TD n°15 : Dipôles

Exercice 1 : Estimation de la taille du noyau terrestre

Le magnétisme terrestre est assimilé à celui d'un aimant géant situé au centre de la Terre (le noyau terrestre interne solide).

1) On note $\mathcal{M}$ le moment magnétique de l'aimant terrestre ; quel est en ordre de grandeur l'expression du champ magnétique crée par ce dipôle à la surface de la Terre de rayon R_T ?

Faire l'application numérique pour $\mathcal{M}$ en prenant $R_T \approx 6400$ km et $B_T \approx 4 \cdot 10^{-5}$ T (composante totale du champ).

2) En déduire le nombre N d'atomes de la matière "aimantée" constituant le noyau terrestre sachant que chaque atome concerné porte un moment magnétique de l'ordre du magnéton de BOHR.

3) En prenant des valeurs "moyennes" pour la masse molaire (mélange de fer et de nickel) $M \approx 57\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ et la masse volumique $\rho \approx 8\,\mathrm{kg \cdot L^{-1}}$, estimer le volume V concerné par la matière aimantée.

4) En déduire le rayon R du noyau terrestre interne supposé sphérique ; commenter le résultat et discuter le modèle.

Exercice 2 : Potentiel et champ d'un quadripôle

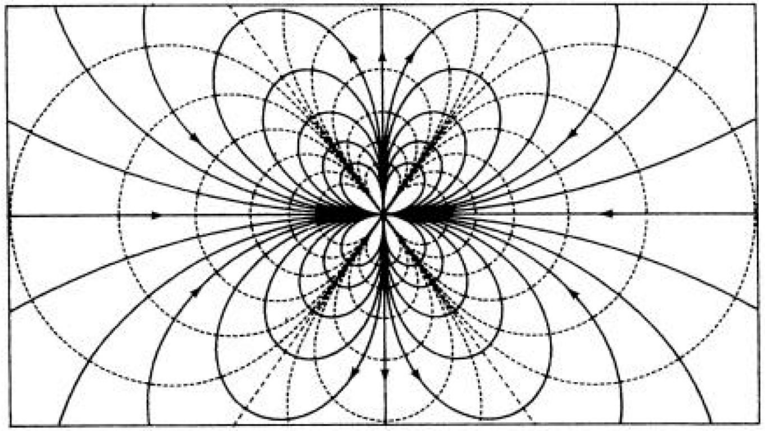
En un point O est placée la charge $+2q$. Deux points A et B symétriques par rapport à O portent chacun la charge $-q$. On pose $OA = OB = a$.
On se propose d'étudier le champ crée par cette distribution en un point M éloigné. On pose $OM = r \gg a$ et $\theta = (OA, OM)$.

1) Quel est le moment dipolaire de cette distribution ? Pourquoi peut-on dire que cette distribution peut représenter la molécule de CO_2 ?

2) Exprimer le potentiel $V(M)$ en fonction de r et θ. Commentaires ?

3) Calculer les composantes radiale et orthoradiale du champ $\overrightarrow{E}(M)$. Quand s'annulent-elles ?

4) On donne l'équation polaire des lignes de champ $r = k\sqrt{|\cos\theta|}|\sin\theta|$. Interpréter la figure donnée ci-dessous :



Exercice 3 : Interactions entre deux moments magnétiques

On donne le champ magnétique crée en un point P par un dipôle de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ placé en A :

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{u_{AP}})\overrightarrow{u_{AP}} - \overrightarrow{\mathcal{M}}}{AP^3}$$

Deux dipôles magnétiques de moments $\overrightarrow{\mathcal{M}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_2$ sont respectivement en O et en M.

1) Exprimer l'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles en fonction de $\overrightarrow{\mathcal{M}}_1$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}_2$, $\overrightarrow{OM}$ et OM.

2) On suppose que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_2$ sont colinéaires à $\overrightarrow{OM}$. Exprimer la force entre les dipôles. Commenter.

3) Même question si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_2$ sont colinéaires entre eux et perpendiculaires à $\overrightarrow{OM}$.

4) Déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie d'interaction entre deux atomes possédant un moment magnétique.

5) À quelle température cette énergie est-elle de l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique ? Conclure quant à l'origine microscopique des propriétés magnétiques de la matière.

Exercice 4 : Mouvement d'une charge dans le champ d'un dipôle électrique

Un dipôle électrique de moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ est fixé en O. Une particule M, de masse m et de charge q négative ($q < 0$), repérée par ses coordonnées polaires $r = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{p}, \overrightarrow{OM})$, est lancée en $M_0(r = r_0, \theta = \theta_0)$ dans le plan $(\overrightarrow{p}, M)$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$.

1) Écrire les équations du mouvement de la particule, de poids négligeable, dans le champ électrique du dipôle.
2) On souhaite que la particule décrive un arc de cercle de centre O et de rayon r_0
   a) Déterminer en grandeur et en direction la vitesse v_0 qu'il faut communiquer à la charge lancée depuis M_0 ($OM_0 = r_0, \theta_0 = 0$).
   b) Montrer que l'énergie mécanique de la particule sur sa trajectoire circulaire est nulle.
   c) Quelles sont les valeurs extrêmes de l'angle polaire θ sur l'arc de cercle ? En déduire l'accélération angulaire maximale $\ddot{\theta}_{max}$ et la période T des oscillations de la charge q en fonction de m, p, q et r_0.
   On admettra le résultat de l'intégrale suivante $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = 2,622$

Réponses

Exercice 1 : Estimation de la taille du noyau terrestre

$\mathcal{M} \approx 10^{23}\ \mathrm{A \cdot m^2}$, $N \approx 10^{46}$ atomes, $V \approx 10^{17}\ \mathrm{m^3}$ soit $R \approx 300$ km.

Exercice 2 : Potentiel et champ d'un quadripôle

1) $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = q\overrightarrow{AO} + q\overrightarrow{BO} = qa\overrightarrow{u_x} + q(-a\overrightarrow{u_x}) = \overrightarrow{0}$

2) $V(M) = \dfrac{qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}(1 - 3\cos^2\theta)$

Exercice 3 : Interactions entre deux moments magnétiques

1) $\mathcal{E}_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}_1}.\overrightarrow{B_2}(O) = -\overrightarrow{\mathcal{M}_2}.\overrightarrow{B_1}(M)$.
2) $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathcal{E}_p = -\dfrac{6\mu_0\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{4\pi r^4}\overrightarrow{u_r}$
4) $\mathcal{E}_p \approx 10^{-23}$ J soit $T \approx 1$ K ...

Exercice 4 : Mouvement d'une charge dans le champ d'un dipôle électrique

1) $\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \dfrac{2pq\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 m r^3} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \dfrac{pq\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 m r^3} \end{cases}$

2.a) $v_0 = r_0|\dot{\theta}_0| = \sqrt{\dfrac{p|q|}{2\pi\epsilon_0 m r_0^2}}$

2.b) $E_p = qV(M) = \dfrac{pq\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = -\dfrac{p|q|\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = -E_c$

3) $\ddot{\theta}_{max} = \dfrac{p|q|}{4\pi\epsilon_0 m r_0^4}$

4) $T = 4\sqrt{\dfrac{2\pi\epsilon_0 m r_0^4}{p|q|}}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$