Correction du TD n°19

Exercice 7 : Modèle de BOHR de l'atome d'hydrogène (Centrale)

1) La condition de l'énoncé s'écrit

$$\psi_0 e^{i(kx-\omega t)} = \psi_0 e^{i(k(x+2\pi R)-\omega t)} \Rightarrow e^{ik2\pi R} = 1$$

ou encore $2\pi R = n\lambda$. Or $L = mRv = n\frac{h}{2\pi}$ se réécrit $2\pi R = n\frac{h}{mv} = n\frac{h}{p}$

Par identification, il vient la relation de DE BROGLIE $\lambda = \frac{h}{p}$

2) **a)** Le PFD projeté sur $\vec{u}_r$ donne $m\frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

Le moment cinétique quantifié implique : $L^2 = n^2\hbar^2 = m^2R^2v^2 = \frac{mRe^2}{4\pi\varepsilon_0}$

Il vient $R = n^2 a_0$ avec $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m

On trouve bien la taille approximative d'un atome.

b) On écrit l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{1}{n^2}\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = -\frac{E_0}{n^2}$$

avec $E_0 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} = 13{,}6$ eV

3) Le photon émis emporte l'énergie perdue par l'atome, d'où :

$$E_{p\to n} = \frac{hc}{\lambda_{p\to n}} = E_p - E_n = E_0\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

On a donc $R_H = \frac{E_0}{hc} = 1{,}10 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$

4)
- Dans la théorie classique, l'émission se fait à la fréquence de rotation de l'électron autour du proton, soit à une fréquence :
  $\nu = \frac{v}{2\pi R} = 2\frac{\frac{1}{2}mv^2}{2\pi Rmv} = \frac{2E_c}{nh} = -\frac{2E_m}{nh} = \frac{2E_0}{n^3 h}$
- Pour une transition entre des niveaux n et $n-1$ (n quelconque), la fréquence d'émission est :
  $\nu_{n\to n-1} = \frac{E_n - E_{n-1}}{h} = \frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right)$
  En général, cette fréquence est différente de la fréquence d'émission classique, car :
  $\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \neq \frac{2}{n^3}$
- Cependant, lorsque $n \gg 1$, on peut faire une approximation à l'ordre 1 : $\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) \approx \frac{2}{n^3}$
  Il vient alors $\nu_{n\to n-1} \approx \frac{2E_0}{n^3 h}$: aux nombres quantiques élevés, les prédictions de la mécanique classique et de la mécanique quantique se rejoignent (principe de correspondance de BOHR).