Correction du TD n°13

Exercice 1 : Cartes de lignes de champ

Appelons x l'axe horizontal, y le vertical, z celui perpendiculaire à la feuille et O le centre du carré de charges.

1)
- Dans le cas (a), les plans(xOy), (xOz), (yOz) sont des plans de symétrie de la distribution de charge donc d'après le principe de CURIE, du champ $\overrightarrow{E}$. Il en est de même pour les plans perpendiculaires à la feuille et passant par les deux bissectrices des axes (Ox) et (Oy). On vérifie que les LC sont bien symétriques par rapport à ces plans et qu'elles y sont incluses en des points appartenant à ceux-ci.
- Dans le cas (c), le plan (xOz) est plan d'antisymétrie, donc les LC doivent être antisymétriques par rapport à ce plan et perpendiculaires à ce plan en un point appartenant à celui-ci. Ce plan est une équipotentielle nulle, séparant les zones de charges positives $(V > 0)$ des négatives $(V < 0)$, puisque l'on doit avoir $V(M) = -V(M)$ pour $M \in (xOz)$.

2) Dans les cas (a) et (c), le champ électrique au centre doit être inclus dans trois plans de symétrie deux à deux orthogonaux, donc dans leur intersection, qui se résume à un point. Le champ y est donc nul $\overrightarrow{E}(O) = 0$.

3) Proche d'une charge :
- le champ $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$ est radial (divergent pour une charge positive et convergent pour une négative),
- les équipotentielles $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ = cte, sont des sphères (de potentiel positif pour une charge positive et négatif pour une négative).

Loin des charges :
- si la somme de leurs charges est non nulle, alors elles équivalent à une unique charge, de charge la charge totale. On doit donc retrouver des LC radiales et équipotentielles sphériques (cas (a) et (b)).
- Si la somme des charges est nulle, il faut regarder le barycentre des charges positives et négatives :
  — s'ils ne sont pas confondus alors on a affaire à une structure dipolaire à grande distance. Les LC et les équiV sont donc des lobes (cf cours dipôle).
  — s'ils sont confondus, alors on est en présence d'une structure quadripolaire à grande distance. Les LC et équiV sont des lobes de structures différentes au dipôle (cf cours dipôle).

4) On peut vérifier que les LC sont perpendiculaires aux équiV, et que les LC s'écartent quand on s'éloigne des charges, ce qui est logique puisque le champ diminue dans ce cas et que son flux doit être conservé. Les LC vont bien des charges positives vers les négatives et descendent donc les potentiels.

Exercice 2 : Potentiel de Yukawa

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

1) Le champ électrostatique est donné par :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V(r) = -\frac{dV(r)}{dr}\overrightarrow{u_r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{dr}\left[\frac{\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}{r}\right]\overrightarrow{u_r}$$

soit

$$\overrightarrow{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r^2}\exp\left(-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{ar}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right]\overrightarrow{u_r}$$

ou encore

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\overrightarrow{u_r}}$$

2) On applique le théorème de Gauss sur une sphère Σ de rayon r et de centre O

$$\oiint_\Sigma \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

Or $\overrightarrow{E}(r)$ est radial et ne dépend que de r, on peut donc le sortir de l'intégrale qui porte sur θ et ϕ :

$$\oiint_\Sigma \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint_\Sigma E(r)\overrightarrow{u_r}.(r^2\sin\theta d\theta d\phi\overrightarrow{u_r}) = r^2E(r)\oiint_\Sigma \sin\theta d\theta d\phi = r^2E(r)4\pi$$

d'où :

$$\boxed{Q(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = q\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$$

3) On en déduit les limites suivantes

$$\boxed{\lim_{r\to 0} Q(r) = q \text{ et } \lim_{r\to\infty} Q(r) = 0}$$

La distribution de charges inconnue contient donc une charge ponctuelle en O de valeur q et une distribution volumique [1] de charge $\rho(r)$ opposée, qui annule la charge totale contenue dans tout le système (neutralité du milieu) sur une distance caractéristique a.

Cela peut être un modèle pour un atome : un noyau de charge $+q$ au centre et un nuage électronique de charge $-q$ et de rayon a autour. La présence du nuage électronique "écrante" le champ crée par la charge centrale. En effet, si la charge centrale était seule, elle créerait le potentiel $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. L'exponentielle supplémentaire dans l'expression donnée du potentiel traduit donc la présence de la densité de charge opposée et accélère la décroissance du potentiel.

4) La charge élémentaire dQ contenue dans le volume élémentaire $d\tau$ s'écrit :

$$dQ(r) = \rho(r)d\tau = \rho(r)4\pi r^2 dr$$

en intégrant selon θ et ϕ dont ne dépendent pas $Q(r)$ ni $\rho(r)$, soit

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ(r)}{dr} = \frac{q}{4\pi r^2}\left[\frac{\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}{a} - \left(1+\frac{r}{a}\right)\frac{\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}{a}\right]$$

et finalement

$$\boxed{\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right) < 0}$$

Remarque : On peut aussi utiliser l'équation de MAXWELL-GAUSS pour retrouver le même résultat

$$\text{div}(\overrightarrow{E}(r)) = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2E_r)}{dr} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

puisque l'on est en coordonnées sphériques, soit

$$\rho(r) = \frac{\epsilon_0}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2.\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right]$$

ou encore

$$\rho(r) = \frac{q}{4\pi r^2}\frac{d}{dr}\left[\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right]$$

la dérivée étant la même que précédemment, on obtient bien à nouveau :

$$\boxed{\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)}$$

1. puisque le champ $E(r)$ est continu.