

TD n°16 : Équations de MAXWELL et ondes dans le vide

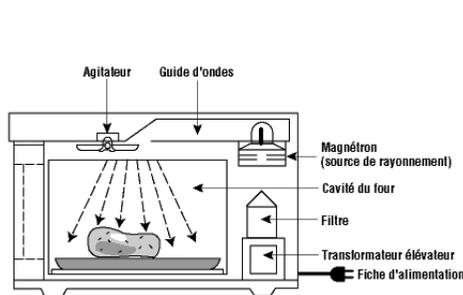
Exercice 1 : Cylindre dans un four à induction

Un cylindre de rayon a , de hauteur h et d'axe (Oz), constitué d'un métal ohmique de conductivité γ , est plongé dans un champ magnétique uniforme variable : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$, où B_0 et ω sont des constantes. On suppose que le champ magnétique n'est pas modifié par la présence du cylindre

- 1) Justifier l'existence d'un champ électrique à l'intérieur du cylindre de la forme $\vec{E} = E(r, z, t) \vec{u}_\theta$, en coordonnées cylindriques. En appliquant l'équation de MAXWELL FARADAY sous forme intégrale à un cercle d'axe (Oz), déterminer $E(r, z, t)$. En déduire la densité de courant volumique dans le cylindre.
- 2) Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet JOULE dans le cylindre.
- 3) Trouver l'ordre de grandeur du champ magnétique créée par les courants qui se développent dans le cylindre. En déduire une condition pour que l'hypothèse faite dans l'énoncé soit valable.

Exercice 2 : Micro onde (Centrale)

D'un point de vue simplifié, un four à micro-ondes est constitué d'un générateur d'ondes appelé magnétron, d'une cavité rectangulaire appelée guide d'onde chargé de «conduire» les ondes vers la cavité où cuisent les aliments en absorbant des ondes dont les fréquences correspondent à des modes propres de vibration des molécules des aliments, l'eau en particulier.



On s'intéresse ici au flux d'énergie pouvant être transporté par le guide d'onde, sur lequel aucune connaissance spécifique n'est requise au préalable. Celui-ci est modélisé par une cavité à parois métalliques, de section rectangulaire (de

dimensions a selon x et b selon y avec $a = 2b = 8$ cm), ouverte sur le magnétron à une extrémité, sur le four à l'autre extrémité.

On admet que le champ électrique de l'onde se propageant dans ce dispositif a pour expression

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

- 1) L'air dans lequel l'onde évolue est assimilé à du vide sans charges ni courants. Établir la relation de dispersion pour l'onde étudiée.
- 2) L'onde étudiée a la même fréquence f qu'aurait une onde plane progressive monochromatique (ou harmonique) de longueur d'onde $\lambda_0 = 12,5$ cm se propageant dans le vide illimité. Justifier que la propagation peut se faire sans atténuation, mais que ce ne serait pas forcément le cas pour d'autres fréquences.
- 3) Le champ électrique doit rester inférieur à $E_{max} = 3$ MV \cdot m⁻¹, sinon, des étincelles apparaissent, ce qui nuit au transport des ondes et peut endommager les parois du guide. Calculer la puissance maximale pouvant être transportée par ce guide.
- 4) En se basant sur des temps de cuisson observés dans la vie courante, estimer si il y aura des risques d'étincelles dans le guide d'onde d'un four à micro-ondes domestique.
- 5) La taille de la cavité du four est-elle en accord avec les longueurs d'onde utilisées? Quel est l'intérêt du plateau tournant? Pourquoi y a-t-il une grille avec des trous sur la porte vitrée du four?

Exercice 3 : Propagation dans un milieu chiral

Un milieu chiral est un milieu linéaire dans lequel les OPPH polarisées circulairement se propagent selon \vec{u}_z en conservant leur polarisation, avec un vecteur d'onde $k_g \vec{u}_z$ pour les PC_g et un vecteur d'onde $k_d \vec{u}_z$ pour les PC_d .

Une OPPH polarisée rectilignement selon \vec{u}_x arrive dans le plan $z = 0$ et traverse une épaisseur L de milieu chiral. Montrer qu'en $z = L$ l'onde est polarisée rectilignement dans une direction faisant un angle α avec \vec{u}_x et exprimer α en fonction des données.

Exercice 4 : Pression de radiation

1) Soit une onde plane, monochromatique, de fréquence ν , se propageant dans la direction et le sens de \vec{u}_x , dont le champ électrique est $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$. On rappelle que l'éclairement \mathcal{E} est la puissance moyenne qui traverse une surface d'aire unité perpendiculaire à la direction de propagation.

Exprimer \mathcal{E} en fonction de ϵ_0 , c et E_0 .

2) On considère cette onde comme un faisceau de photons se propageant dans la direction et le sens de \vec{u}_x .

a) Exprimer le nombre N_0 de photons traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à (Ox) en fonction de \mathcal{E} , ν et la constante de PLANCK h .

b) L'onde arrive sur une surface plane perpendiculaire à (Ox) , d'aire S , parfaitement réfléchissante. On étudie le rebond des photons sur cette surface.

Quelle est la quantité de mouvement reçue par la paroi au cours d'un choc photon-paroi?

Quelle est la force subie par la paroi en fonction de \mathcal{E} , S et c ?

Exprimer la pression p subie par la paroi en fonction de \mathcal{E} et c , puis en fonction de ϵ_0 et E_0 .

c) Reprendre la question ci-dessus lorsque la paroi est parfaitement absorbante.

d) Calculer \mathcal{E} , E_0 et p sur une paroi totalement absorbante pour un laser ayant un diamètre $d = 5,0$ mm et une puissance moyenne $\mathcal{P} = 1,0 \cdot 10^2$ W (laser industriel de découpe).

3) L'onde est maintenant absorbée par une sphère de rayon a , bien inférieur au rayon du faisceau.

a) Quelle est, en fonction de \mathcal{E} , a et c la force \vec{F} subie par la sphère?

b) Le Soleil donne au voisinage de la Terre (juste au dessus de l'atmosphère terrestre) l'éclairement $\mathcal{E} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. L'émission est isotrope, la distance Terre-Soleil est égale à $D = 1,5 \cdot 10^{11}$ m et sur une surface de dimension petite devant D , l'onde arrivant du Soleil est quasi plane.

Quelle est la puissance \mathcal{P}_0 émise par le Soleil?

Un objet sphérique, de rayon a , de masse volumique μ , est, dans le vide interplanétaire, à la distance r du Soleil et absorbe totalement le rayonnement solaire. Évaluer le rapport de la force due à l'absorption du rayonnement solaire et la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur cet objet dans les deux cas suivants :

• cas d'une météorite : $\mu = 3,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $a = 1,0$ m.

• cas d'une poussière interstellaire : $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $a = 0,10 \mu\text{m}$.

Commenter.

On donne la constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ et la masse du Soleil $M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg.

Exercice 5 : Magnétorésistance (Centrale)

On considère un matériau conducteur comportant n porteurs de charges (de charge q et de masse m) par unité de volume. Il est soumis à un champ électrique permanent \vec{E} et un champ magnétique uniforme et permanent \vec{B} . Chaque porteur de charge est soumis en plus à une force $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$.

1) En appliquant la deuxième loi de NEWTON en régime permanent, montrer que le vecteur densité de courant électrique \vec{j} est relié à \vec{E} et à \vec{B} par :

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} + R_H \vec{B} \wedge \vec{j}$$

où σ et R_H sont respectivement la conductivité électrique et la constante de HALL que l'on exprimera en fonction de n , m , q et τ .

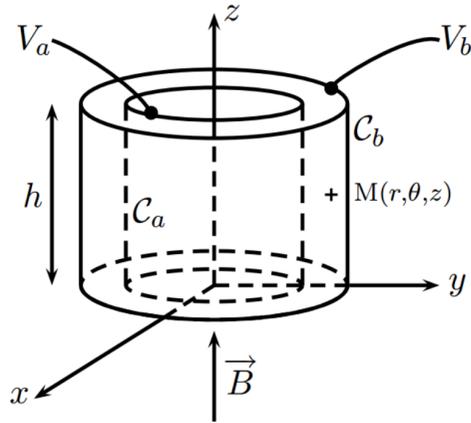
Le matériau de conductivité σ occupe d'espace entre deux cylindres coaxiaux C_a et C_b , de rayons respectifs a et b ($a < b$) portés respectivement aux potentiels V_a et V_b . On néglige l'effet de bord.

On considère d'abord que le champ magnétique est nul $\vec{B} = \vec{0}$

2) Déterminer l'expression du champ électrique \vec{E} entre les deux cylindres.

3) Déterminer l'expression de la résistance R_0 du conducteur. Que devient-elle si $b = a + e$ avec $e \ll a$?

Le matériau est à présent plongé dans un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B \vec{u}_z$.



- 4) Déterminer les composantes de \vec{j} en fonction de σ , R_H , B et j_0 , le module de \vec{j} en l'absence de \vec{B} .
- 5) En déduire la résistance R du conducteur.
- 6) On donne :
- pour le cuivre : $R_H \approx -0,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$; $\sigma \approx 6 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
pour le semi-conducteur InAs : $R_H \approx +0,7 \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$; $\sigma \approx 1 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
- Pour chacun des matériaux, calculer $\delta = \frac{R-R_0}{R_0}$ pour $B = 1 \text{ T}$. Commentaire.

Réponses

Exercice 1: Cylindre dans un four à induction

- 1) $E(r, z, t) = \frac{B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t)$ et $\vec{j} = \frac{\gamma B_0 r \omega}{2} \sin(\omega t) \vec{u}_\theta$.
- 2) $\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{\pi}{16} h \gamma B_0^2 a^4 \omega^2$.
- 3) $\omega \ll \frac{1}{\gamma \mu_0 a^2}$.

Exercice 2: Micro onde (Centrale)

- 1) $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$
- 2) il faut $a > \frac{\lambda_0}{2}$
- 3) $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 k}{2\mu_0 \omega} \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \vec{e}_z$ et $\mathcal{P} = \frac{E_0^2 k a^2}{8\mu_0 \omega} = \frac{E_0 a^2}{8\mu_0 c} \sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{4a^2}} = 11,9 \text{ MW}$
- 4) $\mathcal{P} \approx 1 \text{ kW}$

Exercice 3: Propagation dans un milieu chiral

Décomposer la PR en une PC_g et une PC_d en $z = 0$ puis les propager et voir ce que l'on a en sortie : $\alpha = \frac{(k_g - k_d)L}{2}$.

Exercice 4: Pression de radiation

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2, N_0 = \frac{\mathcal{E}}{h\nu}, \vec{F} = N_0 S \frac{2h\nu}{c} \vec{u}_x = \frac{2\mathcal{E}S}{c} \vec{u}_x, p = 2 \frac{\mathcal{E}}{c} = \epsilon_0 E_0^2.$$

Si la paroi est totalement absorbante $p' = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$.

Pour le laser $p = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$.

Le Soleil émet une puissance $\mathcal{P}_0 = \mathcal{E} 4\pi D^2 = 4,0 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Le rapport des forces vaut $2,0 \cdot 10^{-7}$ pour la météorite et 5,0 pour la poussière.

Exercice 5: Magnétorésistance

- 2) $\vec{E} = \frac{V_a - V_b}{r \ln(b/a)} \vec{u}_r$
- 3) $R_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi h \sigma}$.
- 4) $j_r = \frac{j_0}{1 + (\sigma B R_H)^2}$, $j_\theta = \frac{-j_0 \sigma B R_H}{1 + (\sigma B R_H)^2}$ et $j_z = 0$
- 5) $R = R_0 [1 + (\sigma B R_H)^2]$
- 6) $\delta = \sigma^2 B^2 R_H^2$. Elle vaut $1,8 \cdot 10^{-5}$ pour le cuivre et 0,49 pour InAs.