Correction du TD n°12

Exercice 3 : Ondes sonores dans un fluide en mouvement

1) L'équation locale de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((\mu_0+\mu_1)\,(v_0+v_1)\right)+\frac{\partial(\mu_0+\mu_1)}{\partial t}=0$$

Soit en constatant que les termes d'ordre zéro ne contribuent pas, en ne conservant que les termes d'ordre un et en ordonnant :

$$\boxed{\frac{\partial\mu_1}{\partial t}+v_0\,\frac{\partial\mu_1}{\partial x}=-\,\mu_0\,\frac{\partial v_1}{\partial x}} \qquad (1)$$

De même, l'équation d'Euler s'écrit en projection sur $\overrightarrow{u_x}$:

$$\mu\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\,\frac{\partial p}{\partial x}\quad\text{soit}\quad(\mu_0+\mu_1)\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+(v_0+v_1)\,\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=-\,\frac{\partial p_0}{\partial x}-\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

Soit en constatant que les termes d'ordre zéro ne contribuent pas et en ne conservant que les termes d'ordre un :

$$\boxed{\mu_0\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_0\,\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)=-\,\frac{\partial p_1}{\partial x}} \qquad (2)$$

Enfin l'équation traduisant le fait que les particules de fluide évoluent de manière isentropique n'est pas modifiée, puisque la vitesse n'y intervient pas. On a donc, comme dans le cours

$$\boxed{\mu_1=\mu_0\chi_S p_1} \qquad (3)$$

2) Il n'est pas possible ici d'établir l'équation d'onde modifiée sur p_1 ou v_1 à partir des trois équations précédentes. Ce n'est pas grave puisque l'on ne demande que la relation de dispersion. Or, on peut l'obtenir aussi en passant en complexe directement dans chacune des équations (1), (2) et (3) en utilisant les correspondances $\partial/\partial t=j\omega$ et $\partial/\partial x=-jk$. Il vient :

$$j\,(\omega-k\,v_0)\,\underline{\mu}_1=jk\,\mu_0\,\underline{v}_1\quad;\quad\mu_0 j\,(\omega-k\,v_0)\,\underline{v}_1=jk\,\underline{p}_1\quad\text{et}\quad\underline{\mu}_1=\mu_0\chi S\underline{p}_1$$

La dernière relation permet d'éliminer $\underline{\mu}_1$ dans la seconde et avec la première d'obtenir deux expressions de $\underline{v}_1/\underline{p}_1$:

$$\frac{\underline{v}_1}{\underline{p}_1}=\frac{\chi_s\,(\omega-k\,v_0)}{k}\qquad\text{et}\qquad\frac{\underline{v}_1}{\underline{p}_1}=\frac{k}{\mu_0\,(\omega-k\,v_0)}$$

En faisant apparaître la vitesse du son $c=1\sqrt{\mu_0\,\chi_s}$ dans le fluide au repos, ces deux expressions sont compatibles si :

$$(\omega-k\,v_0)^2=\frac{k^2}{\mu_0\,\chi_s}=k^2\,c^2\qquad\text{soit}\qquad\omega-k\,v_0=\pm k\,c\qquad\text{puis}\qquad\boxed{k=\frac{\omega}{v_0\pm c}}$$

Les vitesses de phase correspondantes s'écrivent :

$$v_{\varphi+}=c+v_0\qquad\text{et}\qquad v_{\varphi-}=-c+v_0$$

Ainsi *le courant brise la symétrie de la propagation :* les ondes se propageant selon $+\overrightarrow{u_x}$ se propagent à la vitesse $c+v_0$ donc sont entraînées par le courant alors que les ondes se propageant selon $-\overrightarrow{u_x}$ se propagent à la vitesse $c-v_0$ donc sont freinées par le courant.

Remarque :
On pouvait aussi obtenir l'équation (3) de manière un peu plus rigoureuse, en disant qu'à entropie constante $d\mu=\mu\chi_S dp$, c'est-à-dire :

$$\frac{d\mu}{dt}=\mu\,\chi_s\,\frac{dp}{dt}\quad\text{soit}\quad\frac{d\mu_0}{dt}+\frac{d\mu_1}{dt}=(\mu_0+\mu_1)\,\chi_s\left(\frac{dp_0}{dt}+\frac{dp_1}{dt}\right)$$

On en déduit, puisque p_0 et μ_0 sont constants

$$\frac{d\mu_1}{dt}=(\mu_0+\mu_1)\,\chi_s\,\frac{dp_1}{dt}$$

où $\frac{d}{dt}$ est la dérivée totale (ou particulaire). En éliminant le terme d'ordre deux et en explicitant les dérivées convectives à l'ordre un, il vient l'équation donnée dans la partie réponse du TD :

$$\boxed{\frac{\partial\mu_1}{\partial t}+v_0\,\frac{\partial\mu_1}{\partial x}=\mu_0\,\chi_s\left(\frac{\partial p_1}{\partial t}+v_0\,\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)} \qquad (3')$$

Cette équation permet bien de retrouver l'équation du cours, dans le cas où $v_0=0$. En effet

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad \text{s'intègre en} \quad \mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1$$

en éliminant la fonction de la position, issue de l'intégration partielle par rapport au temps et qui ne couple pas la position et l'espace, comme doit le faire une onde.

Le passage en complexe de la question 2) sur l'équation modifiée (3′) conduit à

$$j\,(\omega - k\,v_0)\,\underline{\mu}_1 = j\,(\omega - k\,v_0)\,\mu_0\,\chi_s\,\underline{p}_1$$

ce qui revient bien au même qu'avec la méthode du cours, en simplifiant par $j\,(\omega - k\,v_0)$.

Exercice 5 : Amortissement du son par viscosité

1) Seule l'équation d'EULER est changée par rapport au cours, puisqu'il faut rajouter les forces de viscosité. Les linéarisations donnent alors :

$$\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = -\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t} \\ \mu_0 \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\dfrac{\partial p_1}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \\ \mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1 \end{cases}$$

2) On dérive la troisième équation par rapport à x, pour faire apparaître du $\dfrac{\partial v_1}{\partial x}$, que l'on remplacera par du $\dfrac{\partial \mu_1}{\partial t}$, donc du $\dfrac{\partial p_1}{\partial t}$, d'après les deux premières équations :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right) + \eta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right) + \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)$$

en utilisant le théorème de SCHWARZ. La première équation de la question précédente, puis la seconde, permettent d'obtenir

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} - \frac{\eta}{\mu_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{\nu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial t}\right)$$

On en déduit finalement

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{\nu}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}\right) = 0} \text{ avec } \boxed{c^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_S}} \text{ et } \boxed{\nu = \frac{\eta}{\mu_0}}$$

Remarque : On retrouve bien l'équation de D'ALEMBERT habituelle en faisant $\eta = 0$.

3) $\tau = \nu/c^2$ est homogène à un temps. Pour l'air $\tau = 0{,}13$ ns, et pour $f = 20$ kHz, $\omega_{\max}\tau = 1{,}6.10^{-5} \ll 1$, la viscosité peut donc être négligée dans l'étude des ondes sonores, conformément au cours.

4) En remplaçant l'expression de $\underline{p_1}$ dans l'équation différentielle, on obtient la relation de dispersion suivante :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{1 - i\omega\tau}$$

5) Puisque $\omega\tau \ll 1$, on peut faire un développement limité de l'expression de k

$$k = \frac{\omega}{c}(1 - i\omega\tau)^{-1/2} \approx \frac{\omega}{c}\left(1 + \frac{i\omega\tau}{2}\right) = k_0 + i\alpha$$

en posant

— $k_0 = \frac{\omega}{c}$, comme dans le cas sans viscosité : il n'y a donc pas de dispersion.

— $\alpha = \frac{\omega^2\tau}{2c}$: le vecteur d'onde étant complexe, il y a absorption de l'onde (à cause des pertes d'énergie dues au travail des forces de viscosité).

On en déduit l'expression de la surpression

$$\boxed{p(x,t) = p_M \exp(-\alpha x)\cos\left(\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right)}$$

6) L'atténuation est sensible sur une distance $\delta = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{2c}{\omega^2\tau}$. Pour $f = 1$ kHz, on trouve $\delta = 130$ km, et pour $f = 10$ kHz : $\delta = 1{,}3$ km, ce qui rend l'effet de la viscosité tout à fait négligeable devant les causes géométriques (décroissance en $1/r$ de l'amplitude des ondes sphériques). En revanche, cela n'est plus le cas pour les ondes ultrasonores dans l'eau de mer par exemple, et doit être pris en compte pour l'étude des sonars.