Correction du TD n°17

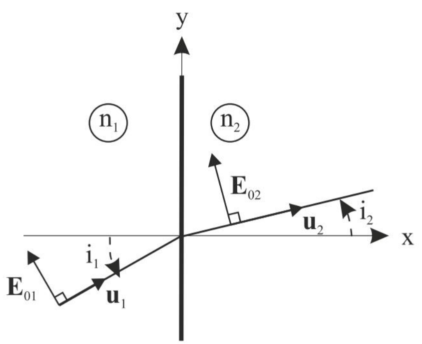
Exercice 3 : Angle de Brewster (cf TP)

1) Si le champ magnétique est dans le plan d'incidence, alors les vecteurs $\overrightarrow{B}$ transmis et incident ne sont pas colinéaires et donc ne peuvent être continus à l'interface. Alors que s'il est dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence, il est tangent, et donc continu en $x = 0$.

Pour le champ électrique, ce n'est que la composante tangentielle qui doit être continue à l'interface. Cela peut être réalisé si la polarisation est dans ce plan (cf question 3).

2) Sur le dioptre $x = 0$, les retards de phase des deux ondes s'écrivent en explicitant les vecteurs d'ondes $\overrightarrow{k_1} = (n_1\,\omega/c)\,\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{k_2} = (n_2\,\omega/c)\,\overrightarrow{u_2}$:

$$\varphi_1 = \overrightarrow{k_1}\cdot\overrightarrow{r} = \frac{n_1\omega\, y\,\sin i_1}{c} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 = \overrightarrow{k_2}\cdot\overrightarrow{r} = \frac{n_2\omega\, y\,\sin i_2}{c}$$



On vérifie bien que les lois de Descartes $n_1\,\sin i_1 = n_2\,\sin i_2$ sont équivalentes à une condition d'accrochage des phases dans le plan du dioptre.

3) En utilisant le fait que les ondes sont transversales, la continuité en O de la composante tangentielle du champ électrique affirmée par l'énoncé s'écrit après simplification par les termes $\exp(j\omega t)$ communs :

$$\underline{E}_{1y} = \underline{E}_{2y} \qquad \text{soit} \qquad \underline{E}_{01}\cos i_1 = \underline{E}_{02}\cos i_2 \tag{1}$$

En utilisant les relations de structure on obtient immédiatement les champs magnétiques dans les deux milieux au point O :

$$\overrightarrow{\underline{B}_1} = \frac{n_1\,\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{\underline{E}_1}}{c} = \frac{n_1\,\underline{E}_{01}}{c}\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{\underline{B}_2} = \frac{n_2\,\overrightarrow{u_2}\wedge\overrightarrow{\underline{E}_2}}{c} = \frac{n_2\,\underline{E}_{02}}{c}\,\overrightarrow{u_z}$$

La continuité du champ magnétique en O s'écrit donc :

$$\underline{B}_{1z} = \underline{B}_{2z} \qquad \text{soit} \qquad n_1\,\underline{E}_{0i} = n_2\,\underline{E}_{0tr} \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) sont compatibles si :

$$n_2\,\cos i_1 = n_1\,\cos i_2 \qquad \text{soit} \qquad n_2^2\,(1-\sin^2 i_1) = n_1^2\,(1-\sin^2 i_2)$$

en élevant au carré pour éliminer les cosinus. On peut alors utiliser la loi de Descartes $n_2\,\sin i_2 = n_1\,\sin i_1$ pour éliminer i_2 :

$$n_2^2\,(1-\sin^2 i_1) = n_1^2\,(1-\sin^2 i_2) = n_1^2 - \frac{n_1^4}{n_2^2}\sin^2 i_1$$

soit

$$\sin^2 i_1 = \frac{n_2^2\,(n_2^2-n_1^2)}{(n_2^4-n_1^4)} = \frac{n_2^2}{n_2^2+n_1^2}$$

Et finalement :

$$\tan^2 i_1 = \frac{\sin^2 i_1}{1-\sin^2 i_1} = \frac{n_2^2}{n_1^2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}}$$

4) Si on envoie une onde incidente non polarisée sur un dioptre sous l'angle de Brewster, la composante du champ électrique dans le plan d'incidence s'annule pour l'onde réfléchie et seule subsiste la composante orthogonale au plan d'incidence. L'onde réfléchie est donc polarisée rectilignement parallèlement au plan réfléchissant.

Expérimentalement, cela peut permettre de déterminer la direction d'un polariseur puisque la lumière réfléchie sera éteinte pour une direction perpendiculaire au plan de réflexion.

Exercice 4 : Ondes EM dans un cristal ionique

1) Écrivons la loi de la quantité de mouvement en projection sur $\overrightarrow{u_x}$ pour les anions et les cations :

$$m_+ \, \ddot{\delta}_+ = e\,E - K\,\delta \;\; (1) \qquad \text{et} \qquad m_- \, \ddot{\delta}_- = -\,e\,E + K\,\delta \;\; (2)$$

En formant la combinaison $(1)/m_+ - (2)/m_-$ et en remarquant que $1/m = 1/m_+ + 1/m_-$, on obtient l'équation différentielle attendue :

$$\ddot{\delta}_+ - \ddot{\delta}_- = \frac{e\,E}{m_+} - \frac{K\,\delta}{m_+} + \frac{e\,E}{m_-} - \frac{K\,\delta}{m_-} \quad \text{soit} \quad \ddot{\delta} = \frac{e\,E}{m} - \frac{K\,\delta}{m} \quad \text{puis} \quad \boxed{\ddot{\delta} + \omega_T^2\,\delta = \frac{e\,E}{m}}$$

2) Comme les déplacements sont collectifs à l'échelle mésoscopique et d'extension très faible devant la longueur d'onde, on peut supposer le champ électrique uniforme c'est-à-dire bloquer sa dépendance en z. On obtient ainsi une équation différentielle du deuxième ordre linéaire à coefficients constants pour laquelle le régime sinusoïdal forcé s'obtient en passant en notation complexe :

$$-\,\omega^2\,\underline{\delta} + \omega_T^2\,\underline{\delta} = \frac{e\,\underline{E}}{m} \qquad \text{puis} \qquad \underline{\delta} = \frac{e\,\underline{E}}{m\,(\omega_T^2 - \omega^2)}$$

La densité de courant $j(z,t)$ s'exprime en fonction de la vitesse moyenne des ions passant en z à l'instant t. Comme leur déplacement est faible devant la longueur d'onde, cette vitesse est aussi celles des ions situés à la cote z à l'instant t de telle sorte que :

$$\overrightarrow{j} = n\,e\,\overrightarrow{v_+} + n\,(-e)\,\overrightarrow{v_-} = n\,e\,\dot{\delta}_+(z,t)\,\overrightarrow{u_x} - n\,e\,\dot{\delta}_-(z,t)\,\overrightarrow{u_x} = n\,e\,\dot{\delta}(z,t)\,\overrightarrow{u_x}$$

En passant en notation complexe dans cette relation linéaire, il vient :

$$\underline{\overrightarrow{j}} = n\,e\,\underline{\dot{\delta}}(z,t)\,\overrightarrow{u_x} = j\omega\,n\,e\,\underline{\delta}(z,t)\,\overrightarrow{u_x} = \frac{j\omega\,n\,e^2\,\underline{\overrightarrow{E}}}{m\,(\omega_T^2 - \omega^2)}$$

En faisant apparaître la pulsation de plasma, on obtient la conductivité complexe attendue :

$$\underline{\overrightarrow{j}} = \underline{\sigma}\,\underline{\overrightarrow{E}} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\underline{\sigma} = \frac{j\omega\,\omega_p^2\,\varepsilon_0\,\underline{\overrightarrow{E}}}{\omega_T^2 - \omega^2}}$$

3) En utilisant les équations de Maxwell transcrites en notation complexe comme dans le cours, on obtient la relation de dispersion :

$$k^2\,c^2 = \omega^2 - j\omega\,\mu_0\,c^2\,\underline{\sigma}$$

D'où en éliminant la conductivité complexe et en utilisant la relation $\varepsilon_0\,\mu_0\,c^2 = 1$:

$$k^2\,c^2 = \omega^2 + \frac{\omega_p^2\,\omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2} \qquad \text{soit} \qquad k^2\,c^2 = \frac{\omega^2\,(\omega_T^2 - \omega^2 + \omega_p^2)}{\omega_T^2 - \omega^2}$$

Cette expression a bien la forme attendue :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2}\right)} \qquad \text{en posant} \qquad \boxed{\omega_L = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_T^2}}$$

Pour $\omega_T < \omega < \omega_L$ on a k^2 réel négatif, donc $k = jk''$ et l'onde est *stationnaire évanescente* et ne peut donc pas propager d'énergie, ce qui décrit bien une *bande interdite.*

Exercice 6 : Taches solaires

1) Cf cours, la seule différence est le fait que l'on néglige les courants de déplacement et donc que

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{j} = \mu_0\sigma\,\overrightarrow{E}$$

Cela est possible si $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \ll \sigma E$ ou encore si la durée caractéristique d'évolution des champs est telle que $\boxed{\tau \gg \frac{\epsilon_0}{\sigma}}$.

2) Le rotationnel de l'équation de MA précédente, un petit coup de MF et de SCHWARZ donne

$$\boxed{\Delta\,\overrightarrow{B} = \mu_0\sigma\frac{\partial\,\overrightarrow{B}}{\partial t}}$$

3) Il s'agit d'une équation de diffusion donc, en ordre de grandeur $\tau = \mu_0\sigma L^2$

En prenant sur la photo la tache solaire du bas qui fait 2 mm de diamètre pour un diamètre solaire mesurant 4 cm, soit un rapport de 20, on obtient

$$\tau \approx 4\pi 10^{-7} \times 10^3 \times (7 \cdot 10^8/20)^2 \approx 10^{12}\,\mathrm{s} = 5 \cdot 10^4\,\mathrm{an}$$

Il y a donc un désaccord important avec la donnée de l'énoncé. On peut invoquer :

- une modélisation trop simpliste faisant intervenir une seule échelle caractéristique,
- d'autres phénomènes que la diffusion de champ magnétique (écoulement du plasma !).

4) En supposant que la mesure du champ magnétique est réalisée dans le domaine visible [1], la résolution angulaire avec un télescope de diamètre D est $\theta \approx \frac{\lambda}{D}$, ce qui correspondrait à la surface du Soleil à des objets de taille

$$L = \theta d_{TS} = \theta \frac{2R_S}{\alpha} = 0,55 \cdot 10^{-6} \times \frac{14 \cdot 10^8}{0,5 \times \frac{2\pi}{360}} \leq 80\,\mathrm{km}$$

La durée caractéristique d'évolution est alors $\boxed{\tau' \leq 90\,\mathrm{j}}$, ce qui semble plus raisonnable, même si l'approche retenue est très qualitative ...

5) Pour un milieu conducteur en écoulement, la loi d'OHM locale s'écrit

$$\overrightarrow{j} = \sigma(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

Un calcul similaire à la question **2)** conduit à

$$\boxed{\Delta \overrightarrow{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)}$$

Le deuxième terme du membre de droite pourra compenser le phénomène diffusif si, en ordre de grandeur,

$$\boxed{V > \frac{1}{\mu_0 \sigma L} \approx 1\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}}$$

ce qui parait très faible, mais il s'agit d'une vitesse moyenne d'écoulement.

1. L'effet Zeeman, exploité dans la détermination du champ magnétique, est plus prononcé pour une raie dans l'IR !