phi^2}\approx 13{,}25$ et donc $T_P \approx 0{,}261$. On voit l'intérêt du pavillon (~adaptation d'impédance).

b) Si $p=A\cos(kx-wt)$, alors $v=\frac{A}{r_0 c}\cos(kx-wt)$ et donc le vecteur densité de courant d'énergie sonore vaut $\vec{p}=\frac{A^2}{r_0 c}\cos^2(kx-wt)$ et donc $I=\left\|\langle\vec{p}\rangle\right\|=\frac{A^2}{2r_0 c}$ si A est l'amplitude de la surpression.

c) $I_{E\,\mathrm{dB}}=10\log\frac{I_E}{I_0}$ où I_0 est l'intensité de référence. D'où $I_E=I_0 10^{\frac{I_{E\,\mathrm{dB}}}{10}}=10^{-4}$ W.m^{-2}.

Donc, pour le corps sans pavillon, l'intensité de l'onde incidente dans le corps de l'instrument est $I=\frac{I_E}{T}\approx 0{,}22$ W.m^{-2}. On en déduit alors avec le b) que $A \approx 180$ Pa. $A << 10^5$ Pa donc on est bien dans le cadre de l'approximation acoustique, qui avait été utilisée. On y sera encore davantage, a fortiori, pour l'instrument avec son pavillon.

d) Les notes graves ($n << n_P$) ne peuvent se propager dans le pavillon : elles restent sous forme d'ondes stationnaires dans le tuyau. On peut donc dire qu'elles ne « voient » que le tuyau.

Les notes aiguës ($n >> n_P$) se propagent dans le pavillon et on a même $\frac{n}{n_P}\approx\frac{K}{b}$ (voir figure en haut de la page) ou encore $K\approx\frac{w}{c}$ comme pour une OPPH en milieu libre. On ne peut donc pas dire que ces ondes « voient » vraiment le pavillon, elles « voient » en fait l'ensemble de la longueur de l'instrument, $L_C + L_P$.

Si Φ augmente, toutes choses étant égales par ailleurs, b augmente et donc n_P aussi. Il y a donc moins de notes émises. Par contre, T augmente et donc l'intensité des notes émises augmente.

Le rôle principal du pavillon apparaît donc être l'adaptation d'impédance entre le tuyau et l'air extérieur, de manière à ce que le son transmis à l'extérieur soit plus intense.