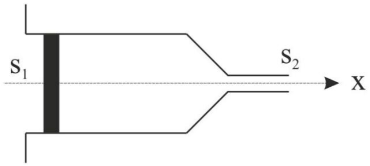
# Correction du TD n°11 : Bilans en méca flu

## Exercice 1 : Force sur une seringue




**1)** Par définition du débit volumique on a :

$$D_v = s_1\,v_1 = s_2\,v_2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_1 = \frac{D_v}{s_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_2 = \frac{D_v}{s_2}}$$

**2)** Soit $p_1$ la pression dans le liquide au niveau du piston. Le piston doit avancer à vitesse constante pour assurer un débit volumique constant donc il doit être en équilibre mécanique sous l'effet des forces de pression $-p_1\,s_1\,\overrightarrow{u_x}$ exercées par le liquide, des forces de pression $p_0\,s_1\,\overrightarrow{u_x}$ exercées par l'atmosphère et de la force $F_p\,\overrightarrow{u_x}$ exercée par l'opérateur. Ainsi :

$$-p_1\,s_1\,\overrightarrow{u_x} + p_0\,s_1\,\overrightarrow{u_x} + F_p\,\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{0} \qquad \text{soit} \qquad F_p = (p_1 - p_0)\,s_1$$

Il convient donc d'exprimer la différence de pression $p_1 - p_0$ qui est aussi la différence de pression entre le voisinage du piston où la vitesse vaut $v_1$ et la sortie où elle vaut $v_2$. Les conditions d'application de la relation de Bernoulli sur la ligne de courant confondue avec l'axe de révolution $Ox$ de la seringue sont réunies, de telle sorte qu'on peut écrire :

$$p_1 + \frac{\mu\,v_1^2}{2} = p_0 + \frac{\mu\,v_2^2}{2} \qquad \text{soit} \qquad p_1 - p_0 = \frac{\mu\,(v_2^2 - v_1^2)}{2} = \frac{\mu\,D_v^2}{2}\left(\frac{1}{s_2^2} - \frac{1}{s_1^2}\right)$$

On en déduit finalement l'expression de la force qu'il faut exercer sur le piston :

$$\boxed{F_p = \frac{\mu\,D_v^2\,(s_1^2 - s_2^2)}{2\,s_1\,s_2^2} > 0}$$

de telle sorte qu'il faut *pousser le piston* conformément à ce qu'on fait en pratique.

**3)** Considérons le sytème fermé constitué du réservoir, du piston, du tube d'éjection et du liquide contenu à l'instant $t$ dans la seringue. À l'instant $t + dt$, le même système fermé est constitué du réservoir, du piston qui a avancé de $v_1\,dt$, du tube d'éjection, du liquide contenu à l'instant $t + dt$ dans la seringue et du liquide qui est sorti entre $t$ et $t + dt$. Le régime étant stationnaire, tout se passe comme si on faisait passer une masse $\mu\,D_v\,dt$ de la vitesse $v_1\,\overrightarrow{u_x}$ à la vitesse $v_2\,\overrightarrow{u_x}$ donc la variation de quantité de mouvement vaut $\overrightarrow{dP^*} = \mu\,D_v\,dt\,(v_2 - v_1)\,\overrightarrow{u_x}$, d'où

$$\frac{\overrightarrow{dP^*}}{dt} = \mu\,D_v\,(v_2 - v_1)\,\overrightarrow{u_x} = \mu\,D_v^2\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)\overrightarrow{u_x} = \frac{\mu\,D_v^2\,(s_1 - s_2)}{s_1\,s_2}\,\overrightarrow{u_x}$$

Ce système est soumis aux forces de pression associées à une pression uniforme $p_0$ imposée par l'atmosphère sur une surface fermée dont la résultante est donc nulle. Il est soumis par ailleurs aux forces $F_p\,\overrightarrow{u_x}$ et $F_r\,\overrightarrow{u_x}$ exercées par l'opérateur respectivement sur le piston et sur le réservoir. La loi de la quantité de mouvement s'écrit alors en projection sur $\overrightarrow{u_x}$ :

$$\frac{dP^*}{dt} = 0 + F_p + F_r \qquad \text{soit} \qquad F_p + F_r = \frac{\mu\,D_v^2\,(s_1 - s_2)}{s_1\,s_2}$$

En utilisant l'expression de $F_p$ obtenue en **2**, il vient alors :

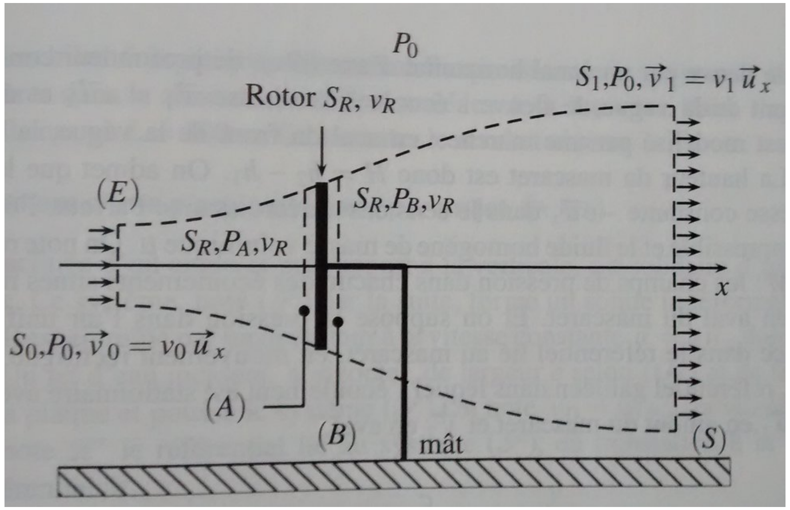
$$F_r = \frac{\mu\,D_v^2\,(s_1 - s_2)}{s_1\,s_2} - F_p = \frac{\mu\,D_v^2\,(s_1 - s_2)}{s_1\,s_2} - \frac{\mu\,D_v^2\,(s_1^2 - s_2^2)}{2\,s_1\,s_2^2}$$

En utilisant une identité remarquable pour factoriser $s_1 - s_2$, il vient :

$$F_r = \frac{\mu\,D_v^2\,(s_1 - s_2)\,(2s_2 - (s_1 + s_2))}{2\,s_1\,s_2^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{F_r = -\frac{\mu\,D_v^2\,(s_1 - s_2)^2}{2\,s_1\,s_2^2} < 0}$$

de telle sorte qu'il faut *retenir le réservoir* conformément à ce qu'on fait en pratique.

## Exercice 4 : Éolienne




**1)** L'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique :

$$\boxed{v_0 S_0 = v_R S_R = v_1 S_1}$$

Au delà de l'éolienne, la vitesse de l'air a diminué, donc la section s'est élargie, d'où l'allure des lignes de courant.

**2)** On considère le système ouvert $\Sigma(t)$ formé de l'air contenu à la date $t$ dans le tube de courant, entre les sections $S_0$ et $S_1$. Pour pouvoir appliquer les théorèmes de la mécanique, on construit alors le système fermé $\Sigma^*$ défini :

- à $t$ par $\Sigma^*(t) = \Sigma(t) + dm_0$, où $dm_0$ est la masse d'air qui va rentrer dans $\Sigma$ entre $t$ et $t + dt$ ;
- à $t + dt$ par $\Sigma^*(t + dt) = \Sigma(t + dt) + dm_1$, où $dm_1$ est la masse d'air qui va sortir de $\Sigma$ entre $t$ et $t + dt$ ;

En régime stationnaire $\Sigma(t) = \Sigma(t + dt)$. Un bilan de masse donne alors $dm = dm_0 = dm_1 = \mu S_0 v_0 dt$, et un bilan de quantité de mouvement (cf cours) $\frac{d\vec{P^*}}{dt} = \frac{dm}{dt}(\vec{v_1} - \vec{v_0})$.

Or, les forces extérieures s'exerçant sur $\Sigma^*$ sont la force $\vec{F}$ du rotor de l'éolienne et les forces de pression. Mais, la pression étant uniforme tout autour du système étudié, la force résultante est nulle.

Finalement, il reste, en projetant sur l'axe $(Ox)$ : $\boxed{F = \mu v_0 S_0 (v_1 - v_0)}$.

**3)** On applique maintenant le même type de bilan de quantité de mouvement entre $A$ et $B$. La différence étant que la résultante des forces de pression n'est plus nulle, ce qui donne $\boxed{F + S_R(p_A - p_B) = \mu S_0 v_0 (v_R - v_R) = 0}$.

Il reste maintenant à relier la pression à la vitesse. On utilise pour cela la relation de BERNOULLI sur une ligne de courant entre l'entrée (0) et $A$, ainsi qu'entre $B$ et la sortie $(1)$. Cela est rendu possible par le fait que l'écoulement y est parfait, stationnaire, incompressible et homogène (PSIH). On obtient alors :

$$p_0 + \mu \frac{v_0^2}{2} = p_A + \mu \frac{v_R^2}{2} \text{ et } p_B + \mu \frac{v_R^2}{2} = p_0 + \mu \frac{v_1^2}{2}$$

On en déduit que $p_A - p_B = \mu \frac{v_0^2 - v_1^2}{2}$, et donc $\boxed{F = \mu S_R \frac{v_1^2 - v_0^2}{2}}$.

*Remarque* : On ne peut pas appliquer BERNOULLI entre $A$ et $B$, car l'écoulement n'y est pas parfait à cause de sa forte inhomogénéité au niveau des pales. La viscosité y joue alors un rôle non négligeable, qui se traduit par l'existence d'une couche limite.

En égalant les deux expressions de $F$, on obtient :

$$\mu v_0 S_0 (v_1 - v_0) = \mu S_R \frac{(v_1 - v_0)(v_1 + v_0)}{2}$$

soit $v_R S_R \overset{1)}{=} v_0 S_0 = \frac{(v_1 + v_0)}{2} S_R$, ce qui conduit finalement à $\boxed{v_R = \frac{v_0 + v_1}{2}}$.

**4)** Un bilan d'énergie cinétique sur $\Sigma^*$ en régime stationnaire donne (cf cours) :

$$\frac{dEc^*}{dt} = \frac{1}{2}\mu S_0 v_0 (v_1^2 - v_0^2) \overset{1)}{=} \frac{1}{2}\mu S_R v_R (v_1^2 - v_0^2) \overset{3)}{=} \frac{1}{4}\mu S_R (v_0 + v_1)(v_1^2 - v_0^2)$$

Or, si on appelle $\mathcal{P}$ la puissance des actions exercées par le vent sur le rotor, alors la puissance des actions exercées par le rotor sur le vent est $-\mathcal{P}$, d'après le principe des actions réciproques. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors $\frac{dEc^*}{dt} = -\mathcal{P}$, ce qui conduit, en introduisant $\alpha = v_1 / v_0$, à

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{4}\mu S_R v_0^3 (1 + \alpha)(1 - \alpha^2)}$$

dont le maximum en fonction de $\alpha$ est la valeur annulant la dérivée

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\alpha} = \frac{1}{4}\mu S_R v_0^3(1 - 2\alpha - 3\alpha^2) = 0$$

soit $\alpha = 1/3$ et $\boxed{\mathcal{P}_{\max} = \frac{8}{27}\mu S_R v_0^3.}$

**5)** Pour l'éolienne de faible puissance, on obtient $\boxed{\mathcal{P}_{\max} \approx 700\text{ W},}$ donc $\frac{\mathcal{P}_{\text{nom}}}{\mathcal{P}_{\max}} = 57\%$.

Pour l'éolienne de forte puissance, on obtient $\boxed{\mathcal{P}_{\max} \approx 2125\text{ kW},}$ donc $\frac{\mathcal{P}_{\text{nom}}}{\mathcal{P}_{\max}} = 31\%$.

Ces rapports représentent les rendements des éoliennes, calculés par rapport à l'énergie maximale théoriquement récupérable. Dans la chaîne énergétique hélice - générateur électrique - transformateur éventuel, c'est de loin l'hélice qui a le plus mauvais rendement et ce, d'autant plus qu'elle est de forte puissance ; c'est donc la transformation énergie cinétique du vent $\rightarrow$ énergie mécanique sur l'axe de l'éolienne qui se fait le plus difficilement !