Correction du TD n°14 : Magnétostatique

Exercice 6 : Effet MEISSNER dans un supraconducteur

1) La divergence d'un rotationnel est toujours nulle, donc en prenant la divergence de la relation (E), nous obtenons :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{B} = -\mu_0\,\delta^2\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{j}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0}$$

Par ailleurs, en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère et en éliminant $\overrightarrow{j}$ avec la relation (E) , il vient :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B}\right) = \mu_0\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{j} = -\frac{\overrightarrow{B}}{\delta^2}$$

En utilisant la formule du double rotationnel, on obtient alors :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(\operatorname{div}\overrightarrow{B}) - \overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{B} = -\frac{\overrightarrow{B}}{\delta^2} \quad \text{soit finalement} \quad \boxed{\overrightarrow{\Delta}\,\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{B}}{\delta^2}}$$

2) En coordonnées cartésiennes le laplacien-vecteur se distribue en un laplacien scalaire sur chaque composante. En projection sur $\overrightarrow{u_z}$, il vient alors :

$$\Delta B - \frac{B}{\delta^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{B}{\delta^2} = 0 \quad \text{puis} \quad \frac{d^2 B}{dx^2} - \frac{B}{\delta^2} = 0$$

en simplifiant le laplacien puisque $B(x)$ ne dépend que de x. La solution générale de cette équation différentielle s'écrit :

$$B(x) = \alpha\,\mathrm{ch}(x/\delta) + \beta\,\mathrm{sh}(x/\delta)$$

Aux interfaces $x = \pm\,e$, l'énoncé fournit les conditions aux limites :

$$B(x = -e) = B_0 = \alpha\,\mathrm{ch}(e/\delta) - \beta\,\mathrm{sh}(e/\delta)$$

et

$$B(x = +e) = B_0 = \alpha\,\mathrm{ch}(e/\delta) + \beta\,\mathrm{sh}(e/\delta)$$

En sommant et en soustrayant, on obtient :

$$2\,\beta\,\mathrm{sh}(e/\delta) = 0 \quad \text{et} \quad 2\,\alpha\,\mathrm{ch}(e/\delta) = 2\,B_0 \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{B_0}{\mathrm{ch}(e/\delta)} \quad \text{et} \quad \beta = 0$$

On obtient ainsi l'expression définitive du champ magnétique dans la plaque :

$$\boxed{\overrightarrow{B} = B_0\,\frac{\mathrm{ch}(x/\delta)}{\mathrm{ch}(e/\delta)}\,\overrightarrow{u_z}}$$

Le champ obtenu est pair en x, ce qui est en accord avec une symétrie évidente du problème. Le tracé du graphe montrerait qu'effectivement le champ magnétique est exclu du "coeur" de la plaque.

3) On obtient $\overrightarrow{B}$ en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix}\partial/\partial x\\ 0\\ 0\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0\\ 0\\ B(x)\end{vmatrix} = -\frac{1}{\mu_0}\,\frac{dB}{dx}\,\overrightarrow{u_y} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overrightarrow{j} = -\frac{B_0\,\mathrm{sh}(x/\delta)}{\mu_0\,\delta\,\mathrm{ch}(e/\delta)}\,\overrightarrow{u_y}}$$

L'allure du graphe de $j(x)$ tracé sur la figure 40 pour $e = 5\,\delta$ afin de le rendre "perceptible" montre que les courants se localisent au voisinage des deux interfaces vide-supraconducteur avec des signes opposés, ce qui permet aux courants de se refermer à l'infini, c'est-à-dire en pratique aux bords de la plaque.

Exercice 7 : Champ magnétique crée par convection de charges dans un isolant

On adapte ce que l'on a fait dans le cours lorsque l'on a assimilé à une petite spire un électron en rotation autour du noyau.

1) La charge qui traverse le contour $\mathcal{C}$ pendant un tour de cylindre est comprise dans le cylindre de hauteur h et de rayon a. On en déduit $q = \iint \sigma dS = \sigma 2\pi a h$.

Sur un tour de cylindre, on peut écrire $I = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{q}{T}$, soit $I = \dfrac{\sigma 2\pi a h}{2\pi/\omega} = \sigma a h \omega$.

Finalement, le théorème d'AMPÈRE appliqué sur ce même contour donne

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \Rightarrow B(r<a).h - 0 + 0 + 0 = \mu_0\sigma a h\omega$$

c'est-à-dire $B(r<a) = \mu_0\sigma a\omega$.

2) L'énergie magnétique s'écrit

$$U_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0}d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0}\pi a^2 h = \frac{\mu_0\pi a^4\sigma^2 h\omega^2}{2} = \frac{1}{2}J^*\omega^2$$

en posant comme moment d'inertie équivalent $J^* = \mu_0\pi a^4\sigma^2 h$.