TD n°14 : Magnétostatique

Exercice 1 : Câble coaxial

1) Déterminer le champ $\overrightarrow{B}$ créé en tout point de l'espace par un câble infini constitué d'une part d'un cylindre plein d'axe Oz et de rayon R_1 parcouru par une densité de courant $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{u_z}$ uniforme, d'intensité totale I, et d'autre part d'un cylindre creux de même axe et de rayon $R_2 > R_1$ parcouru par un courant d'intensité $-I$.

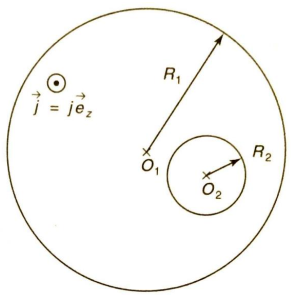
2) Calculer l'énergie magnétique pour une longueur h de câble selon Oz et en déduire l'inductance linéique du câble.

Exercice 2 : Cylindre avec cavité cylindrique

Une cavité cylindrique d'axe (O_2z) et de section circulaire de rayon R_2 a été pratiquée dans un cylindre conducteur d'axe (O_1z) et de rayon R_1.

En dehors de la cavité, le conducteur est parcouru par un courant constant de densité uniforme $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{e_z}$.

Déterminer le champ magnétique en tout point de la cavité[a].



[a]. On utilisera l'expression intrinsèque du champ magnétique crée à l'intérieur d'un cylindre infini ...

Exercice 3 : Ligne bifilaire (Centrale)

1) Exprimer le champ magnétique créé par une plaque infinie comprise entre les plans $z = \pm e/2$ et parcourue par des courants de densité $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{u_x}$ uniforme.

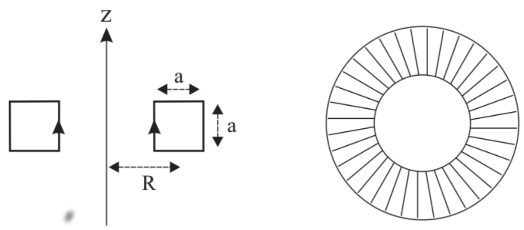
2) On envisage désormais deux rubans rectangulaires de longueur a selon $\overrightarrow{u_x}$, de largeur b selon $\overrightarrow{u_y}$, d'épaisseur $e \to 0$, parallèles et distants de c selon $\overrightarrow{u_z}$, parcourus respectivement par des courants d'intensité I et $-I$. Comme $c \ll b \ll a$, on admet que le champ magnétique a la même géométrie que si on avait $b \to \infty$ et $a \to \infty$. Exprimer le champ magnétique total et l'énergie magnétique du circuit. En déduire son inductance L par analogie avec une bobine.

3) On rappelle l'expression de la force $\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{B}\,d\tau$ subie par un élément de volume $d\tau$ parcouru par un courant de densité $\overrightarrow{j}$ et plongé dans un champ $\overrightarrow{B}$. Exprimer la force exercée par le ruban inférieur sur le ruban supérieur. Montrer que tout se passe comme si une pression d'origine magnétique p_m apparaissait à la surface des rubans et l'exprimer. Calculer p_m pour $I = 100$ A et $b = 1$ cm.

4) Dans une installation d'IRM, on utilise des bobines pour modifier un champ statique spatialement et temporellement. Typiquement l'intensité $I(t)$ est constituée d'impulsions de période $T = 10$ ms. En déduire pourquoi on entend un son et donner sa fréquence.

Exercice 4 : Charge dans une bobine torique (X-ESPCI)

Peut-on maintenir une particule de charge q et de masse m dans une cavité vide de forme torique de section carrée de côté a et de rayon moyen R sur laquelle on a bobiné $N \gg 1$ spires carrées de côté a placées en série et parcourue par un courant I ?[a]



[a]. Indications en cours d'oral :

i) on lance la particule en $r = R$ avec une vitesse v_0 orthoradiale ;

ii) supposer que $r(t) \approx R$.

Exercice 5 : Champ hors de l'axe d'une spire

Soit une spire circulaire de centre O, d'axe Oz et de rayon a parcourue par un courant d'intensité I. On s'intéresse au champ magnétique en un point M à une altitude z au dessus de la spire et à une distance r de cet axe.

1) À quels résultats conduit l'étude des propriétés de symétrie et d'invariance ?

2) On note $B_0(z) = B_z(r = 0, z)$. Montrer à partir de la conservation du flux du champ magnétique à travers un petit cylindre centré sur l'axe Oz et passant par M, que si r est suffisamment petit par rapport à a, alors la composante radiale du champ en M s'écrit :

$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0(z)}{dz}$$

3) Le signe de $B_r(r,z)$ était-il prévisible ? Esquisser et orienter les lignes de champ magnétique autour de la spire, et de son axe.

Exercice 6 : Effet Meissner dans un supraconducteur

On envisage une plaque supraconductrice comprise entre les plans d'équations $x = \pm e$. Des sources extérieures imposent un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B_e} = B_0\,\overrightarrow{u_z}$.

On constate expérimentalement que le supraconducteur tend à expulser le champ magnétique (effet MEISSNER) en créant des courants localisés au voisinage de sa surface pour compenser le champ $\overrightarrow{B_e}$. Pour rendre compte de cet effet, on admet que dans un supraconducteur, la loi d'OHM est remplacée par la relation phénoménologique de LONDON qui relie le vecteur densité de courant au champ magnétique en introduisant un paramètre δ caractéristique du matériau :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{j} = -\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0\,\delta^2} \tag{1}$$

1) On rappelle la relation $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\overrightarrow{a}) - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{a}$. Montrer que la relation (1) est compatible avec l'une des équations de MAXWELL. En utilisant l'autre, montrer que le champ magnétique est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{B}}{\delta^2}$$

2) On cherche dans le matériau un champ magnétique de la forme $\overrightarrow{B} = B(x)\,\overrightarrow{u_z}$. On admet que le supraconducteur ne modifie pas le champ appliqué à l'extérieur et que le champ magnétique est continu à l'interface vide-supraconducteur. Déterminer $B(x)$ en fonction de B_0, x et δ. Tracer l'allure de son graphe pour $\delta \ll e$.

3) En déduire l'expression de $\overrightarrow{j} = j(x)\,\overrightarrow{u_y}$. Tracer l'allure du graphe de $j(x)$ pour $\delta \ll e$.

Exercice 7 : Champ magnétique crée par convection de charges dans un isolant (X-ESPCI)

Un cylindre isolant, infini d'axe Oz et de rayon a, porte une charge répartie uniformément en surface avec une densité surfacique σ. Le cylindre est en rotation à vitesse angulaire ω constante autour de son axe. Le mouvement des charges crée une géométrie de courants analogue à celle d'un solénoïde infini d'axe Oz pour laquelle on cherche donc un champ magnétique de la forme $\overrightarrow{B} = B(r)\,\overrightarrow{u_z}$ avec $B(r > a) = 0$. On envisage comme contour (C) pour appliquer le théorème d'Ampère un cadre rectangulaire de hauteur h selon Oz dont les côtés parallèles à Oz sont situés l'un à l'intérieur du cylindre et l'autre à l'extérieur. On oriente (C) par sa normale parallèle à $\overrightarrow{u_\theta}$.

1) Exprimer la charge q qui traverse le contour (C) pendant que le cylindre fait un tour. En déduire l'intensité enlacée par (C) puis l'expression de $B(r < a)$.

2) En réalité le cylindre possède une longueur h finie selon son axe Oz. Exprimer l'énergie magnétique et en déduire que tout se passe comme si le cylindre possédait un moment d'inertie supplémentaire J^* dû au mouvement des charges.

Réponses

Exercice 1 : Câble coaxial

1) $\overrightarrow{B} = B(r)\,\overrightarrow{u_\theta}$; $B(r < R_1) = \mu_0\,I\,r/2\pi R_1^2$; $B(R_1 < r < R_2) = \mu_0\,I/2\pi r$; $B(r > R_2) = 0$;

2) $U_m = (\mu_0\,I^2\,h/4\pi)\,(\ln(R_2/R_1) + 1/4)$; $\Lambda = 2\,U_M/h\,I^2 = (\mu_0/2\pi)\,(\ln(R_2/R_1) + 1/4)$

Exercice 2 : Cylindre avec cavité cylindrique

$\overrightarrow{B_{tot}} = \frac{\mu_0}{2}\,\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{O_1O_2}$ (penser au th. de superposition)

Exercice 3 : Ligne bifilaire (Centrale)

1) $\overrightarrow{B} = B_y(z)\,\overrightarrow{u_y}$ avec $B_y(-z) = -B_y(z)$; $B_y(0 < z < e/2) = -\mu_0\,j\,z$; $B_y(z > e/2) = -\mu_0\,j\,e/2$

2) $\overrightarrow{B} = B_y(z)\,\overrightarrow{u_y}$ avec $B_y = -\mu_0\,I/b$ entre les deux rubans et $B_y = 0$ ailleurs ; $U_m = \mu_0\,a\,c\,I^2/2b$; $L = \mu_0\,a\,c/b$

3) $\overrightarrow{F} = (\mu_0\,I^2\,a/2b)\,\overrightarrow{u_z}$ répulsive ; $p_m = \mu_0\,I^2/2b^2 \approx 60$ Pa, ce qui correspond à un son puissant.

4) $f = 0{,}2$ kHz

Exercice 4 : Charge dans une bobine torique $\overrightarrow{B} = (\mu_0\,N\,I/2\pi\,r)\,\overrightarrow{u_\theta}$; $k = \mu_0\,N\,I\,q/2\pi\,m$; $\dot{z} = k\,\ln(r/R)$; $r^2\,\dot{\theta} = v_0\,R$; $\dot{r}^2 + v_0^2\,R^2/r^2 + k^2\,(\ln(r/R))^2 = v_0^2$; r oscille entre r_m et r_M qui doivent être entre $R - a/2$ et $R + a/2$; il faut aussi voir $z(t)$...

Exercice 6 : Effet Meissner dans un supraconducteur

1) $\overrightarrow{B} = B_0\dfrac{\mathrm{ch}(x/\delta)}{\mathrm{ch}(e/\delta)}\overrightarrow{u_z}$.

2) $\overrightarrow{j} = -\dfrac{B_0\mathrm{sh}(x/\delta)}{\mu_0\delta\mathrm{ch}(e/\delta)}\overrightarrow{u_y}$.

Exercice 7 : Champ magnétique crée par convection de charges dans un isolant

1) $q = \sigma 2\pi a h$ et $I = q/T = q\omega/2\pi$ donc $B(r < a) = \mu_0\sigma a\omega$.

2) $U_m = \dfrac{B^2}{2\mu_0}\pi a^2 h = \dfrac{1}{2}J^*\omega^2$.