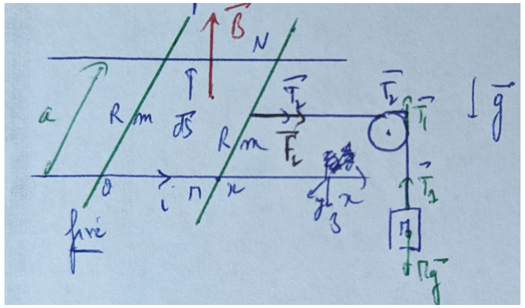
Correction du TD n°18/DM n°6

Exercice 1 : Rails de Laplace (Centrale)



- **Analyse qualitative** : la masse M met en mouvement la tige de droite, la surface du circuit soumis à B augmente donc d'après la loi de Faraday il y apparait une fem et un courant induits. Ce courant en présence d'un champ magnétique donne naissance à une force de Laplace qui, d'après la loi de Lenz, s'oppose à la cause qui lui a donné naissance : la masse M est freinée !
- **Équation électrique** : le flux du champ magnétique s'écrit

$$\varphi = \iint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint B\overrightarrow{u_z} \cdot dS\overrightarrow{u_z} = Bax$$

La loi de Faraday donne alors

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -Ba\dot{x}$$

et le schéma électrique équivalent conduit à $e = 2Ri$ par la loi des mailles ou encore

$$\boxed{i = -\frac{Ba\dot{x}}{2R}}$$

- **Équation mécanique** : la tige de droite est soumise, dans le référentiel terrestre supposé galiléen à son poids $m\overrightarrow{g}$, la réaction du support $\overrightarrow{N}$, la tension du fil $\overrightarrow{T_2}$ ainsi qu'à la force de Laplace

$$\overrightarrow{F_L} = i\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B} = ia\overrightarrow{u_y} \wedge B\overrightarrow{u_z} = iaB\overrightarrow{u_x}$$

On vérifie au passage qu'elle est bien selon $-\overrightarrow{u_x}$ si $\dot{x} > 0$ en accord avec la loi de Lenz. Le PFD projeté sur $\overrightarrow{u_x}$ donne alors

$$m\ddot{x} = T_2 + iaB$$

La masse M est soumise à son poids et à la tension du fil $\overrightarrow{T_1}$, le PFD projeté sur $\overrightarrow{u_z}$ s'écrit

$$M\ddot{z} = Mg - T_1$$

On se retrouve avec quatre inconnues : T_1, T_2, x et z et deux équations. Il nous faut donc en trouver deux autres, en utilisant le fait que ces deux systèmes sont reliés entre eux. Le fil sans masse assure que la tension des fils y est conservée en vecteur et un TMC par rapport à (Oy) fixe appliqué à la poulie sans masse donne

$$0 = J\ddot{\theta} = T_1R - T_2R \Rightarrow T_1 = T_2$$

Enfin, le fil étant inélastique, sa longueur est constante, donc $\ell - x + z = cte$, ce qui donne en dérivant que $\ddot{x} = \ddot{z}$ (et on vérifie que le signe est bon physiquement).

- **Résolution** :
Finalement, en sommant les deux PFD précédents et en utilisant l'équation électrique, on aboutit à

$$(m + M)\ddot{z} + \frac{B^2a^2}{2R}\dot{z} = Mg$$

On remarque que la force de Laplace est de type frottement fluide et on vérifie qu'en l'absence de champ magnétique, la masse M tombe en chute libre, modulo l'inertie de la barre qui la ralentit, comme dans la machine d'Atwood. En posant $v = \dot{z}$, on obtient

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2a^2}{2R(M+m)}v = \frac{Mg}{M+m}$$

qui a pour solution

$$v = Ae^{-t/\tau} + \frac{2MgR}{B^2a^2} = \boxed{v_{\lim}(1 - e^{-t/\tau})}$$

puisque la masse part avec une vitesse nulle et en posant

$$\boxed{\tau = \frac{2R(m+M)}{B^2a^2}} \text{ et } \boxed{v_{\text{lim}} = \frac{2MgR}{B^2a^2}}$$

On atteint une vitesse limite car la force de LAPLACE croît au cours de la chute de M jusqu'à ce qu'elle compense le poids, ce qui conduit à une somme des forces nulle et donc à une vitesse constante. On peut alors tracer la courbe et vérifier que plus l'induction est importante (B grand) et plus le système est ralentit vite et atteint une vitesse limite faible.

Exercice 2 : Oscillateur à inductance mutuelle (Centrale)

1) On commence par une étude qualitative du filtre. En basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil donc la tension de sortie est nulle. En haute fréquence, c'est le condensateur qui joue ce rôle, donc la sortie est nulle aussi. On en déduit que l'on a affaire à un **passe bande**.

En appelant Z l'impédance équivalente de la bobine et du condensateur en parallèle, on se retrouve avec une structure de type pont diviseur de tension et donc la fonction de transfert s'écrit

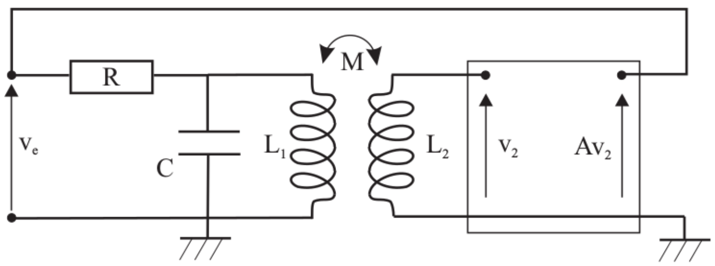
$$\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}+R} = \frac{1}{1+R\underline{Y}} = \frac{1}{1+jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

ou encore, sous forme canonique

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}}$$

en introduisant la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et le facteur de qualité $\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$.

2) On rappelle le circuit étudié



a) Les relations courant-tension pour les deux inductances couplées s'écrivent

$$\begin{cases} \underline{v_s} = \underline{v_1} = jL\omega\underline{i_1} + jM\omega\underline{i_2} = jL\omega\underline{i_1} \\ \underline{v_2} = jL\omega\underline{i_2} + jM\omega\underline{i_1} = jM\omega\underline{i_1} \end{cases}$$

puisque l'ampli ne prend pas de courant, donc $i_2 = 0$. D'autre part, il est bouclé sur l'entrée, ce qui donne

$$\underline{v_e} = A\underline{v_2} = AjM\omega\underline{i_1} = jAM\omega\frac{\underline{v_s}}{jL\omega} = \frac{AM}{L}\underline{H}\underline{v_e}$$

ou encore

$$\underline{v_e}\left(1 - \frac{AM\underline{H}}{L}\right) = 0$$

On en déduit que $\underline{v_e} = 0$ ou

$$\frac{AM}{L} = \frac{1}{\underline{H}} = 1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

ce qui conduit à la possibilité d'une solution non nulle si

$$\boxed{A_c = \frac{L}{M}} \text{ et } \boxed{\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

b) on remplace v_e par v_s dans l'équation en complexe précédente

$$\frac{\underline{v_s}}{\underline{H}}\left(1 - \frac{AM\underline{H}}{L}\right) = 0$$

soit

$$\underline{v_s}\left(1 + jRC\omega + \frac{R}{jL\omega} - \frac{AM}{L}\right) = 0$$

ou encore

$$\underline{v_s}[(j\omega)^2 RLC + j\omega(L - AM) + R] = 0$$

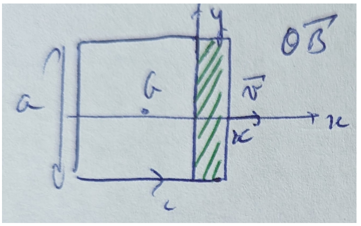
puis on repasse en réel pour obtenir l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{(L-AM)}{RLC}\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{LC}v_s = 0}$$

On se trouve donc en présence d'un oscillateur harmonique si $L = AM$, amorti si $L > AM$, c'est-à-dire $A < A_c$, et amplifié si $L < AM$. Les oscillations dans ce dernier cas finissent par saturer car l'ampli à une limite en tension de sortie et sature. L'amplitude des oscillations est alors fixée par sa non linéarité (cf TP sur l'oscillateur quasi sinusoïdal)

c) On ne peut pas observer d'oscillations si $\boxed{M < 0}$, car dans ce cas elles sont forcément amorties et disparaissent rapidement, d'après les conditions de la question précédente. Il suffit alors de **retourner une bobine**, ce qui change M en $-M$ et redonne la possibilité d'obtenir un oscillateur !

Exercice 3 : Cadre supraconducteur en mouvement (X-ESPCI)



1) Analyse physique : En pénétrant dans la zone $x > 0$, le cadre possède une surface variable dans un champ $\overrightarrow{B}$. Le flux magnétique va dépendre du temps, d'où une fem et un courant induits, ce dernier donnant lieu à une force de LAPLACE qui s'oppose à la cause qui lui a donné naissance, d'après la loi de LENZ.

La nouveauté ici est que le cadre est supraconducteur, ce qui veut dire que sa résistance électrique est nulle et donc que l'on ne peut pas négliger l'effet de son inductance devant celle-ci. On verra que cela implique que la force de LAPLACE n'est plus de type frottement fluide mais plutôt de type ressort, ce qui explique que le cadre puisse revenir en arrière !

Le calcul de la fem est identique à celui de l'exercice 1, seul l'équation électrique diffère ce qui donne

$$e = -Ba\dot{x} = L\frac{di}{dt} \tag{1}$$

d'où

$$i = -\frac{Bax}{L} + cte$$

où la constante est nulle d'après les CI. Le cadre n'étant soumis, en plus de son poids et de la réaction du support, qu'à la force de LAPLACE, le TRC projeté sur l'axe (Ox) donne

$$m\frac{d^2(x - a/2)}{dt^2} = iaB = -\frac{B^2a^2}{L}x \tag{2}$$

en utilisant la position x_G du barycentre G du cadre, comme il se doit. On obtient donc un oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \frac{B^2a^2}{mL}x = 0$$

qui a pour solution

$$x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \text{ avec } \omega = \frac{Ba}{\sqrt{mL}}$$

Les CL $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$ conduisent alors à

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$$

qui n'est valable que tant que tout le cadre n'est pas dans le champ magnétique, c'est-à-dire tant que $\boxed{\frac{v_0}{\omega} < a}$. Il est logique qu'il ne faille pas lancer trop vite si on veut que le cadre revienne et que plus B donc ω est grand et plus la vitesse limite est élevée. Le cadre peut alors revenir en arrière en $x = 0$ pour $\omega t_0 = \pi$ avec une vitesse $\boxed{\dot{x}(t_0) = v_0\cos(\pi) = -v_0}$.

2) Si $v_0 > a\omega$ alors le cadre se retrouve tout entier dans B et sa surface S ne varie plus à partir de $x(t_1) = a$, soit $\sin(\omega t_1) = \frac{a\omega}{v_0}$ ou encore

$$\boxed{t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{a\omega}{v_0}\right)}$$

Alors, le cadre n'est plus soumis qu'à son poids et à la réaction du support qui se compensent : il continue en translation rectiligne uniforme à la vitesse

$$v_\infty = \dot{x}(t_1) = v_0 \cos(\omega t_1) = v_0 \cos\left(\arcsin\left(\frac{a\omega}{v_0}\right)\right) = v_0 \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{a\omega}{v_0}\right)\right)}$$

ou encore

$$\boxed{v_\infty = \sqrt{v_0^2 - a^2\omega^2} < v_0}$$

On peut aussi déterminer le courant qui parcourt le cadre

$$\boxed{i_\infty = -\frac{Bax(t_1)}{L} = -\frac{Ba^2}{L}}$$

qui est bien une constante, en accord avec le caractère supraconducteur du cadre !

En multipliant l'équation (1) par i et l'équation (2) par $\dot{x}$, on obtient

$$Li\frac{di}{dt} = -Bai\dot{x} = -m\dot{x}\ddot{x}$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) = 0$$

Or, l'énergie magnétique dans la bobine se réécrit

$$\frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\left(-\frac{Bax}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{B^2a^2}{L}\right)x^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

en utilisant la constante de raideur du ressort équivalent, issue de la pulsation calculée précédemment

$$\omega = \frac{Ba}{\sqrt{mL}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ soit } k = \frac{B^2a^2}{L}$$

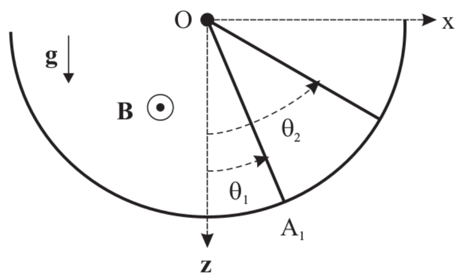
.

Le bilan d'énergie mécanique s'écrit alors

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 + \frac{1}{2}Li_\infty^2 = \text{cte}$$

ce qui est en accord avec le fait qu'il n'y ait pas d'effet JOULE donc pas de pertes.

Exercice 4 : Pendules couplés par induction (Centrale)



1) La surface du circuit, comprise entre les deux pendules, varie dans un champ magnétique stationnaire. Il apparait donc une fem induite, d'après la loi de FARADAY, ce qui conduit à un courant induit puisque le circuit est fermé.

Les deux barres sont alors parcourues par un courant et soumises à un champ $\overrightarrow{B}$, elles subissent donc des forces de LAPLACE qui s'opposent à la cause qui leur a donné naissance, d'après la loi de LENZ. La barre OA_2 est donc freinée et la barre OA_1 mise en mouvement, afin que la variation de la surface entre les deux cesse.

Or, les deux pendules sont aussi soumis à leurs poids et vont osciller avec une période différente si leurs amplitudes sont différentes [1]. On en déduit qu'aux temps longs, on doit nécessairement avoir $\theta_1(t) = \theta_2(t)$ (et non pas juste $\theta_2 - \theta_1 = $ cte), c'est-à-dire que les deux pendules oscillent comme un seul.

1. La période d'un pendule dépend de son amplitude quand on ne se limite pas aux petits angles (pour lesquels il y a isochronisme), à cause de l'effet non linéaire du $\sin\theta$ de l'équation.

2) Le flux du champ magnétique s'écrit, en prenant une orientation arbitraire du courant dans le sens trigo du circuit OA_1A_2

$$\varphi = \iint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint B dS = B \int_{r=0}^{a} r dr \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{Ba^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)$$

La loi de FARADAY et la loi des mailles donnent alors l'équation électrique suivante

$$\boxed{e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{Ba^2}{2}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = 2Ri} \qquad \text{(EE)}$$

Chacune des deux tiges en rotation est soumise :

- aux forces de contact en O, de type pivot parfait donc de moment nul par rapport à (Oy) ;
- au moment du poids, s'appliquant au barycentre G de la barre, de valeur par rapport à l'axe (Oy) : $-mg\frac{a}{2}\sin\theta_i$;
- à la force de LAPLACE [2] $\overrightarrow{dF_{L2}} = i\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B} = iBdr\overrightarrow{u_\theta}$ pour la barre 2. Son moment s'écrit

$$\overrightarrow{M_{L2}} = \int_O^{A_2} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF_{L2}} = \int_0^a iBrdr\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta} = \frac{iBa^2}{2}\overrightarrow{u_y}$$

Le théorème du moment cinétique par rapport à (Oy) fixe, appliqué à la barre 2 dans le référentiel terrestre supposé galiléen, donne [3]

$$J\ddot{\theta}_2 = 0 - mg\frac{a}{2}\sin\theta_2 + \frac{iBa^2}{2} \overset{\text{(EE)}}{=} -mg\frac{a}{2}\sin\theta_2 + \frac{B^2a^4}{8R}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

Il suffit d'intervertir θ_2 et θ_1 pour obtenir l'équation sur la tige 1. On aboutit finalement aux deux équations différentielles **couplées** suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \dfrac{3B^2a^2}{8mR}\dot{\theta}_1 + \dfrac{3g}{2a}\sin\theta_1 = \dfrac{3B^2a^2}{8mR}\dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 + \dfrac{3B^2a^2}{8mR}\dot{\theta}_2 + \dfrac{3g}{2a}\sin\theta_2 = \dfrac{3B^2a^2}{8mR}\dot{\theta}_1 \end{cases}} \qquad \text{(EM)}$$

On vérifie les signes (que des +!) en s'assurant que l'on retrouve bien un oscillateur harmonique amorti aux petits angles.

2. On peut vérifier que la force est bien résistante si $\dot{\theta}_2 > \dot{\theta}_1$
3. On vérifie que le moment des forces de LAPLACE est bien de type frottement fluide, et résistant si $\dot{\theta}_2 > \dot{\theta}_1$.

3) On y passe justement afin de pouvoir résoudre analytiquement. On utilise pour cela une technique à se rappeler, qui consiste à changer de variable en utilisant plutôt la **somme** ($\sigma = \theta_1 + \theta_2$) et la **différence** ($\delta = \theta_2 - \theta_1$), ce qui permet de *découpler* les équations.

Ainsi, la somme des deux équations mécaniques conduit à

$$\ddot{\sigma} + \frac{3g}{2a}\sigma = 0 \text{ soit } \sigma = A\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$$

Les conditions initiales

$$\begin{cases} \sigma(0) = \theta_1(0) + \theta_2(0) = \theta_0 \\ \dot{\sigma}(0) = \dot{\theta}_1(0) + \dot{\theta}_2(0) = 0 \end{cases} \quad \text{donnent } \boxed{\sigma = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$$

De même, la différence entre les deux équations permet d'écrire

$$\ddot{\delta} + \frac{3B^2a^2}{4mR}\dot{\delta} + \frac{3g}{2a}\delta = \ddot{\delta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\delta} + \omega_0^2\delta = 0 \text{ avec } Q = \frac{4mR\omega_0}{3B^2a^2}$$

Cette équation différentielle du deuxième ordre homogène, mise sous forme canonique, se résout comme dans le cours. En supposant le facteur de qualité suffisamment bon ($Q > 1/2$) et en utilisant les conditions initiales $\delta(0) = \theta_0$ et $\dot{\delta}(0) = 0$, on obtient la solution pseudo-périodique suivante

$$\boxed{\delta = \theta_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(\cos(\omega t) + \frac{\theta_0\omega_0}{2Q\omega}\sin(\omega t)\right)} \text{ avec } \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Il reste, enfin, à repasser aux angles initiaux avec $\theta_1 = (\sigma - \delta)/2$ et $\theta_2 = (\sigma + \delta)/2$, ce qui est un tantinet lourd, à moins que $Q \gg 1$ ...

Remarque : On vérifie bien que pour $t \to \infty$, on a $\delta \to 0$ et donc $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\theta_0}{2}\cos(\omega_0 t)$, comme annoncé qualitativement au début. Le système oscille alors sans atténuation puisque s'il n'y a pas d'induction alors le courant est nul et donc les pertes par effet JOULE aussi !