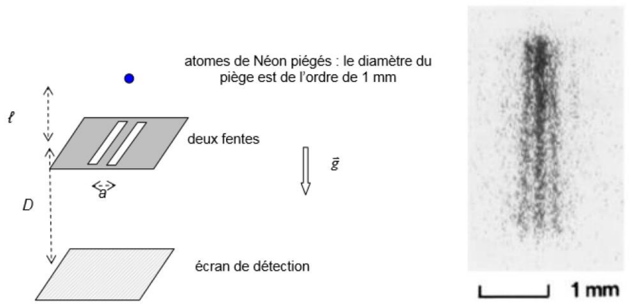
TD n°19 : Comment décrire le monde quantique ?

Exercice 1 : Effet photoélectrique (RP)

On envoie sur une photocathode en potassium une radiation UV de longueur d'onde $\lambda = 253{,}7\,\text{nm}$ (raie du mercure) ; on constate que l'énergie maximale des électrons éjectés est de 3,14 eV. Pour une raie visible telle que $\lambda = 589\,\text{nm}$ (raie jaune du sodium), l'énergie maximale est alors 0,36 eV.
À l'aide de ces données déterminer la constante de PLANCK h, la valeur de l'énergie d'extraction des électrons du potassium et la longueur d'onde maximale des radiations pouvant produire un effet photoélectrique sur le potassium.

Exercice 2 : Interférences d'atomes (SHIMIZU et TAKUMA 1992)

Soit le dispositif simplifié ci-dessous, dans lequel des atomes de néon dans le même état quantique sont piégés et refroidis et tombent dans le champ de pesanteur terrestre.



1) Comment se manifestent les caractères ondulatoire et corpusculaire des atomes de néon dans cette expérience ?
2) Expliquer cette expérience à l'aide de la superposition de fonctions d'onde.
3) Mesurer la valeur de l'interfrange i, distance entre deux franges brillantes ou sombres.
   Sachant que, dans une expérience de type trous d'YOUNG, i est donnée par la formule :
$$i = \frac{\lambda D}{a}$$
   Donner la valeur de la longueur d'onde λ associée à ces atomes.
   Données : $a = 6{,}0\,\mu\text{m}$ et $D = 113\,\text{mm}$.
4) En déduire leur vitesse v.
   Données : masse molaire du néon $M = 20\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et nombre d'AVOGADRO $\mathcal{N}_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$.
5) Cette vitesse, dite d'agitation thermique, est reliée à la température par la relation :
$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$
   où $k_B = 1{,}38\cdot 10^{-23}\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ est la constante de BOLTZMANN, T la température en kelvin et m la masse d'un atome.
   Déterminer la température T des atomes. Commentaire ?
6) Pourquoi doit-on travailler à si basse température ? (Plusieurs réponses)
7) Pourquoi l'expérience est-elle plus difficile à réaliser qu'avec des électrons ?

Exercice 3 : Interférences quantiques (fin d'oral X-Cachan PSI)

On envisage une expérience de trous d'YOUNG en mécanique quantique où des particules de masse m passent une par une.
Montrer qu'en mesurant la quantité de mouvement de l'écran, on peut a priori savoir par quel trou la particule est passée. Expliquer pourquoi si on tente de la mesurer, les franges d'interférence disparaissent.

Exercice 4 : Superposition d'états stationnaires

Soit une fonction d'onde $\psi(M,t)$ résultant de la combinaison linéaire de deux états stationnaires de fonctions d'onde spatiales respectives $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$ et d'énergie *différentes* respectives E_1 et $E_2 > E_1$.
Montrer que la densité de probabilité de présence dépend du temps, avec un temps caractéristique d'évolution τ à interpréter et tel que
$$\tau\Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{(Inégalité d'HEISENBERG énergétique)}$$

Exercice 5 : Oscillateur harmonique quantique

On considère une particule quantique, de masse m, soumise à une énergie potentielle de la forme $V(x) = \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

1) Sous quelle forme s'écrit la fonction d'onde d'un état stationnaire d'énergie E pour cet oscillateur ?

2) Écrire l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps dans le cas considéré.

3) Pour l'état fondamental, on obtient $\varphi(x) = A\exp\left(-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$.

a) Déterminer la constante de normalisation A.
On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\alpha u^2)du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

b) Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule. En déduire, sans calcul, la valeur de la position moyenne $< x >$ de la particule.

c) Déterminer l'expression de l'énergie E et de a en fonction de $\hbar$, m et ω.

Exercice 6 : Conservation locale de la densité de probabilité

En électromagnétisme, on a vu que l'équation locale de conservation de la charge contenue dans un volume donné d'un conducteur s'écrit $\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + \text{div}\,\overrightarrow{j} = 0$ où $\rho(M,t)$ est la densité volumique de charge au point M à l'instant t et $\overrightarrow{j}$ le vecteur densité volumique de courant.
En mécanique quantique, la probabilité totale de trouver la particule dans un volume donné doit être aussi conservée. On va voir dans cet exercice que cela conduit à une relation analogue à celle trouvée en électromagnétisme pour la conservation de la charge, ce qui permet d'obtenir l'expression du vecteur densité de courant de probabilité $\overrightarrow{J}$.

1) En combinant l'équation de SCHRÖDINGER à une dimension et son expression complexe conjuguée, retrouver l'équation locale de conservation de la probabilité, reliant la densité de probabilité ρ à $\overrightarrow{J}$, dont on donnera l'expression.

2) En utilisant la relation de dispersion de l'onde plane $\hbar\omega = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$, exprimer le vecteur densité de courant de probabilité $\overrightarrow{J}(x,t)$ en fonction de $\overrightarrow{k}$ (retrouver le résultat du cours) puis en fonction de la vitesse de groupe $\overrightarrow{v_g} = \dfrac{d\omega}{dk}$ associée au paquet d'ondes décrivant la particule.

3) Proposer une analogie entre mécanique quantique et électromagnétisme dans ce contexte.

Exercice 7 : Modèle de BOHR de l'atome d'hydrogène (Centrale)

Dans le modèle de BOHR (1913), on considère que l'atome d'hydrogène est formé d'un proton et d'un électron ponctuels. Le proton étant 1 836 fois plus massif que l'électron, il reste fixe en O dans le référentiel galiléen d'étude. Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène repose alors sur deux hypothèses :

- L'électron décrit une trajectoire **circulaire** autour du proton,
- La norme du moment cinétique de l'électron calculé au point O est **quantifiée** :

$$L = n\hbar \qquad n \in \mathbb{N}^\star$$

1) Si on associe à l'électron une onde de matière, il faut que celle-ci se reproduise identique à elle-même après chaque tour, sinon la somme des amplitudes des ondes conduirait à une onde totale nulle (on doit avoir des interférences constructives).
Déduisez la relation de DE BROGLIE reliant la quantité de mouvement de l'électron à sa longueur d'onde.

2) **a)** Partant du principe que L est quantifié, montrez que le rayon de la trajectoire l'est aussi. Montrez que l'on a :

$$R = n^2 a_0$$

et donnez l'expression de a_0 appelé **rayon de BOHR**. Faites l'application numérique, puis commentez.

b) Montrez que l'énergie mécanique de l'électron est, elle aussi, quantifiée. Écrivez E_m sous la forme :

$$E_m = -\frac{E_0}{n^2}$$

et donnez l'expression de E_0. Faites l'application numérique en électron-volt.

3) Pour l'atome d'hydrogène, les longueurs d'onde pouvant être émises par l'atome vérifient la loi expérimentale de BALMER-RYDBERG :

$$\frac{1}{\lambda_{p\to n}} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

où n et p sont des entiers ($n < p$) et R_H est la constante de RYDBERG.
Établissez la relation de BALMER-RYDBERG.
Donnez l'expression de la constante de RYDBERG R_H, puis faites l'application numérique.

4) Montrez que le modèle de l'atome de BOHR conduit, pour des transitions entre des niveaux n et $n-1$ élevés, à la même fréquence d'émission de rayonnement par l'atome d'hydrogène que celle prévue par la théorie classique.

Réponses

Exercice 1 : Effet photoélectrique

$E = h\nu = W + E_c$ pour les deux longueurs d'onde. Résoudre le système à deux équations et deux inconnues : $W = 1{,}7\,\text{eV}$ et $\lambda_{\max} = \dfrac{hc_0}{W} = 7{,}1 \cdot 10^2\,\text{nm}$.

Exercice 2 : Interférences d'atomes (Shimizu et Takuma 1992)

3) $\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-8}\,\text{m}$; **4)** $v = 1{,}7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; **5)** $T = 2{,}3\,\text{mK}$.

Exercice 3 : Interférences quantiques

Il faut $\Delta p_x \ll \dfrac{ah}{\lambda D}$, d'où $\Delta x \geq \dfrac{\hbar}{2\Delta p_x} \gg \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\lambda D}{a}$ expliquant le brouillage.

Exercice 4 : Superposition d'états stationnaires

Écrire la superposition et prendre le module au carré. On obtient

$$|\psi(M,t)|^2 = |\alpha\varphi_1(M)|^2 + |\beta\varphi_2(M)|^2 + 2\text{Re}\left(\alpha\varphi_1(M)\beta^*\varphi_2^*(M)\exp(i(E_2 - E_1)t/\hbar)\right)$$

Exercice 5 : Oscillateur harmonique quantique

2.a) $A = \left(\dfrac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4}$.

2.c) $a = \sqrt{\dfrac{2\hbar}{m\omega}}$ et $E = \dfrac{1}{2}\hbar\omega$.

Exercice 6 : Conservation locale de la densité de probabilité

1) Sachant que $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$, le dériver par rapport au temps pour obtenir $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$.
Utiliser alors l'équation de Schrödinger pour obtenir une équation semblable à l'EM.
On en déduit $\overrightarrow{J} = \dfrac{\hbar}{2im}\left(\psi^*(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) - \psi(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)\right)\overrightarrow{u_x}$.

2) $\overrightarrow{v_g} = \dfrac{\hbar\overrightarrow{k}}{m}$ et $\overrightarrow{J}(x,t) = \rho(x,t)\overrightarrow{v_g}$.

3) $\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{v}$ dans un conducteur.

Exercice 7 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène (Centrale)

1) On doit avoir $2\pi R = n\lambda$, d'où $\lambda = \frac{h}{p}$

2.a) $a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\text{m}$

2.b) $E_0 = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = 13{,}6\,\text{eV}$

3) $R_H = \dfrac{E_0}{hc} = 1{,}10 \cdot 10^7\,\text{m}^{-1}$

4) Dans la théorie classique $\nu = \dfrac{v}{2\pi R} = 2\dfrac{\frac{1}{2}mv^2}{2\pi Rmv} = \dfrac{2E_c}{nh} = -\dfrac{2E_m}{nh} = \dfrac{2E_0}{n^3 h}$
En quantique, pour une transition entre des niveaux n et $n-1$ (n quelconque), la fréquence d'émission est :
$\nu_{n\to n-1} = \dfrac{E_n - E_{n-1}}{h} = \dfrac{E_0}{h}\left(\dfrac{1}{(n-1)^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$
OK si $n \gg 1$