DS$_6$ - Exercice 3

1. Sur Π s'exercent :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg.\vec{e_y}$

avec $\vec{e_y} = \sin\theta.\vec{e_r} + \cos\theta.\vec{e_\theta}$

$$\underline{\vec{P} = -mg.(\sin\theta.\vec{e_r} + \cos\theta.\vec{e_\theta})}$$

- Réaction normale : $\underline{\vec{N} = N.\vec{e_r}}$

avec $N = \|\vec{N}\|$

2. Vecteur position : $\vec{OM} = R.\vec{e_r}$

$\Rightarrow \vec{V} = R.\dot{\theta}.\vec{e_\theta}$

$$\underline{\vec{a} = R(-\dot{\theta}^2.\vec{e_r} + \ddot{\theta}\,\vec{e_\theta})}$$

2nde loi de Newton $/ \mathcal{R}_{Terrestre}$ = Galiléen

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

$$\vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g}) = m(-R\dot{\theta}^2 + g.\sin\theta).\vec{e_r} + m(R.\ddot{\theta} + g.\cos\theta).\vec{e_\theta}$$

$\vec{N}$ n'a de composantes que sur $\vec{e_r}$:

$$\underline{\underline{\vec{N} = m(-R.\dot{\theta}^2 + g.\sin\theta).\vec{e_r}}}$$

3. $\vec{P}$ est conservative : $E_{pes} = mg.y + C^{ste}$

$\vec{N}$: non conservative mais <u>ne travaille pas</u>.

$$E_m = E_c + E_p = C^{ste}$$

Origine de E_p : en $y = 0$, $E_p = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{E_p = mg \cdot y}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m V^2 + mgy = \underline{\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mg \cdot R \cdot \sin\theta}$$

en A : $V = V_0$ et $\theta = 3\frac{\pi}{4}$

$$E_m = \frac{1}{2} m V_0^2 + mg \cdot R \cdot \sin\frac{3\pi}{4}$$

$$= \underline{\frac{1}{2} m V_0^2 + mg \cdot R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR \cdot \sin\theta = \frac{1}{2} m V_0^2 + mg \cdot R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}\left(\sqrt{2} - 2 \cdot \sin\theta\right) + \left(\frac{V_0}{R}\right)^2}$$

d'où $\vec{N} = m\left(-g\left(\sqrt{2} - 2 \cdot \sin\theta\right) - \frac{V_0^2}{R} + g \cdot \sin\theta\right) \vec{e_r}$

$$\underline{\vec{N} = m\left(g\left(3 \cdot \sin\theta - \sqrt{2}\right) - \frac{V_0^2}{R}\right) \cdot \vec{e_r}}$$

4- Au sommet de la bosse, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{N} = m\left(g\left(3 - \sqrt{2}\right) - \frac{V_0^2}{R}\right) \cdot \vec{e_r}$$

Il décolle pour $\underline{\vec{N} = \vec{0}}$

c.a.d $\boxed{V_0^2 = g \cdot R \cdot \left(3 - \sqrt{2}\right)}$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}\left(\sqrt{2} - 2\right) + \left(\frac{V_0}{R}\right)^2$

$$= \frac{g}{R}\left(\sqrt{2} - 2\right) + \frac{g}{R}\left(3 - \sqrt{2}\right)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} \qquad \text{donc} \qquad V_S = R\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{V_S = \sqrt{gR}}$$

5- A partir de S : chute libre dans $\vec{g}$

$$m\vec{a} = m\vec{g} \quad : \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = C^{ste} = \dot{x}_S = V_S \\ \dot{y} = -g \cdot t \end{cases}$$

$$\text{Et} \quad \begin{cases} x(t) = V_S\, t + x_S \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + y_S \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} x_S = 0 \\ y_S = R \end{matrix}$$

$$\text{Donc} \quad t = \frac{x}{V_S}$$

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{V_S^2} + R \qquad \text{avec } V_S = \sqrt{gR}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y_{skieur} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{R} + R}$$

6- Equation de la piste : $\underline{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0}$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \overrightarrow{OB} = R\, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\vec{e_x} + \vec{e_y}) \\ \overrightarrow{BM} = \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)\vec{e_x} + \left(y - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)\vec{e_y} \end{cases}$$

$\vec{OB} \cdot \vec{B\Omega} = 0$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{R}{\sqrt{2}} + y - \frac{R}{\sqrt{2}} = 0$$

c.a.d $\quad \underline{y_{piste} = -x + R.\sqrt{2}}$

7. A résoudre $y_{piste} = y_{skieur}$

$$-x + R\sqrt{2} = -\frac{x^2}{2R} + R$$

$$\frac{x^2}{2R} - x + R(\sqrt{2} - 1) = 0$$

$$\underline{x^2 - 2R.x + 2R^2.(\sqrt{2} - 1) = 0}$$

$$\Delta = 4R^2 - 8R^2(\sqrt{2} - 1)$$

$$= 12R^2 - 8R^2.\sqrt{2}$$

$$\Delta = 4R^2.(3 - 2\sqrt{2})$$

On garde la plus grande racine : $\left(x \geq x_B = \frac{\sqrt{2}}{2}.R\right)$

$$\underline{\underline{x = R + R\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}}$$

<u>A.N</u> : $\quad \underline{x \simeq 1,41.R}$