

Correction du DM n°8 (XULS MP 2016)

1. Cavité résonante de longueur fixée

1) Quand les indices des deux milieux séparés par un miroir sont identiques, les coefficients R et T sont les coefficients de réflexion et transmission en énergie. Ils représentent les portions de l'intensité de l'onde incidente (puissance rayonnée ou module du vecteur de POYNTING) qui sont respectivement réfléchie et transmise.

Dès lors, la relation $R + T = 1$ exprime la conservation de l'énergie.

2) L'onde transmise ne se réfléchit sur aucun obstacle à droite du second miroir de sorte qu'aucune onde, issue de l'onde incidente, ne se propagera dans le milieu III vers les z décroissants.

3) Au niveau du miroir (M_2), en $z = L$, les champs \mathbf{E}_t et \mathbf{E}_- sont dus à la transmission et à la réflexion de \mathbf{E}_+ de sorte que

$$\underline{\mathcal{E}_t e^{-i\omega L/c} = \tau \mathcal{E}_+ e^{-i\omega L/c}} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{E}_- e^{i\omega L/c} = -\rho \mathcal{E}_+ e^{-i\omega L/c}}. \quad (1)$$

Au niveau de (M_1), \mathbf{E}_+ est dû à la fois à la réflexion de \mathbf{E}_- et à la transmission de \mathbf{E}_i donc

$$\underline{\mathcal{E}_+ = -\rho \mathcal{E}_- + \tau \mathcal{E}_i}. \quad (2)$$

4) Puisque (1) donne $\mathcal{E}_- = -\rho \mathcal{E}_+ e^{-2i\omega L/c}$, (2) devient

$$\mathcal{E}_+ - \rho^2 e^{-2i\omega L/c} \mathcal{E}_+ = \tau \mathcal{E}_i$$

soit en utilisant $\rho^2 = R$ et $\tau = \sqrt{T}$,

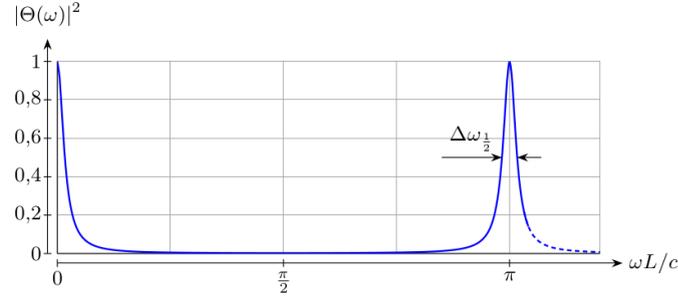
$$\underline{\mathcal{E}_+ = \frac{\Theta(\omega)}{\sqrt{T}} \mathcal{E}_i} \quad \text{où} \quad \underline{\Theta(\omega) = \frac{T}{1 - R e^{-2i\omega L/c}}}. \quad (3)$$

En portant cette relation dans (1), on obtient

$$\underline{\mathcal{E}_t = \Theta(\omega) \mathcal{E}_i} \quad \text{et} \quad \underline{\mathcal{E}_- = -\Theta(\omega) \sqrt{\frac{R}{T}} e^{-2i\omega L/c} \mathcal{E}_i}.$$

5) On calcule

$$|\Theta(\omega)|^2 = \frac{T^2}{(1 - R e^{-2i\omega L/c})(1 - R e^{+2i\omega L/c})} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos(2\omega L/c)} = \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\omega L/c)}$$

Fig. 1 : $R = 0,9$ et $4R/T^2 = 360$

et, avec $1 - R = T$,

$$|\Theta(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{4R}{T^2} \sin^2\left(\frac{\omega L}{c}\right)}. \quad (4)$$

6) La fonction $|\Theta(\omega)|^2$ est maximale à chaque fois que son dénominateur est minimal, donc pour

$$\omega = \omega_n = \frac{n\pi c}{L}.$$

Pour ces pulsations particulières, le champ transmis est égal au champ incident en module et toute l'intensité incidente est transmise.

7) L'intensité moyenne d'un faisceau lumineux est $I = K \langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} K E E^*$. L'intensité incidente est donc¹ $I_i = \frac{1}{2} K \mathcal{E}_i^2$ et

$$\begin{aligned} I_{II}(z) &= \frac{K}{2} (E_+ + E_-)(E_+^* + E_-^*) = \frac{K}{2} \left(\mathcal{E}_+ \mathcal{E}_+^* + \mathcal{E}_+ \mathcal{E}_-^* e^{-2i\omega z/c} + \mathcal{E}_- \mathcal{E}_+^* e^{2i\omega z/c} + \mathcal{E}_- \mathcal{E}_-^* \right) \\ &= I_i \left(\frac{|\Theta(\omega)|^2}{T} - \frac{\sqrt{R} |\Theta(\omega)|^2}{T} e^{2i\omega(L-z)/c} - \frac{\sqrt{R} |\Theta(\omega)|^2}{T} e^{2i\omega(z-L)/c} + \frac{R |\Theta(\omega)|^2}{T} \right) \\ &= I_i \frac{|\Theta(\omega)|^2}{T} \left(1 - \sqrt{R} e^{2i\omega(L-z)/c} - \sqrt{R} e^{2i\omega(z-L)/c} + R \right) \end{aligned}$$

d'où

$$I_{II}(z) = I_i \frac{|\Theta(\omega)|^2}{T} \mathcal{L}(\omega, z) \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(\omega, z) = 1 + R - 2\sqrt{R} \cos\left(\frac{2\omega(L-z)}{c}\right)$$

ou encore

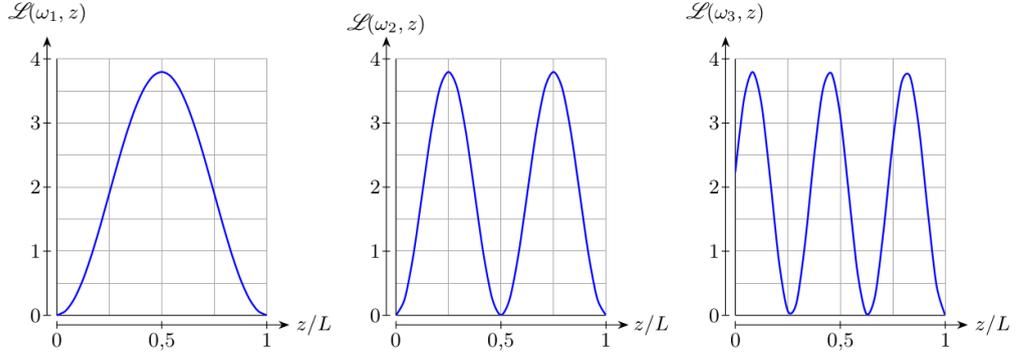
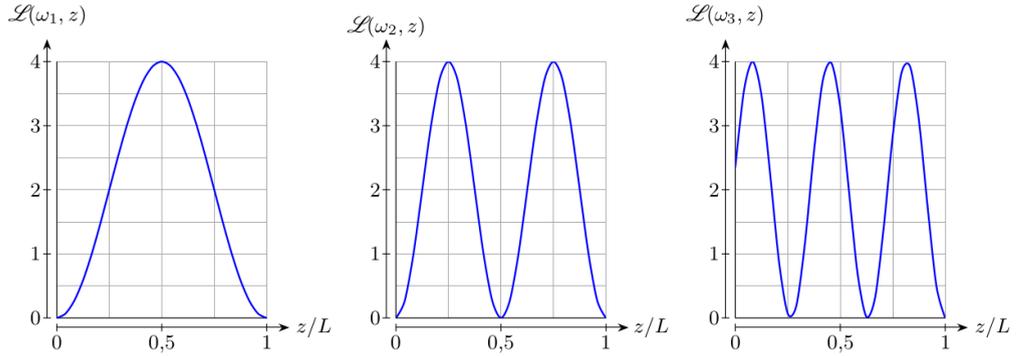
$$\mathcal{L}(\omega, z) = \left(1 - \sqrt{R}\right)^2 + 4\sqrt{R} \sin^2\left(\frac{\omega(L-z)}{c}\right)$$

Ainsi $\mathcal{L}(\omega, z)$ varie-t-il sinusoidalement entre $\left(1 - \sqrt{R}\right)^2$ et $\left(1 + \sqrt{R}\right)^2$.

8) Pour $R = 0,9$, $\mathcal{L}(\omega, z)$ varie de $2,6 \times 10^{-3}$ à $3,8$ et, pour $n = 1, 2, 3$, son allure est indiquée sur la Fig. 2.

Pour $R = 1$, $\mathcal{L}(\omega, z)$ varie de 0 à 4 et, pour $n = 1, 2, 3$, son allure est indiquée sur la Fig. 3. Dans ce dernier cas, le flux d'énergie est nul en certains points de la cavité (les nœuds de I_{II}) : l'onde est stationnaire.

¹ L'amplitude \mathcal{E}_i peut toujours être prise réelle par choix de l'origine des temps ; une fois ce choix fait, les autres amplitudes doivent être considérées comme complexes.

Fig. 2 : $R = 0,9$ Fig. 3 : $R = 1$

9) Dans (3), on pose $\omega = \omega_n + \delta\omega$ et on obtient

$$\Theta(\omega) = \frac{T}{1 - R e^{-2in\pi - 2i\delta\omega L/c}} \approx \frac{T}{1 - R \left(1 - \frac{2i\delta\omega L}{c} - \frac{2\delta\omega^2 L^2}{c^2}\right)} = \frac{T}{1 - R + \frac{2iR\delta\omega L}{c} + \frac{2R\delta\omega^2 L^2}{c^2}}$$

et, avec $1 - R = T$,

$$\Theta(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2iR\delta\omega L}{cT} + \frac{2R\delta\omega^2 L^2}{c^2 T}}. \quad (5)$$

Le carré du module du dénominateur est

$$\left(1 + \frac{2R\delta\omega^2 L^2}{c^2 T}\right)^2 + \frac{4R^2\delta\omega^2 L^2}{c^2 T^2} \approx 1 + \frac{4R\delta\omega^2 L^2}{c^2 T} + \frac{4R^2\delta\omega^2 L^2}{c^2 T^2} = 1 + \frac{4R\delta\omega^2 L^2}{c^2 T^2} (T + R)$$

d'où

$$|\Theta(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\omega - \omega_n}{\Delta\omega_{\frac{1}{2}}}\right)^2} \quad \text{où} \quad \Delta\omega_{\frac{1}{2}} = \frac{cT}{L\sqrt{R}}. \quad (6)$$

Lorsque $|\omega - \omega_n| = \frac{1}{2}\Delta\omega_{\frac{1}{2}}$, on a $|\Theta(\omega)|^2 = \frac{1}{2}$, de sorte que $\Delta\omega_{\frac{1}{2}}$ représente la largeur à mi-hauteur des pics de la Fig. 1.

Dans le cas d'une transmission faible ($R \approx 1$ et $T \ll 1$), on aura

$$\Delta\omega_{\frac{1}{2}} \approx \frac{cT}{L}. \quad (7)$$

10) La physique offre de nombreux exemples de résonateurs en mécanique ou en électricité par exemple. On traite usuellement de la fonction de transfert $\underline{H}(i\omega)$ dont le rôle est ici joué par $\Theta(\omega)$; on doit par conséquent faire une analogie entre $|\underline{H}(\omega)|^2$ et la forme lorentzienne de la résonance optique donnée par (6).

Pour un passe-bande, la forme canonique de la fonction de transfert donne

$$|\underline{H}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \approx \frac{1}{1 + 4Q^2 \left(\frac{\delta\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

lorsque $\omega = \omega_0 + \delta\omega \approx \omega_0$. On pourra donc poser, par analogie,

$$Q_n = \frac{\omega_n}{\Delta\omega_{\frac{1}{2}}} \quad \text{soit} \quad Q_n = n \frac{\pi\sqrt{R}}{T}$$

Ce facteur de qualité est grand lorsque R est proche de 1, c'est-à-dire lorsque l'énergie perdue par transmission à chaque réflexion est faible devant l'énergie réfléchiée par le miroir. On se retrouve en accord avec la définition

$$Q = \frac{E}{\Delta E},$$

rapport de l'énergie de l'oscillateur à l'énergie perdue par période.

On a notamment, dans le cas $R \approx 1$

$$Q_n = \frac{n\pi}{T}. \quad (8)$$

11) La vitesse du photon étant c , il mettra un temps $\Delta t = L/c$ pour parcourir la longueur L .

12) Sur cet intervalle de temps, il ne peut subir qu'un seul rebond.

13) La probabilité de sortie du photon sur une durée Δt est donc égale à T .

14) Le nombre de photons sortant entre t et $t + \Delta t$ sera $\Delta n_{\text{ph}} = T n_{\text{ph}}(t)$.

15) L'énergie de la cavité est $E_{\text{em}}(t) = n_{\text{ph}}(t)\hbar\omega$ et l'énergie perdue en Δt est $\Delta E_{\text{em}} = T E_{\text{em}}$. Le taux de perte de la cavité est alors

$$\gamma = \frac{1}{E_{\text{em}}} \frac{dE_{\text{em}}}{dt} \approx \frac{1}{E_{\text{em}}} \frac{\Delta E_{\text{em}}}{\Delta t} = \frac{T}{\Delta t}$$

soit, avec (7),

$$\gamma = \frac{cT}{L} = \Delta\omega_{\frac{1}{2}}$$

dans le cas où $R \approx 1$.

16) Les équations de MAXWELL sont linéaires ; toute superposition de solutions en constitue aussi une solution.

17) En utilisant (5) au premier ordre et avec $R \approx 1$ dans (3), on pourra écrire

$$\mathcal{E}_i = \frac{\sqrt{T}}{\Theta(\omega)} \mathcal{E}_+ \approx \sqrt{T} \left(1 + \frac{2i(\omega - \omega_c)L}{cT} \right) \mathcal{E}_+$$

ou encore

$$\underline{\mathcal{E}_i} = \sqrt{T} \left(1 - \frac{2i\omega_c L}{cT} \right) \underline{\mathcal{E}_+} + \frac{2L}{c\sqrt{T}} i\omega \underline{\mathcal{E}_+}.$$

18) On peut réécrire la relation précédente sous la forme

$$i\omega \underline{\mathcal{E}_+} = \frac{c\sqrt{T}}{2L} \underline{\mathcal{E}_i} - \frac{cT}{2L} \left(1 - \frac{2i\omega_c L}{cT} \right) \underline{\mathcal{E}_+} = \sqrt{\frac{c\gamma}{4L}} \underline{\mathcal{E}_i} - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_c \right) \underline{\mathcal{E}_+}.$$

Mais $i\omega\mathcal{E}_+$ n'est autre que la composante de FOURIER de $\frac{\partial E_+}{\partial t}$, d'où, par transformation inverse,

$$\frac{\partial E_+}{\partial t} = -\left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_c\right) E_+ + \sqrt{\frac{c\gamma}{4L}} E_i. \quad (9)$$

19) Pour la cavité étudiée, $\omega_{3000} = 3,1 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ et $\lambda_{3000} = 600 \text{ nm}$; La raie est visible dans le jaune. La largeur de la raie est $\Delta\omega_{\frac{1}{2}} = 3,3 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ et (8) donne $Q_n = 9,4 \times 10^5$.

On est bien au-delà du facteur de qualité d'un quartz ($Q \approx 10^4 - 10^5$) ou d'un diapason mécanique ($Q \approx 10^4$).

2. Cavité résonante à miroir mobile

20) À tout instant la longueur de la cavité est $\ell(t) = L + \xi(t)$.

21) Les oscillations du miroir se font avec des pulsations très petites devant la pulsation résonante de la cavité, de sorte que la longueur de la cavité peut être considérée comme constante sur de grandes portions des trains d'onde émis par le laser. Dans ce cas

$$\omega_c(t) = \frac{n\pi c}{\ell(t)} = \bar{\omega}_c \left(1 + \frac{\xi(t)}{L}\right)^{-1} \quad \text{soit} \quad \omega_c(t) = \bar{\omega}_c - G_c \xi(t). \quad (10)$$

22) Le champ dans la cavité sera essentiellement un champ oscillant à une pulsation proche de $\bar{\omega}_c$ mais qui se trouve modulé par les mouvements du miroir; il s'écrit donc sous la forme d'un paquet d'onde dont la largeur σ est de l'ordre de la pulsation du mouvement du miroir. Le champ E_+ obéit donc à une équation du type (9) mais où maintenant la longueur L est variable.

L'équation (9) fait intervenir trois constantes de temps que l'on a évalué en 19)

$$\frac{1}{\tau_1} = \omega_c \approx 3 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \gg \frac{1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{\gamma c}{4L}} \approx 2 \times 10^{10} \text{ s}^{-1} > \frac{1}{\tau_3} = \gamma \approx 3 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$$

Tant que les variations de $\ell(t)$ se font à des pulsations très petites devant γ , On peut considérer que (9) est valable en y remplaçant L par $\ell(t)$.

23) La longueur de la cavité variant dans le temps, on a vu que le champ E_+ ne peut pas être purement sinusoïdal, même si le paquet d'onde correspondant est fortement centré sur la pulsation du champ incident (ou sur toute autre pulsation proche de celle-ci, par exemple $\bar{\omega}_c$). Il est donc naturel de chercher à écrire le champ sous la forme d'une sinusoïde de pulsation donnée, dont l'amplitude est modulée au cours du temps.

24) Avec la forme proposée pour les champs,

$$\frac{\partial E_+}{\partial t} = \frac{d\mathcal{E}_+}{dt} e^{i\omega_L(t-z/c)} + i\omega_L E_+,$$

ce qui, porté dans (9) avec (10), donne

$$\frac{d\mathcal{E}_+}{dt} + i\omega_L \mathcal{E}_+ = \left(-\frac{\gamma}{2} + i\bar{\omega}_c - iG_c \xi\right) \mathcal{E}_+ + \sqrt{\frac{c\gamma}{4\ell(t)}} \mathcal{E}_i.$$

Dans le dernier terme, on peut remplacer $\ell(t)$ par L puisque le terme négligé est d'ordre $(\xi/L)\sqrt{\gamma}$, bien plus petit que les autres termes.

On obtient donc bien

$$\frac{d\mathcal{E}_+}{dt} = -\left[\frac{\gamma}{2} + i(\Delta + G_c \xi)\right] \mathcal{E}_+ + \sqrt{\frac{c\gamma}{4L}} \mathcal{E}_i. \quad (11)$$

25) Puisque la vitesse du miroir est petite devant celle de la lumière, l'effet DOPPLER est négligeable et le rebond du photon se fait sans changement notable de fréquence. Si $\mathbf{p} = (\hbar\omega_L/c)\mathbf{u}_z$ est la quantité de mouvement du photon incident, il repart donc avec une quantité de mouvement $-\mathbf{p}$ et cède au miroir (M_2) une quantité de mouvement

$$\delta\mathbf{p} = 2\frac{\hbar\omega_L}{c}\mathbf{u}_z.$$

26) La quantité de mouvement reçue par le miroir entre t et $t + dt$ est $dN_{\text{ph}}\delta\mathbf{p}$ donc la force exercée par le faisceau sur le miroir est

$$\mathbf{F}_{\text{pr}}(t) = 2\frac{\pi_{\text{ph}}(t)\hbar\omega_L}{c}\mathbf{u}_z. \quad (12)$$

Ceci suppose que presque tous les photons incidents se sont réfléchis, donc que $R \approx 1$.

27) L'énergie du faisceau traversant une surface \mathcal{S} égale à celle du miroir entre t et $t + dt$ est $dN_{\text{ph}}\hbar\omega_L$; la puissance rayonnée par le faisceau est alors

$$P(t) = \pi_{\text{ph}}(t)\hbar\omega_L.$$

28) Cette puissance est égale au flux du vecteur de POYNTING à travers la section \mathcal{S} , c'est-à-dire que

$$P(t) = \iint \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S} = R(t)\mathcal{S}$$

où, le vecteur de POYNTING moyen \mathbf{R} dans le vide s'écrit

$$\mathbf{R} = \left\langle \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_+ \times \mathbf{B}_+ \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_+ \frac{E_+^*}{c} \mathbf{u}_z = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |\mathcal{E}_+|^2 \mathbf{u}_z$$

et

$$\frac{\varepsilon_0 c \mathcal{S}}{2} |\mathcal{E}_+|^2 = \pi_{\text{ph}}(t)\hbar\omega_L.$$

Avec (12), on obtient alors

$$\mathbf{F}_{\text{pr}}(t) = \varepsilon_0 \mathcal{S} |\mathcal{E}_+|^2 \mathbf{u}_z. \quad (13)$$

29) $\hbar\omega_L/L$ est le rapport d'une énergie (travail) à une longueur : c'est donc une force. D'après (13), le rapport d'une force à $\varepsilon_0 \mathcal{S}$ est champ électrique au carré. On en déduit que a est adimensionné.

Il en résulte aussi que $a_i \sqrt{c/2L}$ est sans dimension, ce qui impose $[a_i] = \text{T}^{-1/2}$.

On a, par (13) et (12),

$$|a|^2 = \frac{\varepsilon_0 \mathcal{S} |\mathcal{E}_+|^2 L}{\hbar\omega_L} = \frac{F_{\text{pr}} L}{\hbar\omega_L} = \frac{2L}{c} \pi_{\text{ph}}$$

Cette quantité est le produit de π_{ph} , nombre de photons heurtant (M_2) par unité de temps, par le temps $2L/c$ nécessaire à l'un de ces photons pour faire un aller-retour dans la cavité. $|a|^2$ représente donc le nombre total de photons dans la cavité.

De même, $|a_i|^2 = \pi_{\text{ph},i}$ et c'est le nombre de photons incidents par unité de temps.

30) En multipliant (11) par $\sqrt{\varepsilon_0 \mathcal{S} L / \hbar\omega_L}$, on obtient immédiatement

$$\frac{da}{dt} = - \left[\frac{\gamma}{2} + i(\Delta + G_c \xi) \right] a + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} a_i. \quad (14)$$

31) Le miroir (M_2) est soumis à la force de rappel du ressort et à la pression de radiation (toujours dirigée vers les z positifs), de sorte que

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -K\xi + F_{\text{pr}} \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{\ddot{\xi}(t) + \Omega^2 \xi(t) = \frac{1}{m} F_{\text{pr}}(t)}} \quad (15)$$

où $\Omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

32) D'après (14), γ mesure la vitesse de convergence de $a(t)$ vers sa solution permanente. Si $\gamma \gg \Omega$, les variations de ξ sont très lentes devant celles de $a(t)$ (donc de $\mathcal{E}_+(t)$) et l'on pourra considérer que $F_{\text{pr}}(t)$ est toujours donnée par la solution « permanente » de (14).

33) a_i étant une constante, la solution générale de (14) est

$$a(t) = a_0 \exp \left[- \left(\frac{\gamma}{2} + i(\Delta + G_c \xi) \right) t \right] + \frac{\sqrt{\gamma/2}}{\gamma/2 + i(\Delta + G_c \xi)} a_i.$$

Le régime « transitoire » disparaît dès que $\gamma t \gg 1$ (donc après quelques nanosecondes) et ne demeure que le terme « permanent »

$$a(t) = \frac{\sqrt{\frac{\gamma}{2}}}{\frac{\gamma}{2} + i(\Delta + G_c \xi(t))} a_i \quad (16)$$

qui est en fait lentement variable (à la pulsation Ω caractéristique des variations de $\xi(t)$).

34) La force de pression s'écrit

$$F_{\text{pr}}(t) = \frac{\hbar \omega_L}{L} |a(t)|^2$$

soit, ici,

$$F_{\text{pr}}(t) = \frac{2\hbar \omega_L}{\gamma L} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\Delta + G_c \xi(t)}{\gamma} \right)^2} |a_i|^2$$

35) Lorsque le miroir est à l'équilibre ($\xi = \text{cste}$), la force de pression contrebalance exactement la force de rappel et

$$K \xi = \frac{2\hbar \omega_L}{\gamma L} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\Delta + G_c \xi}{\gamma} \right)^2} |a_i|^2. \quad (17)$$

36) Si $a_i = 0$, la solution de (17) est $\xi = 0$ et la seule force appliquée au miroir est la force de rappel du ressort ; cette position est donc stable.

37) En notant

$$A = \frac{\gamma K L}{2\hbar \omega_L |a_i|^2}, \quad (18)$$

facteur qui décroît lorsque le champ incident augmente, et

$$F(\xi) = \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\Delta + G_c \xi}{\gamma} \right)^2}, \quad (19)$$

la fonction lorentzienne centrée en $\xi_c = -\Delta/G_c$ et de largeur γ/G_c , la condition (17) s'écrit simplement $A\xi = F(\xi)$.

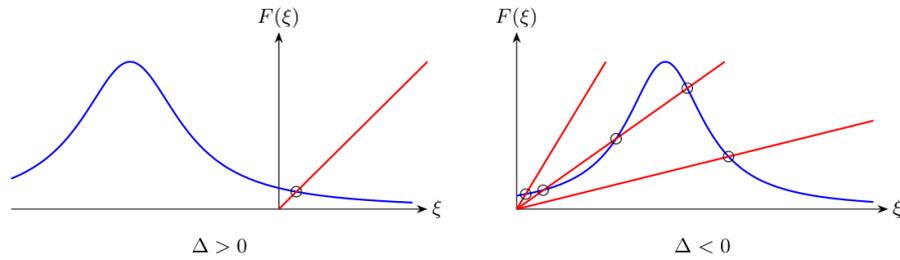


Fig. 4 : Positions d'équilibre

On voit graphiquement (Fig. 4) qu'il peut y avoir, selon les valeurs de Δ et de A , une ou trois positions d'équilibre.

38) Partons d'une position d'équilibre ξ_e et imaginons une perturbation qui amène ξ à une valeur $\xi = \xi_e + \varepsilon$. Alors l'équation (15) devient

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{K}{A} [-A(\xi_e + \varepsilon) + F(\xi_e) + F'(\xi_e)\varepsilon]$$

soit

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{K}{A} [-A + F'(\xi_e)]\varepsilon$$

puisque $A\xi_e = F(\xi_e)$.

La position ξ_e est stable si $F'(\xi_e) < A$, c'est-à-dire si la courbe $F(\xi)$ passe « sous » la droite $A\xi$ au moment où elles se croisent. Il apparaît donc que

- si on a une seule position d'équilibre, elle est stable ;
- si on a trois positions d'équilibre, la position centrale est instable et les deux autres sont stables.

Il est possible que deux des points d'intersections des schémas précédents se confondent pour certaines valeurs de A (cf. Fig. 5)

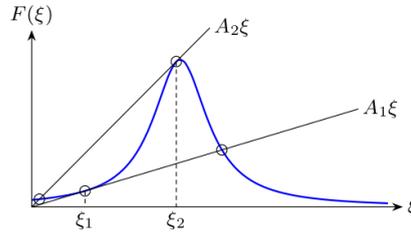


Fig. 5 : Cas limites

Dans ce cas, le point d'intersection avec la tangente est instable (en ξ_1 et ξ_2 sur la Fig. 5) et l'autre point est stable.

Il apparaît donc qu'il existe, lorsque Δ est « suffisamment » négatif (cf. 39)), deux valeurs de A , soit A_1 et $A_2 > A_1$ telles que

- si $A \notin [A_1, A_2]$, il n'existe qu'une position d'équilibre stable ;
- si $A \in [A_1, A_2]$, il existe trois positions d'équilibre en $x_1 < x_2 < x_3$, x_1 et x_3 étant stables et x_2 étant instable.

C'est l'existence de ces deux positions stables distinctes qui donne le nom de *bistable* à ce système.

39) Pour que la tangente à la courbe représentative de $F(\xi)$ passe par l'origine, il faut que $\xi F'(\xi) = F(\xi)$ ou encore

$$\frac{-8 \frac{G_c \xi}{\gamma} \frac{\Delta + G_c \xi}{\gamma}}{\left(1 + 4 \left(\frac{\Delta + G_c \xi}{\gamma}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\Delta + G_c \xi}{\gamma}\right)^2}$$

qui se réécrit

$$-8 \left(u - \frac{\Delta}{\gamma}\right) u = 1 + 4u^2 \iff 1 - 8 \frac{\Delta}{\gamma} u + 12u^2 = 0 \quad (20)$$

où $u = (\Delta + G_c \xi)/\gamma$. Cette équation admet un couple de solutions distinctes si son discriminant est positif, donc si

$$16 \frac{\Delta^2}{\gamma^2} - 12 > 0 \iff \frac{\Delta^2}{\gamma^2} > \frac{3}{4}$$

Puisqu'il est nécessaire d'avoir $\Delta < 0$ pour obtenir les trois positions d'équilibre, cela impose²

$$\Delta < -\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma.$$

40) Soient u_1 et $u_2 > u_1$ les deux racines distinctes de (20). Les valeurs de ξ correspondantes sont

$$\xi_1 = \frac{\gamma u_1 - \Delta}{G_c} \quad \text{et} \quad \xi_2 = \frac{\gamma u_2 - \Delta}{G_c} > \xi_1$$

comme indiqué en Fig. 5. Alors

$$A_1 = F'(\xi_1) = \frac{F(\xi_1)}{\xi_1} \quad \text{et} \quad A_2 = F'(\xi_2) = \frac{F(\xi_2)}{\xi_2} > A_1$$

sont les deux pentes des droites limites.

Dès lors le champ incident doit vérifier

$$\frac{\gamma KL}{2\hbar\omega_L A_2} < |a_i|^2 < \frac{\gamma KL}{2\hbar\omega_L A_1}.$$

41) D'après (1), $P_t = K|\mathcal{E}_t|^2 = \tau^2 K|\mathcal{E}_+|^2 = TP_+$ et

$$\frac{P_+}{P_i} = \frac{|\mathcal{E}_+|^2}{|\mathcal{E}_i|^2} = \frac{c}{2L} \frac{|a|^2}{|a_i|^2},$$

soit, avec (16),

$$\frac{P_+}{P_i} = \frac{c}{2L} \frac{\frac{\gamma}{2}}{\frac{\gamma^2}{4} + (\Delta + G_c \xi)^2},$$

et, par (19),

$$\frac{P_t}{P_i} = \frac{cT}{\gamma L} F(\xi).$$

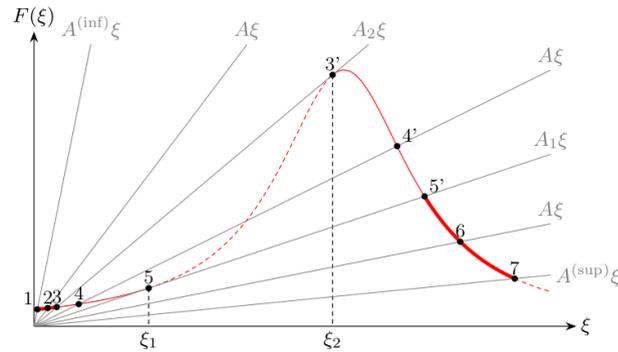


Fig. 6 : Cycle d'hystérésis

² Le cas $\Delta = -\frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$ correspond au cas où la droite $A\xi$ passe par le point d'inflexion de la courbe $F(\xi)$.

42) Lorsque la puissance incidente est faible, par (18), la pente A est grande et inversement pour une puissance incidente forte. La pente $A^{(\text{inf})}$ est donc « grande » et la pente $A^{(\text{sup})}$ plus « faible ».

La position d'équilibre correspondant à $P_i^{(\text{inf})}$ est donc proche de l'origine (point 1 sur la Fig. 6).

Lorsque P_i augmente, la pente A diminue et les points d'équilibre changent de proche en proche en suivant la série 1 – 2 – 3 – 4 – 5 ; la puissance transmise est alors $P_t^{(\text{inf})}$. Mais dès que P_i passe au-dessus la valeur P_1 qui fixe la pente A_1 , la pente passe « sous » A_1 et les points d'équilibre suivent la branche droite de la courbe et passent successivement par 5' – 6 – 7, jusqu'au point d'équilibre correspondant à $P_i^{(\text{sup})}$; la puissance transmise vaut alors $P_t^{(\text{sup})}$. Il y a donc une discontinuité de P_t qui « saute » de $P_t^{(\text{inf})}$ à $P_t^{(\text{sup})}$ lors de la transition 5 → 5'.

La puissance transmise reste sur la branche $P_t^{(\text{sup})}$ lorsque la puissance P_i diminue et reste sur cette branche jusqu'à ce que $P_i = P_2$ correspondant à la pente A_2 , en suivant 7 – 6 – 5' – 4' – 3'. Dès que $P_i < P_2$, la puissance transmise retombe à $P_t^{(\text{inf})}$ et les points d'équilibre sont, successivement, 3 – 2 – 1. Il y a encore une discontinuité de P_t lors de la transition 3' → 3.

Par conséquent, lorsque P_i oscille entre $P_i^{(\text{inf})}$ et $P_i^{(\text{sup})}$:

- la branche 1 ↔ 2 ↔ 3 est parcourue dans les deux sens (trait épais sur la Fig. 6) pour $P_i < P_2$, que P_i soit croissante ou décroissante ;
- la branche 3 → 4 → 5 n'est parcourue que si la puissance incidente est croissante et vérifie $P_2 < P_i < P_1$ (trait fin) ;
- la branche 5' ↔ 6 ↔ 7 est parcourue dans les deux sens (trait épais) pour $P_i > P_1$, que P_i soit croissante ou décroissante ;
- la branche 5' → 4' → 3' n'est parcourue que si la puissance incidente est décroissante et vérifie $P_2 < P_i < P_1$ (trait fin).

Ceci explique le cycle d'hystérésis observé sur le relevé expérimental.