

Devoir maison n°7 : Optomécanique en cavité

L'optomécanique se consacre à l'étude du couplage de dispositifs mécaniques à une onde électromagnétique. Ce problème étudie différents aspects d'un système optomécanique modèle, à savoir une cavité résonante linéaire formée de deux miroirs semi-réfléchissants parallèles se faisant face, dont l'un est mobile.

Dans la première partie, on établit les équations dynamiques générales d'une cavité de longueur *fixée*, soumise à un champ électromagnétique incident. Dans la seconde partie, on étudie le couplage optomécanique en supposant que l'un des miroirs est libre de se déplacer sous l'action de la force d'origine électromagnétique imposée par le faisceau incident, et d'une force de rappel élastique appliquée par le support sur lequel ce miroir est monté.

Dans tout ce problème, on utilise le signe "≡" (plutôt que "=") pour définir une grandeur.

Dans les applications numériques, on prendra $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ pour la vitesse de la lumière dans le vide, $\pi \approx 3$ et $\sqrt{0,9} \approx 0,9$.

1. Cavité résonante de longueur fixée

On considère une cavité linéaire, d'axe (Oz), délimitée par deux miroirs (diélectriques) semi-réfléchissants plans identiques, notés (M_1) et (M_2). On admettra que les faces « internes » des miroirs (M_1) et (M_2) – c'est-à-dire les faces dirigées vers l'intérieur de la cavité (représentées en trait plein sur la figure 1), ont même coefficient de réflexion en amplitude (pour le champ électrique) pris égal à $(-\rho)$, où ρ est supposé réel et positif; le coefficient de réflexion des faces « externes » de (M_1) et (M_2) – c'est-à-dire les faces dirigées vers l'extérieur de la cavité (représentées par les zones grisées sur la figure 1), est quant à lui pris égal à ρ . On admettra aussi que les deux miroirs (M_1) et (M_2) possèdent le même coefficient de transmission en amplitude (pour le champ électrique), noté τ , que l'on suppose réel et positif; ce coefficient est identique pour les deux sens de traversée des miroirs. On admettra enfin que les coefficients (ρ, τ) ne dépendent pas de la pulsation du champ incident, et que la relation $\tau^2 + \rho^2 = 1$ est vérifiée. On note $R \equiv \rho^2$ et $T \equiv \tau^2$. Dans cette partie, on suppose les deux miroirs fixes dans le référentiel du laboratoire et l'on note L la distance qui sépare (M_1) et (M_2).

On envoie vers la cavité formée par (M_1) et (M_2) une onde incidente plane progressive monochromatique se propageant selon l'axe (Oz) et polarisée selon l'axe (Ox), décrite par son champ électrique :

$$\vec{E}_i(z, t) = \Re[E_i(z, t)] \vec{e}_x \quad (1)$$

$$E_i(z, t) = \mathcal{E}_i \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \quad (2)$$

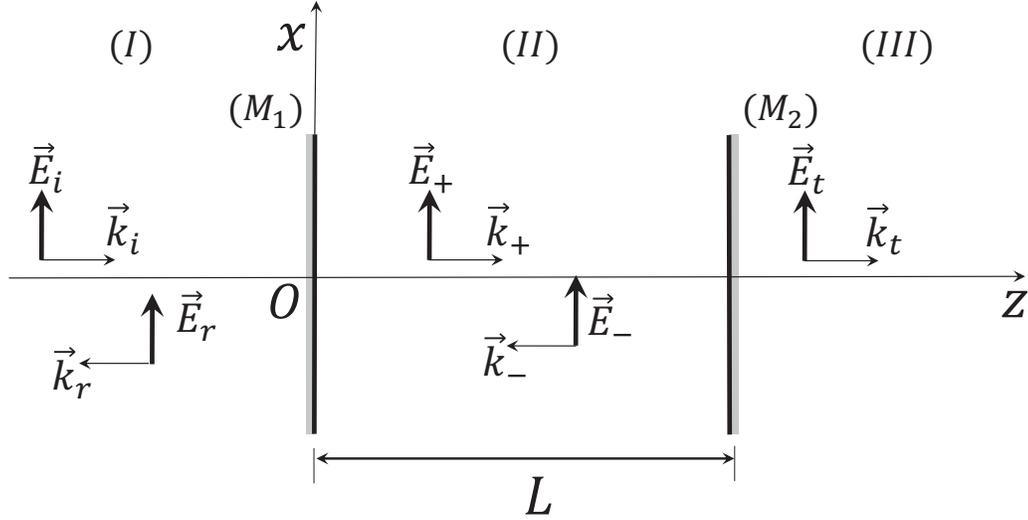


FIGURE 1 – Cavité résonante linéaire de longueur L , soumise à un champ incident (partie 1).

où \Re désigne la partie réelle, \mathcal{E}_i l'amplitude de l'onde incidente à l'origine des temps et des coordonn es, suppos e réelle, et $i^2 = -1$. Vous admettez que cette onde crée une onde réfléchie dans le demi-espace $z < 0$ de même direction de polarisation que l'onde incidente, de sorte que le champ total en amont de la cavité (dans la zone not e I sur la figure 1) s'écrit

$$\vec{E}_I(z, t) = \Re [E_i(z, t) + E_r(z, t)] \vec{e}_x \quad (3)$$

$$E_r(z, t) = \mathcal{E}_r \exp \left[i\omega \left(t + \frac{z}{c} \right) \right] \quad (4)$$

où \mathcal{E}_r désigne l'amplitude de l'onde réfléchie à l'origine des temps et des coordonn es, *a priori* complexe.

De même, le champ crée à l'intérieur de la cavité (zone II) prend la forme générale

$$\vec{E}_{II}(z, t) = \Re [E_+(z, t) + E_-(z, t)] \vec{e}_x \quad (5)$$

$$E_+(z, t) = \mathcal{E}_+ \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \quad (6)$$

$$E_-(z, t) = \mathcal{E}_- \exp \left[i\omega \left(t + \frac{z}{c} \right) \right] \quad (7)$$

Enfin, le champ au-delà de la cavité (zone III) s'écrit

$$\vec{E}_{III}(z, t) = \Re [E_t(z, t) \vec{e}_x] \quad (8)$$

$$E_t(z, t) = \mathcal{E}_t \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \quad (9)$$

Ces différents champs sont représentés sur la figure 1 ainsi que les vecteurs d'ondes associés

$$\vec{k}_i = \vec{k}_+ = \vec{k}_t = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z \quad (10)$$

$$\vec{k}_r = \vec{k}_- = -\frac{\omega}{c} \vec{e}_z \quad (11)$$

1) Que représentent les coefficients R et T ? Que signifie physiquement la relation $R + T = 1$?

2) Justifiez la nature progressive choisie pour le champ $\vec{E}_{III}(z, t)$.

3) Au moyen des coefficients de réflexion et transmission, écrivez trois relations entre les amplitudes $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_+, \mathcal{E}_-$ et \mathcal{E}_t traduisant la transmission/réflexion en $z = 0$ et $z = L$.

4) Déduisez les amplitudes $\mathcal{E}_+, \mathcal{E}_-$ et \mathcal{E}_t en fonction de $\mathcal{E}_i, \omega, L, c, R$ et T . Vous mettrez le résultat sous la forme

$$\mathcal{E}_+ = \frac{\Theta(\omega)}{\sqrt{T}} \mathcal{E}_i \quad (12)$$

$$\mathcal{E}_- = -\Theta(\omega) \sqrt{\frac{R}{T}} \exp\left(-\frac{2i\omega L}{c}\right) \mathcal{E}_i \quad (13)$$

$$\mathcal{E}_t = \Theta(\omega) \mathcal{E}_i \quad (14)$$

et vérifierez que la fonction $\Theta(\omega)$ prend la forme

$$\Theta(\omega) \equiv \frac{T}{1 - R \exp\left(-\frac{2i\omega L}{c}\right)} \quad (15)$$

5) Exprimez la fonction $|\Theta(\omega)|^2$ et tracez sa représentation graphique pour $R = 0,9$ en fonction de la variable réduite $\left(\frac{\omega L}{c}\right)$.

6) Montrez l'existence d'une famille discrète de pulsations $\omega_{n \in \mathbb{N}}$ du champ incident pour lesquelles $|\Theta|^2$ est maximale. À quoi ces pulsations correspondent-elles physiquement pour l'intensité transmise ?

7) Montrez que l'intensité (moyennée sur une période) $I_{II}(z)$ à l'intérieur de la cavité se met sous la forme $I_{II}(z) = \frac{1}{T} |\Theta(\omega)|^2 \mathcal{L}(\omega, z) I_i$ où I_i désigne l'intensité incidente et $\mathcal{L}(\omega, z)$ un terme que vous exprimerez en fonction de R et $\omega(z-L)/c$.

8) Tracez les courbes représentatives de $\mathcal{L}(\omega_n, z)$ pour $R = 0,9$ et $n = 1, 2$ et 3 en fonction de la variable réduite (z/L) . Même question pour $R = 1$; quelle est la nature de l'onde observée à l'intérieur de la cavité dans ce cas ?

9) On revient au cas général ($R < 1$). En vous plaçant au voisinage d'une pulsation ω_n déterminez une expression approchée de la fonction $\Theta(\omega)$ puis mettez la fonction $|\Theta(\omega)|^2$ sous la forme

$$|\Theta(\omega)|^2 \approx \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\omega - \omega_n}{\Delta\omega_{\frac{1}{2}}}\right)^2} \quad (16)$$

où $\Delta\omega_{\frac{1}{2}}$ est un paramètre dont vous préciserez l'expression et la signification physique. Donnez l'expression approchée de $\Delta\omega_{\frac{1}{2}}$ dans la limite $T \ll 1$.

10) En vous servant des résultats précédents, établissez une analogie entre la cavité étudiée et des dispositifs rencontrés dans un (d') autre(s) domaine(s) de la physique. À partir de cette analogie, définissez un facteur de qualité pour la cavité considérée et indiquez sa signification physique.

Dans les questions 11 à 15, on cherche à relier le paramètre $\Delta\omega_{\frac{1}{2}}$ au taux de perte en énergie de la cavité. Pour ce faire, on va suivre une approche particulière. On rappelle qu'une onde électromagnétique est composée de photons, particules sans masse, dont la quantité de mouvement p et l'énergie E sont données par les formules $p = \hbar\omega/c$ et $E = \hbar\omega$, où ω est la pulsation du rayonnement électromagnétique considéré. On admet que, lorsqu'il atteint l'un des miroirs (M_1) ou (M_2), un photon est transmis, sans modification de son énergie ni de sa quantité de mouvement, avec la probabilité T , tandis qu'il « rebondit », sans modification de son énergie mais avec une quantité de mouvement opposée, avec la probabilité R .

11) Exprimez le temps Δt mis par un photon pour parcourir une longueur de cavité.

12) Durant cet intervalle de temps, combien un photon subit-il de rebonds sur les parois de la cavité ?

13) Quelle est la probabilité pour ce photon de quitter la cavité pendant la durée Δt ?

14) Si la cavité contient, à l'instant t , $n_{ph}(t)$ photons, combien de photons auront quitté la cavité à l'instant $(t + \Delta t)$ (on suppose $n_{ph} \gg 1$) ?

15) Reliez l'énergie électromagnétique $E_{em}(t)$ contenue dans la cavité au nombre de photons $n_{ph}(t)$. En supposant $n_{ph} \gg 1$, exprimez la variation d'énergie électromagnétique $(\Delta E_{em})_{pertes}$ entre t et $t + \Delta t$ due aux pertes au niveau des miroirs. En assimilant $(\Delta E_{em})_{pertes}$ et Δt à des éléments infinitésimaux exprimez le taux de perte de la cavité $\gamma \equiv -\frac{1}{E_{em}} \left(\frac{dE_{em}}{dt} \right)_{pertes}$. Finalement, reliez γ au paramètre $\Delta\omega_{\frac{1}{2}}$ introduit à la question 9.

On suppose maintenant que les champs sont quasi-monochromatiques, c'est-à-dire qu'ils peuvent se mettre sous la forme de paquets d'ondes

$$E_+(z, t) = \frac{1}{\sigma} \int \mathcal{E}_+(\omega) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] d\omega \quad (17)$$

$$E_i(z, t) = \frac{1}{\sigma} \int \mathcal{E}_i(\omega) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] d\omega, \quad (18)$$

où les fonctions $\mathcal{E}_+(\omega)$ et $\mathcal{E}_i(\omega)$ ne prennent de valeurs significatives que sur l'intervalle $\left[\omega_c - \frac{\sigma}{2}, \omega_c + \frac{\sigma}{2} \right]$ autour d'une pulsation $\omega_c = \omega_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \ll \frac{\pi c}{L}$.

16) Rappelez brièvement pourquoi un paquet d'ondes de la forme précédente constitue une solution des équations de MAXWELL.

17) En utilisant la forme approchée pour $\Theta(\omega)$ obtenue à la question 9, établissez la relation linéaire entre les composantes $\mathcal{E}_+(\omega)$ et $\mathcal{E}_i(\omega)$ dans le régime $R \approx 1$.

18) Déduisez du résultat précédent l'équation différentielle vérifiée par la fonction E_+

$$\frac{\partial}{\partial t} E_+ \approx - \left[\frac{\gamma}{2} - i\omega_c \right] E_+ + \sqrt{\frac{\gamma c}{4L}} E_i. \quad (19)$$

19) On considère une cavité de longueur $L = 0,9$ mm, constituée de deux miroirs de même coefficient $R = 0,99$. Calculez ω_{3000} ainsi que la longueur d'onde associée λ_{3000} . À quel type d'onde électromagnétique a-t-on affaire ? Calculez $\Delta\omega_{\frac{1}{2}}$ ainsi que le facteur de qualité Q_{3000} . Commenter la comparaison aux ordres de grandeur caractéristiques rencontrés dans d'autres domaines de la physique.

2. Cavité résonante à miroir mobile

Dans cette partie, on suppose que le miroir (M_2) est libre de se déplacer selon la direction z . Il est soumis à la force imposée par le champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité ainsi qu'à une force de rappel élastique linéaire modélisée par un ressort de raideur K et de masse négligeable devant celle du miroir (M_2) qu'on notera m . Expérimentalement, cette configuration peut être réalisée en suspendant le miroir comme un pendule. On repère la position de (M_2) par son écart, noté $\xi(t)$, à sa position d'équilibre à champ incident nul, correspondant à une longueur de cavité L (cf Figure 2). On supposera que le mouvement de (M_2) reste de faible amplitude devant la longueur initiale L de la cavité.

20) Exprimez la longueur de la cavité à la date t .

21) Donnez la nouvelle expression $\omega_c(t)$ de la pulsation introduite dans la première partie. Calculez sa forme approchée au premier ordre en ξ/L . Vous ferez intervenir les grandeurs $\bar{\omega}_c \equiv \frac{n\pi c}{L}$ et $G_c \equiv \frac{\bar{\omega}_c}{L}$ (appelée « constante de couplage électromécanique »).

22) À quelle condition (intuitive) l'équation dynamique (19) reste-t-elle valable ? Pour répondre à cette question, vous pourrez introduire l'échelle des variations temporelles de la fonction $\xi(t)$.

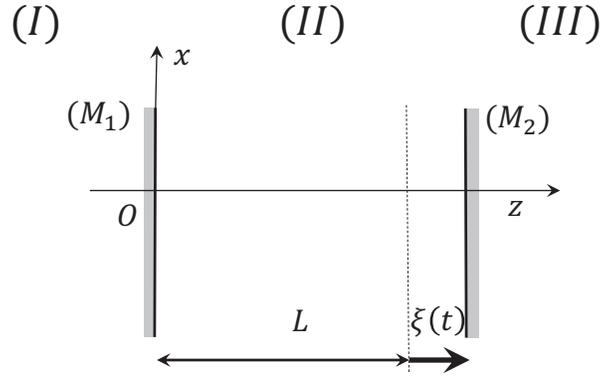


FIGURE 2 – Cavité résonante à miroir mobile (partie 2).

On suppose que le champ incident est monochromatique, de pulsation $\omega_L = \bar{\omega}_c + \Delta$,

$$E_i(z, t) = \mathcal{E}_i \exp \left[i\omega_L \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \quad (20)$$

où \mathcal{E}_i est une constante réelle, et l'on écrit la composante E_+ du champ à l'intérieur de la cavité sous la forme

$$E_+(z, t) = \mathcal{E}_+(t) \exp \left[i\omega_L \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \quad (21)$$

23) Pourquoi suppose-t-on, *a priori*, que $\mathcal{E}_+(t)$ dépend du temps ? Justifiez qualitativement que $\mathcal{E}_+(t)$ ne varie pas de manière significative sur une période du champ incident.

24) Montrez que $\mathcal{E}_+(t)$ vérifie

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_+(t) \approx - \left[i(\Delta + G_c \xi) + \frac{\gamma}{2} \right] \mathcal{E}_+(t) + \sqrt{\frac{\gamma c}{4L}} \mathcal{E}_i \quad (22)$$

Dans les questions 25 à 34, on souhaite déterminer l'expression de la force imposée au miroir (M_2) par le champ électromagnétique en cavité, appelée « force de pression de radiation », en fonction des paramètres du problème et notamment du déplacement $\xi(t)$. Pour ce faire, on va suivre le même type d'approche particulière que dans les questions 11 à 15.

25) Exprimez la quantité de mouvement fournie au miroir (M_2) par un photon de pulsation ω_L lors d'un rebond. Comme dans la première partie, on supposera que ce rebond ne modifie pas l'énergie du photon de manière significative mais change sa quantité de mouvement en son opposée.

26) En notant $dN_{ph} = \pi_{ph}(t) dt$ le nombre de photons qui frappent le miroir (M_2) entre t et $t + dt$, donnez l'expression de la force de pression de radiation due au champ à l'intérieur de la cavité.

27) Reliez $\pi_{ph}(t)$ à la puissance électromagnétique, moyennée sur une période du champ incident, qui est réfléchi par le miroir (M_2) à l'instant t .

28) Montrez que, dans la limite $R \approx 1$, la force de pression de radiation instantanée prend alors la forme

$$F_{pr}(t) \approx \epsilon_0 \mathcal{S} |\mathcal{E}_+(t)|^2 \quad (23)$$

On introduit les nouvelles grandeurs a et a_i définies par

$$\mathcal{E}_+ = a \sqrt{\frac{\hbar \omega_L}{\epsilon_0 \mathcal{S} L}} \quad (24)$$

$$\mathcal{E}_i = a_i \sqrt{\frac{2\hbar \omega_L}{\epsilon_0 c \mathcal{S}}} \quad (25)$$

- 29) Précisez les dimensions respectives de a et a_i et explicitez la signification physique des quantités $|a|^2$ et $|a_i|^2$.
- 30) Établissez l'équation régissant l'évolution de a .
- 31) Établissez l'équation mécanique sur $\xi(t)$ régissant le mouvement du miroir. Vous introduirez la pulsation propre de l'oscillateur Ω que vous relierez à la raideur K du ressort et la masse m de (M_2) .
- 32) On se propose d'étudier le système dans le cas $\gamma \gg \Omega$. Que signifie cette condition physiquement ?
- 33) Montrez que, pour des temps $t \gg 1/\gamma$, on peut alors écrire

$$a(t) \approx \frac{\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}{i[\Delta + G_c \xi(t)] + \frac{\gamma}{2}} a_i. \quad (26)$$

- 34) Dans le régime considéré à la question précédente, établissez l'expression de la force de pression de radiation.

Dans la suite du problème, on supposera toujours être dans les conditions d'application de la formule (26).

Le but des questions 35 à 40 est d'étudier les positions d'équilibre mécanique du miroir mobile (M_2) , ainsi que leur stabilité.

- 35) Établissez la condition d'équilibre mécanique du miroir mobile (M_2) reliant ξ à $|a_i|^2$.

36) En l'absence de champ incident, déterminez le nombre et la nature (stable ou instable) de points d'équilibre du miroir mobile (M_2) .

On considère maintenant le cas d'un champ incident non nul.

37) Mettez la condition d'équilibre identifiée à la question 35 sous la forme $A\xi = F(\xi)$, où F est une fonction sans dimension de maximum unité et A une constante qui s'exprime en fonction des paramètres du problème, puis montrez comment déterminer graphiquement le(s) point(s) d'équilibre du miroir (M_2) .

38) À l'aide de la représentation graphique de la question précédente, montrez que le miroir (M_2) possède au plus trois points d'équilibre et étudiez leur stabilité respective. Justifiez le nom de bistabilité donné au phénomène observé.

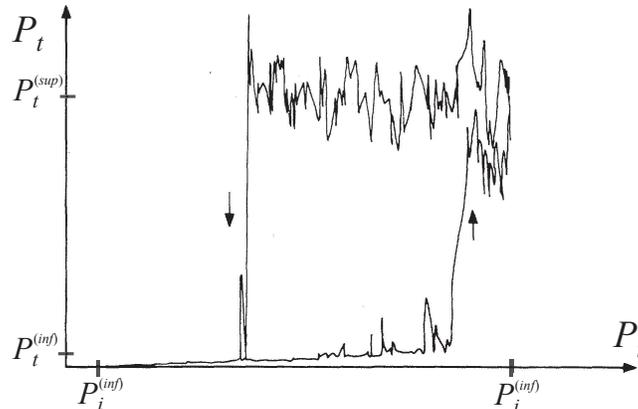


FIGURE 3 – Relevé expérimental de la puissance P_t (représentée en ordonnée) transmise par une cavité ($L = 0,9$ mm, $m = 60$ mg, $R = 0,99$) obtenu en faisant passer très lentement la puissance du champ incident P_i (représentée en abscisse) de $P_i^{(inf)} = 1,1$ W à $P_i^{(sup)} = 2,2$ W et inversement. Lors du passage $P_i^{(inf)} \rightarrow P_i^{(sup)}$, on suit la partie inférieure du cycle d'hystérésis (le niveau moyen du plateau inférieur est $P_i^{(inf)} \approx 0,2$ mW) ; au cours du passage $P_i^{(sup)} \rightarrow P_i^{(inf)}$, on suit la partie supérieure du cycle (le niveau moyen du plateau supérieur est $P_i^{(sup)} \approx 5$ mW). La figure est extraite de A. DORSEL *et al*, Phys. Rev. Lett. **51**, 1550 (1983).

39) À partir de la condition d'équilibre de la question 35, montrez qu'il est nécessaire de choisir $\Delta < -\frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$ pour obtenir plus d'un point d'équilibre pour le miroir (M_2).

40) En supposant $\Delta < -\frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$, identifiez l'intervalle dans lequel $|a_i|^2$ doit se situer pour qu'il existe plus d'un point d'équilibre pour le miroir mobile (M_2).

Dans les questions suivantes, on considère une cavité de longueur initiale $L = 0,9$ mm, constituée d'un miroir massif (immobile) et d'un miroir mobile de masse 60 mg, tous deux possédant le même coefficient $R = 0,99$. La figure 3 présente un relevé expérimental de la puissance transmise par la cavité, notée P_t et représentée en ordonnée, obtenu lorsque l'on fait passer très lentement la puissance incidente P_i (représentée en abscisse) de la valeur inférieure $P_i^{(\text{inf})}$ vers la valeur supérieure $P_i^{(\text{sup})}$, puis inversement. La courbe obtenue, appelée cycle d'hystérésis, présente deux branches dont le sens de parcours est indiqué par des flèches : durant la première phase, c'est-à-dire lorsque l'on augmente P_i de $P_i^{(\text{inf})}$ à $P_i^{(\text{sup})}$, on suit la partie inférieure du cycle ; au cours de la deuxième phase, c'est-à-dire lorsque l'on diminue P_i de $P_i^{(\text{sup})}$ à $P_i^{(\text{inf})}$, on suit la partie supérieure du cycle.

41) Établissez la relation entre puissances transmise et incidente faisant intervenir la quantité ξ .

42) En vous appuyant sur les résultats des questions 37 et 38, donnez une interprétation qualitative des résultats obtenus. Expliquez notamment l'existence de deux plateaux pour la puissance transmise et le « passage » de l'un à l'autre de ces plateaux. Vous pourrez vous aider de représentations graphiques de votre choix pour illustrer votre réponse.

* *
*