Correction du TD n°20

Exercice 4 : Étoile à neutrons

1) Par définition de la masse de l'étoile à neutrons

$$\boxed{N = \frac{M}{m} = 1{,}2 \cdot 10^{57}}$$

2) **a)** Chaque neutron est confiné dans un volume

$$V' = \frac{V}{N} = \frac{4\pi R^3}{3N}$$

Ce qui donne une longueur caractéristique de confinement des neutrons

$$\boxed{L = \sqrt[3]{\frac{V}{N}} \approx \frac{R}{N^{1/3}}}$$

b) En supposant que le neutron est sans interaction, son énergie potentielle est nulle, donc $E = E_c$. Or, pour un puits infini, on a établi que

$$E \approx \frac{\hbar^2}{mL^2} \approx \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{mR^2}$$

On en déduit l'énergie cinétique pour N neutrons

$$\boxed{E_{c,\text{tot}} = NE_c \approx \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mR^2}}$$

3) L'équation aux dimensions $E_g = \text{cte}G^\alpha M^\beta R^\gamma$ donne

$$ML^2T^{-2} = \left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^\alpha M^\beta L^\gamma = M^{\beta-\alpha}L^{3\alpha+\gamma}T^{-2\alpha}$$

ou encore $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = -1$.
On choisit une constante de l'ordre de l'unité, et négative puisque la force de gravitation est stabilisatrice (attractive). On en déduit

$$\boxed{E_g = -\frac{GM^2}{R} = -G\frac{N^2m^2}{R}}$$

4) L'énergie mécanique s'écrit alors

$$E = E_c + E_g = \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mR^2} - G\frac{N^2m^2}{R}$$

Cette énergie est minimale pour

$$0 = \frac{dE}{dR}(R = R_0) = -\frac{2\hbar^2 N^{5/3}}{mR_0^3} + \frac{GN^2m^2}{R_0^2}$$

c'est à dire pour

$$\boxed{R_0 = \frac{2\hbar^2 N^{-1/3}}{Gm^3} \approx 10^4 \text{ m}}$$

On en déduit une masse volumique de l'étoile égale à

$$\boxed{\mu_E = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} \approx \frac{3M^2m^8G^3}{32\pi\hbar^6} \approx 10^{18} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}!}$$

5) La densité d'une étoile à neutron est de l'ordre de grandeur de la densité d'un noyau atomique (supposons un neutron dans $r_0 = 1$ fm)

$$\boxed{\mu_A \approx \frac{m}{r_0^3} \approx 10^{18} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$$

Remarque : un trou noir est encore plus compact qu'une étoile à neutron car il est équivalent au Soleil compacté dans une sphère de $R = 3$ km de rayon, ce qui donne une masse volumique

$$\mu_S = \frac{2 \cdot 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi \times (3 \cdot 10^3)^3} \approx 10^{19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Ce rayon, dit de SCHWARZSCHILD, du trou noir se déduit du fait que la lumière ne peut s'en échapper et donc que la vitesse de libération du trou noir de masse M est la vitesse de la lumière

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} = 1{,}5 \cdot 10^{27} M \approx 3000 \frac{M}{M_{\text{Soleil}}}$$