Correction du TD n°16

Exercice 2 : Micro onde (Centrale)

1) On établit d'abord l'équation de propagation à partir des équations de Maxwell (démarche classique). On obtient $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$. En y reportant l'expression de $\underline{\vec{E}}$, on aboutit à $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$

2) Pour que la propagation se fasse sans atténuation, il faut k réel, ce qui nécessite $k^2 > 0$ et donc $\omega > \frac{\pi c}{a}$, avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$. Finalement, il faut $\boxed{a > \frac{\lambda_0}{2}}$, ce qui est bien vérifié ici.

Si $\lambda_0 > 2a$, l'amplitude du champ électrique décroîtra exponentiellement le long de l'axe z (on peut discuter sur les analogies et les différences avec les ondes dans les plasmas ou les conducteurs ohmiques). Cela correspond à $f < \frac{c}{2a}$=1,88 GHz (ici, on a un peu de marge, la fréquence de l'onde étudiée étant de l'ordre de 2,5 GHz).

3) La puissance rayonnée à travers une section du guide sera donnée par le flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ à travers cette section (moyenné sur un nombre entier de périodes, vu la période très courte, comparée aux temps caractéristiques de cuisson des aliments).

$\vec{E}$ étant connu, on doit exprimer $\vec{B}$. Ceci se fait facilement par intégration de l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}E = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. En notations complexes, on obtient :

$$\underline{\vec{B}} = -\frac{1}{j\omega}\left[-\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e_x} + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{e_z}\right]$$

Avec l'expression de $\vec{E}$ fournie on aboutit à

$$\underline{\vec{B}} = -E_0\left[\frac{k}{\omega}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\vec{e_x} + \frac{j\pi}{a\omega}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}\right]e^{j(\omega t - kz)}$$

Pour calculer $\langle\vec{\Pi}\rangle$, on repasse en réel et on utilise les moyennes classiques des fonctions trigonométriques ; ou, à partir des grandeurs complexes,

$$\boxed{\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\left[\frac{\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right] = \frac{E_0^2}{2\mu_0}\frac{k}{\omega}\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\vec{e_z}}$$

De là, $\mathcal{P} = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle\cdot d\vec{S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0}\frac{k}{\omega}b\underbrace{\int_{-a/2}^{a/2}\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx}_{a/2}.$

Ainsi $\boxed{\mathcal{P} = \frac{E_0^2}{8\mu_0}\frac{k}{\omega}a^2}$ puisque $b = 2a$.

Cette expression peut se remettre uniquement en fonction des données de l'énoncé, avec $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2\omega^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{\pi^2\lambda_0^2}{a^2 4\pi^2 c^2} = \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{4a^2}\right)$

$$\boxed{\text{Finalement, } \mathcal{P} = \frac{E_0^2 a^2}{8\mu_0 c}\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{4a^2}} = 11{,}9\text{ MW dans le cas limite où } E_0 = E_{\max}}$$

4) Un four à micro-ondes domestique doit pouvoir porter à ébullition une grosse tasse (mug) ou un petit bol d'eau à ébullition en $\Delta t \sim 1$ min. En prenant une masse d'eau $m \approx 200$ g, on peut estimer avec le premier principe $P_{\text{four}} = \frac{mc\Delta T}{\Delta t}$, où la capacité thermique massique de l'eau liquide vaut $c \approx 4\text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $\Delta T \sim 80$ K. On trouve ainsi $P_{\text{four}} \approx 1$ kW (cohérent avec les puissances annoncées commercialement, de 600 à 900 W).

En régime stationnaire de fonctionnement, la puissance transportée dans le guide d'onde doit être égale à celle absorbée par les aliments. Avec 1kW, on est bien en deça des limites tolérées par le guide d'ondes. Il n'y a donc pas de risques d'étincelles dans cet élément du four, en conditions normales de fonctionnement.

5) Les CL impliquent que l'onde EM doit être nulle sur les bords du four. Ils correspondent donc à des nœuds pour le champ $\vec{E}$. Sachant qu'entre deux nœuds il y a une distance égale à $\lambda/2 = 6{,}2$ cm, les dimensions de la cavité doivent être un multiple de cette valeur ce qui est réalisable.

Puisque l'on a des ondes stationnaires dans le four, la cuisson se fera de manière plus importante sur un ventre de vibration et plus faible sur un nœud, conduisant à une cuisson non uniforme. D'où l'utilité d'utiliser plusieurs modes de vibration (harmoniques) et un plateau tournant.

Les dimensions des trous dans la grille côté porte sont telles que les ondes lumineuses passent bien, alors que les micro-ondes sont presque totalement réfléchies puisque $\lambda_{\text{visible}} \ll$ diamètre des trous $\ll \lambda_{\text{micro ondes}}$ (cf question **2)**).

TSVP

Exercice 5 : Magnétorésistance (Centrale)

1) En régime permanent, la deuxième loi de NEWTON s'écrit :

$$\vec{0} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) - \frac{m}{\tau}\vec{v} \quad \text{donc :} \quad \vec{E} = \frac{m}{q\tau}\vec{v} - \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Ce qui donne :

$$\vec{E} = \frac{m}{nq^2\tau}\vec{j} - \frac{1}{nq}\vec{j} \wedge \vec{B} \quad \text{puisque} \quad \vec{j} = n\,q\,\vec{v}$$

En posant :

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \quad et \quad R_H = \frac{1}{n\,q}$$

On aura bien :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{j} + R_H\,\vec{B} \wedge \vec{j}}$$

2) Symétrie et invariance $\Rightarrow$ $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$.
Le théorème de GAUSS donne : $E \cdot 2\pi rh = Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$ donc : $E = Q_{\text{int}}/2\pi h\varepsilon_0 r$.
Or, par définition du potentiel :

$$V_a - V_b = \int_a^b E dr = \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi h\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{V_a - V_b}{\ln\left(b/a\right)}\frac{1}{r}\vec{u}_r}$$

3) Le courant traversant radialement le cylindre d'axe Oz et de rayon r compris entre a et b est :

$$I_0 = \iint \sigma\,\vec{E} \cdot \vec{dS} = \sigma\frac{V_a - V_b}{\ln\left(b/a\right)} \cdot 2\pi h$$

La résistance du matériau est alors :

$$\boxed{R_0 = \frac{V_a - V_b}{I_0} = \frac{\ln\left(b/a\right)}{\sigma 2\pi h}}$$

Or $\ln\left(b/a\right) = \ln\left(1 + e/a\right) \approx \frac{e}{a}$ si $e << a$. La résistance devient :

$$\boxed{R_0 \approx \frac{e}{\sigma 2\pi ah} = \frac{e}{\sigma S}}$$

C'est-à-dire la résistance d'un conducteur unidimensionnel de section S et de longueur e.

4) D'après **1)**, On a :

$$\begin{vmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{vmatrix} + R_H \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} \wedge \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{vmatrix} + R_H \begin{vmatrix} -Bj_\theta \\ Bj_r \\ 0 \end{vmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} E = \frac{1}{\sigma}j_r - BR_H j_\theta \\ 0 = \frac{1}{\sigma}j_\theta + BR_H j_r \\ 0 = j_z \end{cases}$$

Et par suite :

$$\boxed{j_r = \frac{j_0}{1 + (\sigma BR_H)^2}\ ;\ j_\theta = \frac{-\sigma BR_H}{1 + (\sigma BR_H)^2}j_0\ ;\ j_z = 0}$$

5) L'intensité de courant traversant radialement le conducteur est :

$$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} \Rightarrow I = \iint j_r\,dS = \frac{1}{1 + (\sigma BR_H)^2}\iint j_0\,dS \quad \text{soit} \quad I = \frac{I_0}{1 + (\sigma BR_H)^2}$$

La résistance du conducteur est alors :

$$\boxed{R = R_0\left[1 + (\sigma BR_H)^2\right]}$$

6) La variation relative de la résistance est alors :

$$\delta = (\sigma BR_H)^2$$

Elle vaut : $\boxed{\delta_{\text{Cu}} \approx 1{,}8\,10^{-5}}$ et $\boxed{\delta_{\text{InAs}} = 0{,}49}$