TD n°17 : Ondes EM dans les milieux et aux interfaces

Exercice 1 : Ondes longitudinales dans un plasma

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense de densité volumique de charge ρ *non* nulle.

On pose $\overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{\underline{E_0}} \exp(i(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}))$ et $\overrightarrow{\underline{B}} = \overrightarrow{\underline{B_0}} \exp(i(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}))$.

1) Établir l'équation du mouvement d'un électron de masse m_e, associé à la densité n_e et de charge $-e$ en faisant les approximations qui sembleront nécessaires. Montrer que l'on peut définir une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ pour le plasma.

2) À l'aide des équations de MAXWELL et de l'équation locale de conservation de la charge, établir une nouvelle expression de $\underline{\gamma}$ en fonction de ω et ϵ_0.
En déduire que la pulsation de l'onde est fixée.

3) Montrer que $\overrightarrow{\underline{B}} = \overrightarrow{0}$. En déduire la direction de $\overrightarrow{k}$. Quel nom donne-t-on à ce type de propagation ?

Exercice 2 : Guide d'ondes métallique (suite)

On modélise un *guide d'ondes* par un cylindre métallique creux illimité, d'axe Oz, dont la section droite est le rectangle $\{0 \leq x \leq a\,;\, 0 \leq y \leq b\}$ et dont l'intérieur est vide. On adopte pour les parois le modèle du conducteur parfait qui impose comme conditions aux limites la nullité de la composante tangentielle du champ électrique et de la composante normale du champ magnétique à l'interface vide-métal. On cherche en notation complexe un champ électrique dans le vide au sein du guide d'onde de la forme :

$$\overrightarrow{\underline{E}} = A(x,y)\exp(j\omega t - jk_g z)\,\overrightarrow{u_y}$$

1) Montrer que $A(x,y)$ ne dépend pas de y et que $A(x=0)=0$ et $A(x=a)=0$.

2) Écrire l'équation différentielle dont est solution $A(x)$, et montrer que nécessairement $k_g^2 < \omega^2/c^2$. En déduire que les solutions possibles, qu'on appellera *modes* d'indice n dans la suite, sont de la forme :

$$\overrightarrow{\underline{E}_n} = \alpha_n \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{a}\right)\exp(j\omega t - jk_g z)\,\overrightarrow{u_y} \quad \text{avec } k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\,\pi^2}{a^2} \quad \text{et } n \text{ entier}$$

3) Discuter la nature des ondes obtenues et faire apparaître une pulsation critique $\omega_{c,n}$. Calculer la plus petite fréquence permettant de propager une onde progressive dans un guide pour $a = 2b = 5$ cm.

4) Exprimer le champ réel pour $\omega > \omega_{c,n}$. Quelle est la nature de l'onde d'une part à z fixé et d'autre part à x fixé ? Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe et commenter.

Exercice 3 : Angle de Brewster

Une OPPH polarisée rectilignement se propage dans un milieu transparent d'indice n_1 et atteint sous une incidence *oblique* définie par l'angle i_1 un milieu transparent d'indice n_2. On cherche l'angle de BREWSTER i_B pour lequel aucune onde n'est réfléchie.

Au niveau de la surface de séparation on suppose que le champ magnétique et la composante tangentielle du champ électrique sont continues.

1) Montrer par un simple schéma que le champ électrique doit être polarisé dans le plan d'incidence pour que cela soit possible.

2) Vérifier qu'au niveau de l'interface, en $z=0$, les ondes incidentes et réfractées (transmises)

$$\overrightarrow{\underline{E_1}} = \overrightarrow{\underline{E_{01}}}\exp(j\omega t - j\overrightarrow{k_1}\cdot\overrightarrow{r}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\underline{E_2}} = \overrightarrow{\underline{E_{02}}}\exp(j\omega t - j\overrightarrow{k_2}\cdot\overrightarrow{r})$$

ont la même phase si et seulement si les lois de DESCARTES sont vérifiées.

3) Déduire de la continuité des champs, la valeur particulière i_B de i pour laquelle il n'y a pas d'onde réfléchie. Calculer sa valeur pour $n = 1{,}50$.

4) Si l'onde incidente était de polarisation elliptique, voire même non polarisée, que pourrait-on dire de l'onde réfléchie ?

Exercice 4 : Ondes EM dans un cristal ionique

On modélise un cristal de chlorure de sodium par un réseau cubique d'ions alternativement Na^+ et Cl^-, de masses respectives m_+ et m_-. On pose $m = m_+ m_- / (m_+ + m_-)$, $\omega_T = \sqrt{K/m}$ et $\omega_p = \sqrt{ne^2/m\,\epsilon_0}$ où n est le nombre volumique d'ions de chaque type.

Une onde électromagnétique associée à un champ électrique $\overrightarrow{\underline{E}} = E_0\exp(j\omega t - jkz)\,\overrightarrow{u_x}$ se propage dans le cristal et provoque des déplacements $\delta_+(z,t)$ des ions Na^+ et $\delta_-(z,t)$ des ions Cl^- selon $\overrightarrow{u_x}$. Ces déplacements sont collectifs à l'échelle mésoscopique et d'extension très faible devant la longueur d'onde.

On pose $\delta = \delta_+ - \delta_-$ et on décrit l'action totale de ses voisins sur un ion Na^+ (respectivement Cl^-) par une force de rappel $-K\,\delta\,\overrightarrow{u_x}$ (resp. $+K\,\delta\,\overrightarrow{u_x}$). On note n le nombre volumique d'ions Na^+, identique au nombre volumique d'ions Cl^-.

1) Montrer que $\delta(z,t)$ est solution de :

$$\ddot{\delta} + \omega_T^2\,\delta = \frac{e\,E}{m}$$

2) Exprimer $\underline{\delta}$ en fonction de e, m, ω_T et $\underline{E}$ et montrer que le matériau possède une conductivité complexe :

$$\underline{\sigma} = \frac{j\omega\,\omega_p^2\,\varepsilon_0}{\omega_T^2 - \omega^2}$$

3) En déduire que la relation de dispersion des ondes se met sous la forme :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2}\right)$$

où on exprimera ω_L en fonction de ω_p et ω_T. En déduire sans calculs l'existence d'une bande interdite.

Exercice 5 : Ondes acoustiques dans un plasma

On s'intéresse à la propagation d'ondes acoustiques dans un plasma globalement neutre c'est-à-dire constitué d'ions et d'électrons dont les densités particulaires sont $n_i = n_e = n_0$. On suppose que les ions fixes et que les électrons ont une vitesse $\overrightarrow{v_e}$. La masse volumique du fluide d'électrons est $\rho_e = n_e m$, où m est la masse d'un électron. Le fluide d'électrons est assimilé à un gaz parfait.
Au repos, la pression P_e est égale à P_0, $\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{0}$, $n_e = n_0$, $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.
On étudie une faible perturbation et on pose : $P_e = P_0 + p_1(r,t)$, $\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_{e1}}(r,t)$, $n_e = n_0 + n_1(r,t)$, $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_1}(r,t)$ et $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_1}(r,t)$, les termes indiqués par $_1$ étant de faibles variations.

1) Dans le cadre de l'approximation acoustique et en supposant les transformations isentropiques, déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $p_1(r,t)$.

2) Établir la relation de dispersion. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Commenter.

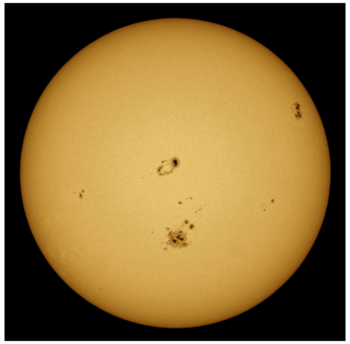
Exercice 6 : Taches solaires

Les taches solaires sont des manifestations de l'activité magnétique de notre étoile. Ces zones sombres à la surface du Soleil sont en effet associées à un champ magnétique intense, de l'ordre de 0,4 T, dans la photosphère, couche de l'atmosphère solaire dont nous provient l'essentiel du rayonnement de l'étoile dans le domaine visible. La photosphère est un milieu électriquement conducteur dont les propriétés électromagnétiques (perméabilité et permittivité) sont proches de celles du vide.

1) Rappeler la loi d'OHM locale dans un milieu conducteur au repos, ainsi que les équations de MAXWELL dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Quelle condition sur la durée caractéristique d'évolution des champs permet de négliger les courants de déplacement ?

2) Établir l'équation d'évolution du champ magnétique dans le milieu conducteur.

3) En déduire un ordre de grandeur de la durée caractéristique d'évolution de l'un des groupes de taches solaires sur la photo ci-dessous. Comparer à la durée de vie moyenne observée, de l'ordre du mois.



4) Dans certains modèles de taches solaires, on considère un enchevêtrement de tubes de champ magnétique, chacun ayant un diamètre trop faible pour être résolu avec les plus grands télescopes solaires actuellement utilisés, dont l'ouverture est de l'ordre du mètre. Quelle serait alors la durée caractéristique d'évolution d'un tel champ magnétique ?

5) Comment l'équation d'évolution du champ magnétique est-elle modifiée dans un milieu conducteur en écoulement ?

Au-delà de quelle vitesse caractéristique d'écoulement le deuxième terme du membre de droite pourrait-il compenser le phénomène diffusif ?

Données :

- Rayon du Soleil : $7 \cdot 10^8$ m
- Diamètre apparent du Soleil vu de la Terre : 0,5
- Conductivité de la photosphère : $10^3\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$

Réponses

Exercice 1 : Ondes longitudinales dans un plasma

1) Cf cours : $\underline{\gamma} = \dfrac{n_e e^2}{i m_e \omega}$.

2) $\underline{\gamma} = -i\omega\epsilon_0$. En égalisant les deux expressions, on obtient $\omega^2 = \dfrac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} = \omega_p^2$.

3) $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ et $\text{div}\,\overrightarrow{B} = 0$. De plus, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ donc $-i\,\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{0}$ donc le champ électrique est longitudinal.

Exercice 2 : Guide d'ondes métallique

1) $\dfrac{\partial A}{\partial y} = 0$, $A(x=0) = 0$ et $A(x=a) = 0$.

2) $\dfrac{d^2 A}{dx^2} + \left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right) A = 0$ et $k_g^2 < \dfrac{\omega^2}{c^2}$.

$\overrightarrow{\underline{E}_n} = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp(j\omega t - jk_g z)\,\overrightarrow{u_y}$ et $k_{g,n}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$.

3) $f_{\min} = \dfrac{c}{2a} = 3$ GHz.

4) $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \omega_{c,n}^2/\omega^2}}$ et $v_g = c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}}$.

Exercice 3 : Angle de Brewster

1) Raisonner sur la direction du champ magnétique et de sa continuité pour les deux directions de polarisation rectiligne du champ électrique.

2) $\varphi_1 = \overrightarrow{k_1}.\overrightarrow{r} = \dfrac{n_1 \omega x \sin i_1}{c}$ ...

3) $\tan i_B = \dfrac{n_2}{n_1}$.

4) Les PR sont génératrices de toutes les polarisations et les équations de MAXWELL sont linéaires ...

Exercice 4 : Ondes EM dans un cristal ionique

1) PFD appliqué aux cations et anions.

2) Passer en complexes.

3) $\omega_L = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_T^2}$ avec ω_p la pulsation plasma.

Exercice 5 : Ondes acoustiques dans un plasma

1) Ne pas oublier la force volumique de LORENTZ dans l'équation d'EULER. On obtient

$$m\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{\gamma P_0}{n_0}\Delta p_1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0} p_1 = 0$$

2) $c_s k^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ où $\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_0 e^2}{m\epsilon_0}}$ et $c_s = \sqrt{\dfrac{\gamma P_0}{m n_0}}$.

Exercice 6 : Taches solaires

1) cf cours

2) $\Delta\overrightarrow{B} = \mu_0\sigma\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$

3) $\tau = \mu_0\sigma L^2 \approx 3\cdot 10^{12}$ s

4) $\theta = \dfrac{\lambda}{D}$ soit $L < 10^2$ km et $\tau < 10^2$ jours

5) $\overrightarrow{j} = \sigma\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)$ donne $\Delta\overrightarrow{B} = \mu_0\sigma\left(\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)\right)$

$V > \dfrac{1}{\mu_0\sigma L} \approx 1\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$.