Révisions des écrits

1 Électricité

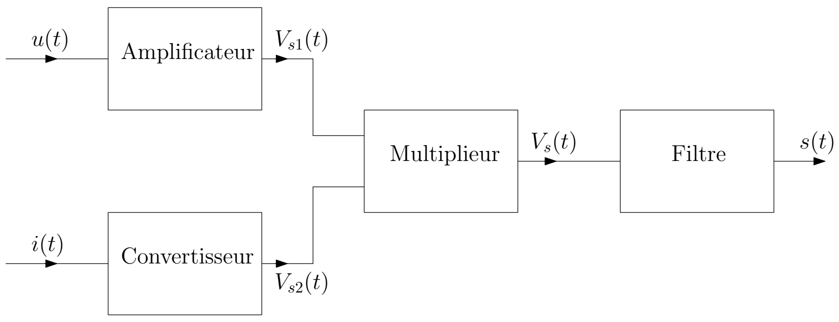
Exercice 1 : Wattmètre (Centrale)

On souhaite déterminer la puissance moyenne reçue par un dipôle linéaire (D) d'impédance $\underline{Z} = R + jX$.

1) Le dipôle est soumis à une tension $u(t) = U_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t)$ et est parcouru par un courant $i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$ défini en convention récepteur. Déterminer l'expression de la puissance moyenne reçue par le dipôle (D).

2) On considère le montage donné par la figure ci-dessous, dans lequel :

- L'amplificateur, est un dispositif délivrant une tension proportionnelle à la tension aux bornes du dipôle (D) : $V_{s1}(t) = k_1 \times u(t)$.
- Le convertisseur est un dispositif délivrant une tension proportionnelle au courant parcourant le dipôle (D) : $V_{s2}(t) = k_2 \times i(t)$.
- le multiplieur est un dispositif, détaillé dans l'annexe d'électronique, délivrant une tension $V_s(t) = k \times V_{e1}(t) \times V_{e2}(t)$ quand on lui applique les tensions $V_{e1}(t)$ et $V_{e2}(t)$ en entrée. k étant une constante de l'ordre de $0{,}1\ \text{V}^{-1}$.
- Le filtre est un quadripôle linéaire d'ordre 2 caractérisé par sa fonction de transfert $\underline{H}$.



a) Exprimer la tension $V_s(t)$ à la sortie du multiplieur, représenter son spectre.

b) Quelle doit être la nature du filtre pour pouvoir obtenir en sortie une tension $s(t)$ proportionnelle à la puissance moyenne reçue par le dipôle (D) ? A quelle condition sur la fréquence propre et le facteur de qualité du filtre ceci est-il réalisé ?

c) Proposer un montage permettant d'obtenir un tel filtre.

2 Mécanique

Exercice 2 : Masses, ressort et tube tournant (X-ESPCI)

Un tube creux très long tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical Oz le partageant en deux parties égales. A l'intérieur, deux masses m identiques quasi-ponctuelles sont reliées par un ressort de raideur k.

Le coefficient de frottement solide entre la masse m_1 située initialement au repos en O et la surface du tube située sous elle vaut f ; en revanche il n'y pas de frottement avec les surfaces latérales du tube. La masse m_2 est initialement au repos de telle sorte que le ressort soit non tendu ; elle se déplace sans frottement. On suppose que $m_1 = m_2 = m$ et on pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. On suppose que $\omega^2 = 2\omega_0^2$ et $fmg = 2kl_0$.

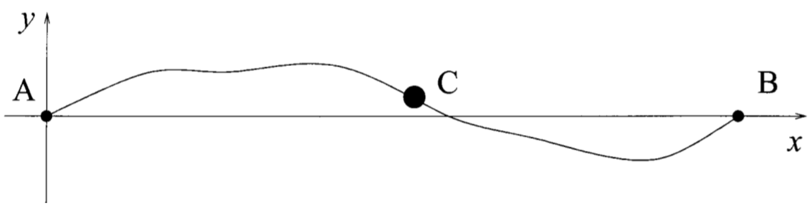
Étudier.

3 Ondes

Exercice 3 : Corde avec une masse (CCP PC 2009)

On s'intéresse aux petits mouvements d'une fine corde métallique homogène, quasi-inextensible et sans raideur, de masse linéique μ et soumise à une tension d'équilibre T.

Les extrémités de la corde sont notées A et B et on accroche en son milieu C, d'abscisse $x_C = L$, une perle supposée ponctuelle et de masse m.



On négligera dans tout l'exercice les effets de pesanteur devant les forces de tension de la corde.

1) Déterminer, en l'absence de perle, l'équation de D'ALEMBERT vérifiée par $y(x,t)$.

2) Toujours en l'absence de perle, déterminer les modes propres de vibration de la corde si on la fixe en A et B.

3) Déterminer quels modes de vibrations de la corde seule seront modifiés (changement de fréquence propre) par la présence de la perle. Déterminer de la même façon ceux qui ne le seront pas.

4) En présence de cette masse, les dérivées à gauche et à droite de $\frac{\partial y}{\partial x}$ ne sont pas nécessairement égales. La dérivée $\frac{\partial y}{\partial x}$ est donc discontinue en $x_C = L$.
En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD), trouver une relation entre T, m, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(L,t)$ (accélération suivant y de la masse), $\frac{\partial y}{\partial x}(L^-,t)$ et $\frac{\partial y}{\partial x}(L^+,t)$.
Illustrer votre relation par un schéma.

5) On recherche le mode de vibration fondamental sous la forme d'une fonction symétrique par rapport à L, c'est-à-dire telle que $y(x,t) = y(2L-x,t)$, et donnée sur l'intervalle de gauche $0 \leq x \leq L$ par :

$$y(x,t) = Z\sin(Kx)\cos(\omega t)$$

où K est un vecteur d'onde à déterminer, et ω et K vérifient la relation de dispersion habituelle. Montrer que les conditions aux limites imposent désormais la condition de quantification suivante sur les valeurs possibles de ω et K :

$$\mathrm{cotan}(KL) = \frac{\cos(KL)}{\sin(KL)} = \frac{m\omega^2}{2KT}$$

6) Tracer la courbe représentative de $\mathrm{cotan}(x)$ sur l'intervalle $]0, 3\pi[$.
Montrer que si la masse m est nulle, on retrouve comme cas particulier de l'équation ci-dessus le vecteur d'onde k_1 de la fréquence fondamentale de vibration de la corde homogène.

7) Lorsque la masse m est faible, on recherche un développement limité à l'ordre 1 en m du vecteur inconnu K :

$$K \approx k_1 + \beta m$$

où β est une constante à déterminer en fonction de ω, c, T et L. On utilisera en particulier le développement limité suivant de la fonction cotangente, valable pour de petites valeurs de ϵ :

$$\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) \approx -\epsilon$$

K est-il plus grand ou plus petit que k_1 ?

8) Déduire de la question précédente le changement relatif de fréquence $\frac{\Delta f_1}{f_1}$ du mode de vibration fondamental de la corde lorsque l'on passe du vecteur k_1 au vecteur K. Exprimer le résultat en fonction de m, μ et L.

La détermination expérimentale de la nouvelle fréquence de vibration permet donc de déterminer la masse m déposée sur la corde.

Application numérique : Calculer m lorsque $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$, $T = 100\,\mathrm{N}$, $\mu = 10^{-2}\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$ et $\Delta f_1 = -1{,}0\,\mathrm{Hz}$.

4 Thermodynamique

Exercice 4 : Centrale nucléaire (X-ESPCI)

Une centrale nucléaire est installée sur un fleuve. Estimer la variation de température entre l'amont et l'aval de la centrale.

Exercice 5 : Surfusion (CCP)

Un kilogramme d'eau initialement liquide surfondue à la température T_0 inférieure à la température de fusion $T_F = 0\,°\mathrm{C}$ est contenue dans un récipient calorifugé où l'atmosphère impose une pression constante p_0. Le système évolue spontanément vers un état final plus stable. On donne l'enthalpie massique de fusion $\ell_F = 3{,}3 \cdot 10^2\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$ de l'eau et sa capacité thermique massique $c = 4{,}2\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, supposée identique dans l'état liquide et dans l'état solide. On rappelle les expressions des variations d'enthalpie et d'entropie d'une phase condensée :

$$\Delta H = C\,(T_f - T_i) \qquad \text{et} \qquad \Delta S = C\,\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

1) On suppose que toute l'eau devient solide. Déterminer la température finale T_1. Calculer la valeur maximale de T_0 acceptable. Calculer l'entropie créée pour $T_0 = -100\,°\mathrm{C}$.

2) On suppose qu'il reste de l'eau liquide dans l'état final. Déterminer la masse x de glace dans l'état final. Calculer l'entropie créée pour $T_0 = -20\,°\mathrm{C}$.

5 Diffusion

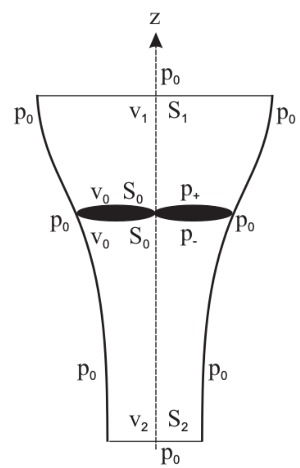
Exercice 6 : Astéroïde

Un astéroïde solide, sphérique de rayon R, est placé dans l'espace vide. L'astéroïde, de conductivité thermique λ, est radioactif de telle sorte qu'une énergie $\mathcal{P}\,d\tau\,dt$ est créée pendant dt dans un élément de volume $d\tau$, où $\mathcal{P}$ est une constante. Déterminer le champ de température à l'équilibre dans l'astéroïde, en supposant qu'il évacue à sa surface par rayonnement une puissance surfacique $\sigma\,T_s^4$ où T_s est sa température de surface et σ la constante de STEFAN.

6 Méca flu

Exercice 7 : Vol des oiseaux (Centrale)

On modélise un oiseau en vol stationnaire au voisinage d'un point O. En battant des ailes , l'oiseau crée un écoulement sur la verticale descendante $-\overrightarrow{u_z}$, quasi-unidimensionnel dans un tube de courant dont la section est S_1 loin au-dessus de l'oiseau, $S_0 \ll S_1$ au niveau de l'oiseau et $S_2 \ll S_1$ loi au-dessous de l'oiseau ; aux bords du tube de courant la pression est uniforme égale à p_0. L'écoulement est stationnaire sauf au voisinage de l'oiseau entre les plans de cotes $z = \pm\varepsilon$. L'écoulement est parfait. On note $v_1 \approx 0$, v_0 et v_2 les vitesses associées aux sections S_1, S_0 et S_2. On néglige le poids de l'air.



1) Relier S_1, S_0, S_2, v_1, v_2 et v_0.

2) En faisant un bilan de quantité de mouvement, exprimer la force $F\,\overrightarrow{u_z}$ exercée par l'écoulement sur l'oiseau en fonction de μ, S_0, v_0 et v_2.

3) Exprimer $p(z = -\varepsilon) - p(z = +\varepsilon)$ en fonction de μ et v_2. En déduire une autre expression de F en fonction de μ, S_0 et v_2. En déduire que $v_2 = 2v_0$ et $F = 2\mu\,S_0\,v_0^2$.

4) En faisant un bilan d'énergie cinétique, exprimer la puissance $\mathcal{P}$ fournie par l'oiseau à l'air en fonction de μ, S_0 et v_0.

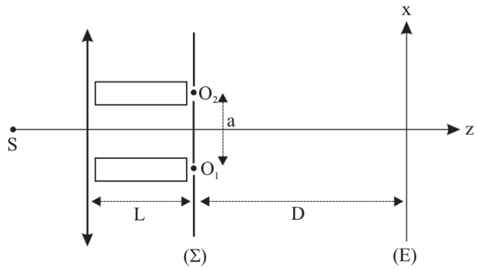
5) Montrer que pour un oiseau d'envergure L_0 on a $\mathcal{P} \propto L_0^{7/2}$. Expliquer la difficulté des grands oiseaux à voler.

6) On adopte la relation $f \propto v_0/L_0$ pour exprimer la fréquence des battements d'aile. Comment f varie-t-elle avec L_0 ?

7 Optique

Exercice 8 : Montage de FIZEAU (Mines)

Dans le montage ci-contre, la lentille mince convergente a pour distance focale $f' = 1{,}0$ m et la source S, monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}50$ µm, est située en son foyer-objet. Devant les deux trous d'YOUNG identiques et distants de $a = 10$ mm se trouvent deux tubes cylindriques de même longueur $L = 5{,}0$ m remplis d'eau d'indice $n_e = 1{,}34$. On observe l'intensité lumineuse $\mathcal{I}(x)$ sur un écran distant de $D = 20$ m dans le plan de figure.



1) Établir l'expression de $\mathcal{I}(x)$. Calculer l'interfrange Δ.

2) En réalité la source possède une extension spatiale d dans la direction $\overrightarrow{u_x}$. Quelle est la valeur maximale tolérable pour d si on veut éviter le brouillage des franges ? Dans la suite, on revient à $d = 0$.

3) En réalité la source possède une extension spectrale $\Delta\lambda$. Quelle est la valeur maximale tolérable pour $\Delta\lambda$ si on veut pouvoir observer $N = 20$ franges de chaque côté de la frange centrale ? Dans la suite, on revient à $\Delta\lambda = 0$.

4) Lorsque l'eau est en mouvement dans les tubes avec des vitesses $\overrightarrow{v_1} = -v\,\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{v_2} = v\,\overrightarrow{u_z}$ opposées, on observe un décalage d des franges. Pour $v = 7{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, huit mesures indépendantes ont donné les résultats ci-dessous exprimés en millimètres :

d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
0,37	0,39	0,35	0,38	0,36	0,40	0,34	0,37

Peut-on interpréter les observations en admettant que la vitesse de phase satisfait à la loi de composition des vitesses de la cinématique classique ?

5) Dans le cadre de la cinématique relativiste, la loi de composition des vitesses s'écrit :

$$v = \frac{v' + v_e}{1 + v'\,v_e/c^2} \qquad \text{où } v_e \text{ est la vitesse d'entrainement.}$$

a) Exprimer la différence des indices lumineux $n_2 - n_1$ dans les deux tubes à l'ordre un en v/c.

b) En déduire l'expression de la translation des franges en fonction de v, c, n_e, λ et L.

Exercice 9 : Diffraction par une fente

L'intensité diffractée dans la direction d'angle θ par une fente fine de largeur a, éclairée sous incidence nulle par une lumière de longueur d'onde λ est donnée par :

$$I(M) = I_M \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \quad \text{où } u = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

1) Tracer le graphe de $I(M)/I_M$ et donner ses caractéristiques essentielles en indiquant en particulier l'angle θ_0 de la direction de la première annulation.

2) Estimer l'intensité des deux premiers maxima secondaires. Commentaires ?

3) On considère la diffraction par une ouverture rectangulaire, de hauteur b et de largeur a.

a) Expliquer qualitativement ce que l'on observe et représenter schématiquement l'intensité diffractée dans le plan (Oxy).

b) Retrouve-t-on le résultat de la fente fine en faisant $b \to \infty$?

4) On s'intéresse maintenant à l'expérience des fentes d'Young dans le dispositif de type FRAUNHOFER, en tenant compte de la diffraction.

a) Faire un schéma.

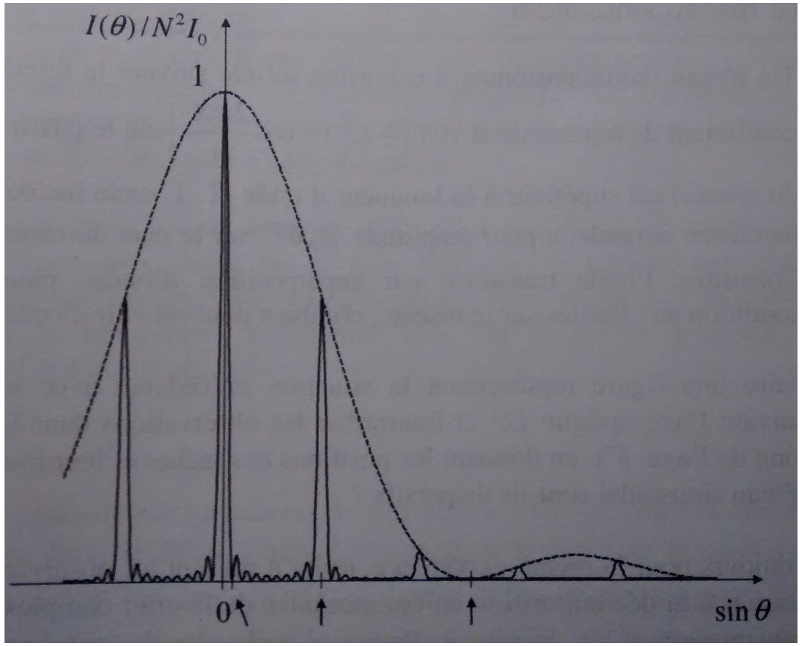
b) Dessiner ce que l'on observe sur l'écran et calculer le nombre N de franges d'interférences à l'intérieur de la tâche centrale de diffraction. On prendra $a = 0{,}1$ mm pour la largeur des fentes et $\ell = 0{,}5$ mm pour la distance entre les axes des deux fentes.

c) Qu'observerait-on avec deux *trous* d'YOUNG ?

d) Toujours pour les fentes d'YOUNG, établir simplement la formule de FRESNEL donnant l'intensité $I(x)$ sur l'écran, en tenant compte de la diffraction.

L'amplitude diffractée par une fente est donnée par $A_d(u) = A_0 \dfrac{\sin u}{u}$ où $u = \dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$, en accord avec l'intensité du début de l'exercice.

5) On s'intéresse finalement à un réseau de N fentes, de largeur a, séparées de ℓ et éclairées sous incidence normale. La courbe donnant l'intensité relative $I(\theta)/N^2 I_0$ en fonction de $\sin\theta$ est donnée par le graphe ci-dessous (I_0 est l'intensité d'une onde seule).

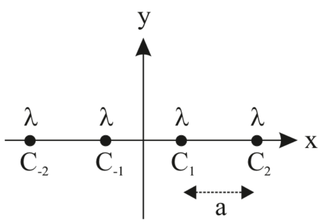


Commenter cette courbe et en particulier donner les trois abscisses indiquées par des flèches. En déduire l'importance de chacune des trois longueurs a, ℓ et $L = N\ell$.

8 EM

Exercice 10 : Infinité de fils infinis (Centrale)

Soit une infinité de fils infinis uniformément chargés avec la même densité linéique λ et confondus avec les droites $C_n z$ où $C_n(n\,a + a/2, 0, 0)$ et n entier relatif.



1) Montrer que le champ $\overrightarrow{E}$ est nul en tous les points $O_n(n\,a, 0, 0)$.

2) Au voisinage de O, on cherche le potentiel $V(M)$ en $M(x, y, z)$ sous la forme d'un développement limité d'ordre deux :

$$V(x,y,z) = V_0 + \alpha\,x + \beta\,y + \gamma\,z + \delta\,x\,y + \lambda\,y\,z + \mu\,x\,z + a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2$$

Déterminer le plus possible de coefficients de ce développement sans calculs.

3) On revient à un point M quelconque. Justifier qu'on doit chercher le potentiel sous la forme :

$$V(x,y,z) = A_0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y)\,\cos\left(\frac{2\pi\,n\,x}{a}\right)$$

4) Établir l'équation aux dérivées partielles dont est solution le potentiel connaissant la densité volumique de charges. Comment cette équation se simplifie-t-elle dans un domaine sans charges ?

5) Au voisinage de O, on a montré que le potentiel $V(M)$ en $M(x, y, z)$ est de la forme $V(x, y, z) = V_0 + a\,x^2 + b\,y^2$. En déduire une relation entre a et b. Que peut-on en conclure quant à la stabilité de l'équilibre d'une charge q' en O ?

6) En un point M quelconque, on a montré que le potentiel est de la forme :

$$V(x,y,z) = A_0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y)\,\cos\left(\frac{2\pi\,n\,x}{a}\right)$$

En admettant que chaque composante de FOURIER du potentiel est solution de la même équation aux dérivées partielles que V, déterminer les fonctions $A_n(y)$ à des constantes multiplicatives A_n près dans le domaine $y > 0$.

Réponses

Exercice 1 : Wattmètre

1) $<\mathcal{P}> = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\phi = \frac{1}{2} U_m I_m \cos\phi = R I_{\text{eff}}^2$.
2.a) $V_s(t) = k k_1 k_2 U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} (\cos(2\omega t + \phi) + \cos(\phi))$.
2.b) Filtre passe-bas de fréquence de coupure petite devant 2ω.
2.c) Circuit RLC en prenant comme tension de sortie celle du condensateur.

Exercice 2 : Masses, ressort et tube tournant

Première phase où m_1 reste fixe en O : $\ddot{x}_2 - \omega_0^2 x_2 = \omega_0^2 l_0$; $x_2(t) = l_0 (2\text{ch}(\omega_0 t) - 1)$; $\overline{T} = -k(x_2 - l_0)$; $\overline{N} = mg$; cette phase dure tant que $2k l_0 (\text{ch}(\omega_0 t) - 1) < fmg$ soit pour $0 < t < \tau$ avec $\text{ch}(\omega_0 \tau) = 2$ donc $\text{sh}(\omega_0 \tau) = \sqrt{3}$; $x_2(\tau) = 3l_0$ et $\dot{x}_2(\tau) = 2\sqrt{3}\omega_0 l_0$
Deuxième phase où les deux masses bougent avec des vitesses positives : $\ddot{x}_2 - \omega_0^2(x_2 + x_1) = \omega_0^2 l_0$ et $\ddot{x}_1 - \omega_0^2(x_1 + x_2) = -3\omega_0^2 l_0$; $x_1(t) + x_2(t) = l_0 + 2l_0\text{ch}(\sqrt{2}\omega_0(t-\tau)) + \sqrt{6}\, l_0 \text{sh}(\sqrt{2}\omega_0(t-\tau))$; $x_2(t) - x_1(t) = 2l_0\omega_0^2(t-\tau)^2 + 2\sqrt{3} l_0 \omega_0 (t-\tau) + 3l_0$; il faudrait vérifier que $\dot{x}_1(t) > 0$ et $\dot{x}_2(t) > 0$ pour $t > \tau$...

Exercice 3 : Corde avec une masse

3) Les modes indicés par un entier pair présentent un nœud en $x = L$. Ils ne seront donc pas modifiés par la présence de la perle immobile en ce point.
4) $m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(L,t) = T \frac{\partial y}{\partial x}(x = L^+, t) - T \frac{\partial y}{\partial x}(x = L^-, t)$.
6) $K = (2p+1)\frac{\pi}{2L}$.
7) $\beta = -\frac{\pi c^2}{4TL^2}$.
8) $\frac{\Delta f_1}{f_1} = -\frac{m}{2\mu L}$ et $m = 0{,}8$ mg.

Exercice 4 : Centrale nucléaire

Se donner la puissance mécanique $\mathcal{P} = 1$ GW, le débit du fleuve $D_v = 100\ \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et le rendement $\eta \approx 0,2$ de la centrale.
La centrale est un moteur fournissant un travail mécanique servant à produire de l'électricité, on en déduit $\Delta T = \frac{(1-\eta)\mathcal{P}}{\eta \mu c D_v} = 10$ K.

Exercice 5 : Surfusion

1) $T_1 = T_0 + \ell_F / c$; $T_0 < T_{0M} = T_F - \ell_F/c = -79\,°\text{C}$; $S_c = c \ln(1 + \ell_F / c T_0) - \ell_F / T_F = 0{,}36\ \text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} > 0$; l'évolution est irréversible.
2) masse d'eau qui se condense $x = c(T_F - T_0)/l_F$; $T_0 > T_{0M}$; $S_c = c \ln(T_F/T_0) - c(T_F - T_0)/T_F = 12\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$; l'évolution est irréversible.

Exercice 6 : Astéroïde

$T(r) = \left(\frac{\mathcal{P} R}{3\sigma}\right)^{1/4} + \frac{\mathcal{P}(R^2 - r^2)}{6\lambda}$

Exercice 7 : Vol des oiseaux

1) $S_1 v_1 = S_2 v_2 = S_0 v_0$;
2) $F = \mu S_0 v_0 v_2$;
3) $p(z = -\varepsilon) - p(z = +\varepsilon) = \mu v_2^2/2$; $F = \mu S_0 v_2^2/2$;
4) $\mathcal{P} = \mu S_0 v_0 v_2^2/2 = 2\mu S_0 v_0^3$;
5) $F = mg \propto L_0^3$ donne $v_0 \propto \sqrt{L_0}$ puis $\mathcal{P} \propto L_0^{7/2}$ alors qu'intuitivement la puissance disponible d'un oiseau varie en $L_0^3 = L_0^{6/2}$ donc croît moins vite avec L_0 que la puissance nécessaire ;
6) $f \propto 1/\sqrt{L_0}$ dont la décroissance avec L_0 est conforme à l'expérience.

Exercice 8 : Montage de Fizeau

1) $\mathcal{I}(x) = 2\mathcal{I}_0 (1 + \cos(2\pi a x / \lambda D))$; $\Delta = \lambda D / a = 1{,}0$ mm.
2) $p = a x / \lambda D + a x_S / \lambda f'$; $\Delta p_{1/2} = a d / 2\lambda f'$; $d < \lambda f'/a = 0{,}05$ mm assez contraignant.
3) $x_{\max} = N\lambda D/a$; $\Delta p_{1/2} = a x \Delta\lambda / 2D\lambda^2 = N\Delta\lambda/2\lambda$; $\Delta\lambda < \lambda/N = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ m peu contraignant mais on ne peut pas travailler en lumière blanche.
4) le tableau donne $d = (0{,}37 \pm 0{,}03)$ mm soit $\Delta p = 0,37 \pm 0,05$; $n\pm = c/(c/n_e \pm v) \approx n_e(1 \mp n_e v/c)$; $\Delta p = 2n_e^2 v L / c\lambda = 0,84$; la loi de composition des vitesses ne convient pas.

a) $v_\varphi = (c/n_e \pm v)/(1 \pm v/n_e c) = c/n_e \pm v(1 - 1/n_e^2)$; $\Delta n = 2v(n_e^2 - 1)/c$.
b) $\Delta p = 2(n_e^2 - 1) v L / c\lambda = 0,37$; accord parfait.

Exercice 9 : Diffraction par une fente

1) $\sin\theta_0 = \frac{\lambda}{a}$
2) $\frac{I_1}{I_M} \approx 4\%$ et $\frac{I_2}{I_M} \approx 1,6\%$.
4) $N = \frac{2\ell}{a} = 10$ franges et $I(x) = 2I_d(x)(1 + \cos\Delta\phi(x))$.

5) Dans l'ordre croissant les abscisses sont $\dfrac{\lambda}{L}$ (largeur d'un pic du réseau), $\dfrac{\lambda}{\ell}$ (ordre 1 du réseau) et $\dfrac{\lambda}{a}$ (diffraction).

Exercice 10 : Infinité de fils infinis

1) Penser aux plans de symétrie.
2) Symétries et invariances : tout est nul sauf a et b.
3) FOURIER ...
4) POISSON !
5) $a + b = 0$, équilibre instable.
6) $A_n(y) = A_n \exp\left(-\frac{2\pi\, n\, y}{a}\right)$