# Correction du TD n°15 : Dipôles

## Exercice 2 : Potentiel et champ d'un quadripôle

**1)** Le système équivaut à deux dipoles tête bêche, le moment dipolaire total vaut :

$$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} = q\overrightarrow{AO} + q\overrightarrow{BO} = qa\vec{u_x} + q(-a\vec{u_x}) = \vec{0}$$

Cela est dû au fait que le barycentre des charges positives et des charges négatives sont confondus. Et puisque le système est aussi de charge totale nulle, on s'attend à un quadripôle (ou quadrupôle).

**2)** On calcule, comme pour le dipôle, le potentiel total de la distribution (discrète) de charge par superposition

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{OM} - \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM}\right)$$

avec $OM = r$ et :

$$AM^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = AO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OM}$$

soit

$$AM^2 = a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta = r^2\left[1 + \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right]$$

en faisant attention que dans le cours les distances au centre $O$ du dipôle valaient $\frac{a}{2}$ et $a$ ici !
On obtient alors :

$$AM^{-1} = r^{-1}\left[1 + \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Dans le cadre de l'approximation dipolaire on a $r \gg a$ donc $\epsilon = \frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2} \ll 1$ ce qui nous permet d'effectuer un DL, que l'on va pousser à l'ordre deux cette fois-ci puisque les termes d'ordre 0 et 1 s'annulent dans une distribution quadripolaire

$$AM^{-1} = r^{-1}\left[1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 + o(\epsilon^2)\right]$$

ou encore

$$AM^{-1} = r^{-1}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^2 + o(\epsilon^2)\right]$$

Il s'agit de faire attention au fait que les termes d'ordre deux proviennent de deux endroits différents afin de pouvoir écrire :

$$AM^{-1} \simeq r^{-1}\left[1 - \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\right]$$

De même, en changeant $a$ en $-a$ on aboutit à :

$$BM^{-1} \simeq r^{-1}\left[1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\right]$$

Soit au total :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left[2 - 2 - 0 - \frac{a^2}{r^2}\left(-1 + 3\cos^2\theta\right)\right]$$

Finalement :

$$\boxed{V(M) = \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}(1 - 3\cos^2\theta)}$$

Le potentiel du quadripôle décroît donc encore plus vite (en $1/r^3$) que celui du dipôle (en $1/r^2$) à cause d'une plus grande compensation entre les charges.

Le reste est sans difficulté, à part le calcul des LC dont l'intégration est à bien prendre et donne $r = k\sqrt{|\cos\theta|}|\sin\theta|$ ...

## Exercice 3 : Interactions entre deux moments magnétiques

**1)** Par définition de l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétique dans un champ extérieur (ici celui de l'autre dipôle) :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}}_1\cdot\vec{B}_2(O) = -\vec{\mathcal{M}}_2\cdot\vec{B}_1(M) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\overrightarrow{\mathcal{M}_1}\cdot\overrightarrow{OM})(\overrightarrow{\mathcal{M}_2}\cdot\overrightarrow{OM}) - OM^2\overrightarrow{\mathcal{M}_1}\cdot\overrightarrow{\mathcal{M}_2}}{OM^5}$$

**2)** Dans le cas où $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{OM}$, l'expression se simplifie en

$$\mathcal{E}_p = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{r^3} = -\frac{2\mu_0\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{4\pi r^3}$$

ce qui correspond à une force attractive $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p = -\dfrac{6\mu_0\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{4\pi r^4}\overrightarrow{u_r}$

**3)** Dans le cas où $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ sont colinéaires entre eux et perpendiculaires à $\overrightarrow{OM}$, l'expression se simplifie en

$$\mathcal{E}_p = \frac{\mu_0\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{4\pi r^3}$$

ce qui correspond à une force répulsive $\overrightarrow{F} = \dfrac{3\mu_0\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2}{4\pi r^4}\overrightarrow{u_r}$

**4)** Prenons le magnéton de BOHR comme ordre de grandeur du moment magnétique atomique, et $r \approx 10^{-10}$ m. On obtient alors

$$\mathcal{E}_p \approx \frac{\mu_0\mu_B^2}{4\pi r^3} \approx 10^{-23}\ \text{J}$$

**5)** L'énergie d'agitation thermique étant de l'ordre de $k_BT$, on en déduit que la température nécessaire pour obtenir une agitation thermique égale à l'interaction magnétique dans la matière vaut

$$T \approx \frac{\mathcal{E}_p}{k_B} \approx 1\ \text{K}$$

Cela veut dire que l'agitation thermique prédomine à des températures supérieures, et donc que l'interaction entre dipôles magnétiques ne suffit pas à expliquer le magnétisme de la matière, qui existe aux températures usuelles.

## Exercice 4 : Mouvement d'une charge dans le champ d'un dipôle électrique

**1)** Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule chargée, soumise au champ $\overrightarrow{E}$ du dipôle $\overrightarrow{p}$ s'écrit dans un référentiel galiléen $m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{E}$.
Le champ dipolaire donc la force que subit la particule est contenu dans le plan $\phi =$ cte contenant $\overrightarrow{p}$ et $M$ en coordonnées sphériques. Puisque la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ de la particule est elle aussi dans ce plan [1] alors il en sera de même de sa trajectoire.
On projette alors le PFD dans ce plan (polaire) :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = q\dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = q\dfrac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases}$$

ou encore :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \dfrac{2pq\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 mr^3} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \dfrac{pq\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 mr^3} \end{cases}}$$

**2)** **a)** Pour que la particule décrive un arc de cercle de centre $O$ et de rayon $r_0$, il faut $r = r_0 =$ cte, d'où :

$$r_0\dot{\theta}^2 = -\frac{2pq\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 mr^3} = \frac{2p|q|\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 mr_0^3}$$

on en déduit l'expression de la vitesse angulaire :

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{p|q|\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 mr_0^4}}$$

soit une vitesse initiale (en $\theta = 0$) de norme :

$$\boxed{v_0 = r_0|\dot{\theta}_0| = \sqrt{\frac{p|q|}{2\pi\epsilon_0 mr_0^2}}}$$

Attention, il faut aussi que la **vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ soit perpendiculaire à** $\overrightarrow{OM_0}$.

**b)** L'énergie cinétique de la particule s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}mr_0^2\dot{\theta_0}^2 = \frac{p|q|\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$$

Son énergie potentielle, dans le potentiel électrostatique créé par le dipôle vaut :

$$E_p = qV(M) = \frac{pq\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = -\frac{p|q|\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = -E_c$$

L'énergie mécanique est donc nulle :

1. attention cette condition est nécessaire !

$$\boxed{E_m = E_c + E_p = 0}$$

**3)** La vitesse angulaire de la question **2.a** n'est définie que pour $\cos\theta \geq 0$, on a donc un mouvement oscillatoire entre les positions

$$\boxed{\theta_1 = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \theta_2 = \frac{\pi}{2}}$$

L'accélération angulaire $\ddot{\theta} = -\dfrac{p|q|\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 m r_0^4}$ est maximale par $\sin\theta = -1$, donc pour $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ et vaut :

$$\boxed{\ddot{\theta}_{\max} = \frac{p|q|}{4\pi\epsilon_0 m r_0^4}}$$

La période $T$ du mouvement oscillatoire vaut quatre fois le temps mis pour aller de $\theta = 0$ à $\theta = \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ soit :

$$T = 4\int_0^{\pi/2} dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = 4\sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 m r_0^4}{p|q|}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

ou encore, avec l'aide de l'énoncé :

$$\boxed{T = 10,5\sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 m r_0^4}{p|q|}}}$$