

Compilation de problèmes de concours

Révisions des écrits 2024-2025

XE PC 2010
XE PC 2016
XEULC PC 2020
XE PC 2020
XE PSI 2021

PC* Pasteur

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2010

FILIÈRE PC

PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est interdite** pour cette épreuve.
Pour les applications numériques, on se contentera d'un seul chiffre significatif.

La chaleur des planètes

Ce problème étudie quelques aspects de la formation des planètes et de leur refroidissement.

I. Genèse des planètes telluriques

Les planètes telluriques telles que Mars ou la Terre se sont formées par la condensation de nuages de poussières sous l'effet de l'interaction gravitationnelle, au cours d'un processus dit d'*accrétion*.

I.1. Accrétion de petits corps par une planète en formation

I.1.1. Une planète supposée ponctuelle et de masse M est immobile dans le vide à l'origine O d'un référentiel galiléen. Un point matériel de masse m arrive de l'infini avec une vitesse initiale \vec{v}_0 , de norme v_0 . On définit $b = \|\vec{L}\|/mv_0$, où \vec{L} est le moment cinétique en O de la masse m . Donner l'interprétation géométrique de b à l'aide d'un schéma.

I.1.2. Les deux masses interagissent sous l'effet de la gravitation. On note G la constante newtonienne de gravitation. On suppose $m \ll M$, de telle sorte que la masse M reste pratiquement immobile. Quelle est la nature de la trajectoire de la masse m ? On note r_{\min} sa distance minimale d'approche à l'origine. Exprimer b en fonction de r_{\min} , v_0 , G et M .

I.1.3. On considère maintenant le cas où la planète de masse M n'est plus ponctuelle mais est assimilée à une sphère homogène de rayon R . Exprimer la vitesse de libération v_l en fonction de G , M et R . Montrer que la masse m arrivant de l'infini heurte la planète si

$$b^2 < R^2 \left(\frac{v_l^2}{v_0^2} + 1 \right).$$

I.1.4. On suppose que l'univers entourant la planète est constitué, à grande distance de celle-ci, d'un grand nombre de points matériels de masse m , répartis aléatoirement et ayant tous la même vitesse \vec{v}_0 . On note n la densité volumique de points matériels (nombre par unité de volume). Exprimer le nombre moyen de points matériels heurtant la surface de la planète par unité de temps en fonction de n , v_0 , R , G et M .

I.1.5. On suppose que les points matériels heurtant la planète s'y écrasent, augmentant ainsi sa masse M . On suppose également que la planète reste sphérique, de masse volumique ρ constante, de telle sorte que son rayon R augmente. Donner l'expression de la vitesse d'accrétion dR/dt en fonction de n , v_0 , G , ρ , m et R . Analyser l'évolution de R pour $v_0 \gg v_l$ puis $v_0 \ll v_l$. Expliquer pourquoi on parle, pour ce processus, de focalisation gravitationnelle ainsi que d'accrétion galopante.

I.1.6. On considère maintenant deux planètes immobiles de masses M_1 et M_2 , à grande distance l'une de l'autre, de même masse volumique ρ et subissant toutes deux le processus d'accrétion décrit ci-dessus. On suppose $M_1 > M_2$ initialement. Montrer que dans le cas de l'accrétion galopante, le rapport M_1/M_2 augmente au cours du temps. Commenter.

I.2. Chauffage par collision

I.2.1. L'hémisphère nord de Mars présente une vaste dépression, qui pourrait résulter d'une collision avec un gros astéroïde. Calculer l'élévation globale moyenne de température résultant de la collision avec un astéroïde de rayon $r = 1000$ km et de masse volumique $\rho = 3 \times 10^3$ kg \cdot m $^{-3}$, arrivant de l'infini avec une vitesse initiale que l'on prendra nulle. La vitesse de libération de Mars est $v_l = 5$ km \cdot s $^{-1}$, sa masse $M = 6 \times 10^{23}$ kg. On supposera que la capacité thermique massique de Mars est constante, $C \simeq 10^3$ J \cdot kg $^{-1}$ \cdot K $^{-1}$, et que toute l'énergie cinétique de l'astéroïde est absorbée par Mars lors de la collision.

I.2.2. Expliquer pourquoi l'accrétion étudiée dans la partie I.1 s'accompagne nécessairement d'une élévation de température importante. Quel mode de transfert thermique permet d'évacuer une partie de l'énergie interne ?

I.3. Différenciation planétaire

La Terre est constituée pour deux tiers de sa masse de matériaux légers tels que les silicates, de masse volumique ρ_1 , et pour le tiers restant de matériaux lourds tels que le fer, de masse volumique ρ_2 . On prendra pour les applications numériques les valeurs approchées $\rho_1 = 3 \times 10^3$ kg \cdot m $^{-3}$ et $\rho_2 = 9 \times 10^3$ kg \cdot m $^{-3}$. La température initiale de la Terre est élevée, et son intérieur est partiellement fondu.

I.3.1. On assimile pour le moment la Terre à une sphère homogène de rayon R et de masse volumique moyenne $\rho_m = (2\rho_1 + \rho_2)/3$. Exprimer l'intensité $g(r)$ du champ de gravitation à une distance $r \leq R$ du centre de la Terre en fonction de r , R et de sa valeur à la surface $g_0 = g(R)$.

I.3.2. On considère une petite bille de fer de volume V et de masse volumique ρ_2 à la distance r du centre de la Terre. La bille est immergée dans le liquide de masse volumique ρ_m . Calculer la résultante des forces s'exerçant sur la bille. En déduire la variation

d'énergie potentielle du système lorsqu'elle tombe depuis la surface jusqu'au centre de la Terre. La calculer numériquement pour une mole de fer de masse $M_{\text{Fe}} \simeq 60 \text{ g}$. On donne $R = 6000 \text{ km}$, $g_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Comparer la variation d'énergie potentielle à l'ordre de grandeur caractéristique d'une enthalpie de réaction chimique.

I.3.3. Les matériaux les plus denses ont tendance à s'enfoncer vers le centre alors que les matériaux moins denses migrent vers la surface. Ce processus conduit à la différenciation du globe terrestre en un *manteau* externe, constitué des espèces les plus légères et recouvert d'une fine *écorce*, et un *noyau* interne, constitué des espèces plus lourdes. Calculer le rayon du noyau. Que peut-on dire, qualitativement, de la distribution de température dans le noyau à l'issue du processus de différenciation planétaire ?

II. Refroidissement par conduction

On suppose dans cette partie que le manteau terrestre est indéformable. Le seul mécanisme par lequel il peut évacuer son énergie interne est donc la diffusion thermique. On suppose pour simplifier que le manteau est homogène et que sa température au temps initial $t = 0$ est uniforme, de valeur $T_c = 4000 \text{ K}$ (valeur actuelle de la température à la limite entre le manteau et le noyau). On suppose également qu'un mécanisme externe maintient la température de surface T_s constante pour $t > 0$, avec $T_s \ll T_c$. On admet enfin (ce qu'on justifiera par la suite) que la courbure de la planète est négligeable. Sa surface est par conséquent assimilée au plan d'équation $z = 0$, où z est la profondeur comptée positivement à partir de la surface.

II.1. On suppose que la température T ne dépend que de la profondeur z et du temps t . Écrire l'équation aux dérivées partielles régissant l'évolution de la température $T(z, t)$ pour $z > 0$ et $t > 0$. Cette équation fait apparaître un coefficient κ , dit coefficient de diffusivité thermique, dont on donne la valeur numérique $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

II.2. On cherche une solution de cette équation de la forme $T(z, t) = f(\xi)$, où $\xi = z/(2\sqrt{\kappa t})$. Écrire l'équation différentielle que doit vérifier f . Vérifier que la solution générale de cette équation est

$$f(\xi) = A \int_0^\xi \exp(-s^2) ds + B,$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

II.3. On donne l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-s^2) ds = \sqrt{\pi}/2$. Déterminer les expressions de A et B en fonction de T_c et T_s .

II.4. Donner l'expression du gradient de température en $z = 0$, dit *gradient géothermique*, à l'instant t .

II.5. Les mesures actuelles de la température dans le sous-sol donnent un gradient géothermique de $30 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$. En déduire que l'approximation qui consiste à négliger la courbure de la Terre est justifiée. Estimer numériquement l'âge de la Terre, en années, suivant ce modèle. Une année vaut approximativement $3 \times 10^7 \text{ s}$. Le résultat obtenu vous paraît-il satisfaisant ?

III. Refroidissement par convection

Le modèle de la partie précédente est incomplet pour deux raisons. D'une part, le manteau terrestre se comporte comme un fluide très visqueux, qui peut évacuer la chaleur par convection. D'autre part, la radioactivité constitue une source importante d'énergie, qui ne peut être négligée.

Dans cette partie, on se propose de modéliser le phénomène de convection dans le manteau terrestre. On modélise celui-ci comme un fluide contenu entre les plans $z = 0$ et $z = a$. Comme dans la partie précédente, z désigne la profondeur comptée à partir de la surface. Le champ de vitesses eulérien du fluide $\vec{v}(\vec{r}, t)$ satisfait l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v},$$

où D/Dt désigne la dérivée particulaire, ρ la masse volumique du fluide, supposée ne dépendre que de la température, P sa pression, \vec{g} le champ de gravitation, supposé constant et uniforme, ν la viscosité cinématique du fluide, et Δ l'opérateur laplacien.

On admet que l'équation d'évolution de la température $T(\vec{r}, t)$ dans le fluide est donnée par l'équation de la diffusion thermique, dans laquelle on remplace la dérivée $\partial T/\partial t$ par la dérivée particulaire DT/Dt . Comme dans la partie II, on note κ le coefficient de diffusivité thermique, supposé constant et uniforme.

III.1. Chauffage par le bas

On modélise dans un premier temps le chauffage du manteau terrestre par le noyau. On note T_s la température en $z = 0$ et T_c la température en $z = a$, supposées constantes, avec $T_c > T_s$.

III.1.1. Montrer que ces équations admettent une solution statique avec $\vec{v} = \vec{0}$. On notera $P_0(z)$, $\rho_0(z)$ et $T_0(z)$ les valeurs de P , ρ et T pour cette solution. Déterminer $T_0(z)$ et dessiner le profil de température.

III.1.2. Pour déterminer si la solution statique est stable, on étudie l'évolution au cours du temps d'une petite perturbation. On pose $P(\vec{r}, t) = P_0(z) + P_1(\vec{r}, t)$, $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(z) + \rho_1(\vec{r}, t)$, $T(\vec{r}, t) = T_0(z) + T_1(\vec{r}, t)$, et on traite P_1 , ρ_1 , T_1 et la vitesse du fluide \vec{v} comme des perturbations du premier ordre. On suppose que la masse volumique ρ ne dépend que de la température, et on note $\alpha = -(1/\rho)(d\rho/dT)$ le coefficient de dilatation thermique, supposé indépendant de T dans la gamme de température considérée. Linéariser l'équation de Navier-Stokes et l'équation de la diffusion thermique. Vérifier qu'elles se mettent sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0(z)} \overrightarrow{\text{grad}}P_1 - \alpha \vec{g}T_1 + \nu \Delta \vec{v} \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} &= -\beta v_z + \kappa \Delta T_1, \end{aligned}$$

où β est une constante dont on donnera l'expression. Expliquer quels sont, dans le membre de droite de ces équations, les termes qui favorisent la convection et ceux qui s'y opposent.

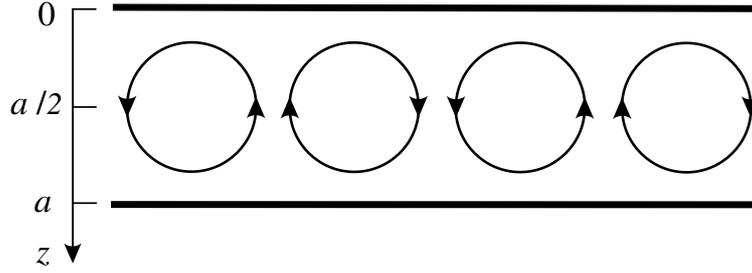


Figure 1. Cellules de convection.

III.1.3. La résolution complète de ces équations linéarisées, auxquelles il faudrait ajouter la conservation de la masse, est complexe et montre que des rouleaux de convection, représentés sur la figure 1, peuvent apparaître sous certaines conditions. Nous allons nous contenter d'une solution simplifiée qui est correcte au milieu du manteau, au voisinage de $z = a/2$. On admet que le champ de vitesses y est principalement vertical, $v_x = v_y = 0$, et on cherche une solution ne dépendant que de x et t de la forme, en notation complexe

$$\begin{aligned} v_z(x, t) &= \operatorname{Re} [A \exp(\lambda t + ikx)] \\ T_1(x, t) &= \operatorname{Re} [B \exp(\lambda t + ikx)] \\ P_1(x, t) &= \operatorname{Re} [C \exp(\lambda t + ikx)], \end{aligned}$$

où A , B et C sont des amplitudes complexes, et λ et k sont réels. En insérant les trois relations ci-dessus dans les équations obtenues à la question **III.1.2**, obtenir la relation entre λ et k pour que le système ait des solutions non nulles.

III.1.4. On cherche la condition sous laquelle peuvent apparaître des rouleaux de convection cylindriques (voir figure 1), qui correspondent à la valeur $k = \pi/a$. Montrer que pour cette valeur de k , la solution statique est instable si le nombre de Rayleigh, défini par $Ra = \alpha \beta g a^4 / \nu \kappa$, est supérieur à un seuil qu'on précisera.

III.1.5. On donne les valeurs numériques $a = 3000 \text{ km}$, $T_c - T_s = 2000 \text{ K}$, $\alpha = 2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\nu = 10^{17} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Comparer la valeur de ν à son ordre de grandeur pour un liquide ordinaire. Calculer le nombre de Rayleigh et montrer que la convection dans le manteau est possible. Quelle caractéristique de ce système compense sa grande viscosité ?

III.2. Chauffage interne

On étudie maintenant le chauffage du manteau terrestre par la radioactivité interne. On note H la puissance par unité de masse dégagée par les désintégrations radioactives dans le manteau terrestre, supposée constante et uniforme. On néglige le chauffage par le noyau, et on considère par conséquent qu'il n'y a pas de transfert thermique à travers le plan $z = a$. Comme précédemment, on note T_s la température en $z = 0$, supposée constante.

III.2.1. Comment est modifiée l'équation de la diffusion thermique en présence de la source de chaleur ? On notera C la capacité thermique massique, supposée constante. Déterminer la solution statique $T_0(z)$ de cette équation en tenant compte des nouvelles conditions aux limites. Dessiner le profil de température.

III.2.2. Comme dans la partie **III.1.**, on étudie l'évolution d'une petite perturbation autour de cette solution statique. Montrer que les équations obtenues à la question **III.1.2.** sont toujours valables, à ceci près que β est une fonction de z . Exprimer la valeur de β au milieu du manteau ($z = a/2$) en fonction de H , C , κ et a .

III.2.3. Calculer numériquement le nombre de Rayleigh associé au chauffage interne. On donne $H = 8 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $C = 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Le chauffage interne suffit-il à produire de la convection ?

III.2.4. La réaction radioactive la plus importante est la désintégration β du noyau ^{40}K , qui a une demi-vie d'environ 10^9 années. Que peut-on en conclure sur l'importance de la convection au début de l'histoire du globe terrestre ?

III.3. Épilogue

III.3.1. Des deux mécanismes de chauffage étudiés, lequel vous semble le plus important ?

III.3.2. La convection dans le manteau transporte l'énergie thermique depuis le noyau vers les couches supérieures du manteau, à des profondeurs d'environ 30 km, où la température est voisine de 1000 K. La convection conduit-elle à un gradient géothermique plus grand ou plus petit que la conduction thermique seule, étudiée dans la partie **II** ?

* *
*

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2016

FILIÈRE PC

COMPOSITION DE PHYSIQUE – A – (XE)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
On se contentera, pour les applications numériques, d'un seul chiffre significatif.

Miroir à atomes

Ce problème traite de la réalisation et de l'utilisation d'un miroir à atomes. Ce dispositif permet à la fois de mesurer quantitativement la force de van der Waals et de mesurer les rugosités d'une surface. Il se compose d'un texte de 3 pages, de trois figures et de 35 questions d'analyse et de compréhension auxquelles le candidat doit répondre. Ces questions sont regroupées en quatre parties et leur ordre suit le texte.

Commencez par lire attentivement le texte intitulé "L'atome devant son miroir". Cela devrait vous prendre entre 25 et 30 minutes. N'hésitez pas à surligner ou à relever les éléments qui vous paraissent importants.

Puis répondez aux questions de la partie intitulée "Analyse de l'article". Elles ne sont pas forcément ordonnées par difficulté croissante et certaines d'entre elles ont une formulation ouverte. Dans ce cas, toutes vos initiatives de résolution sont bienvenues à condition de justifier et de détailler systématiquement votre démarche. Si nécessaire, vous citerez précisément la partie du texte qui appuie votre raisonnement (les lignes sont numérotées de 1 à 246 à cet effet). Les hypothèses des modélisations doivent être clairement précisées et toutes les approximations doivent être explicitées et justifiées. Les calculs devront être menés sous forme littérale, avec pour objectif final d'obtenir une valeur numérique.

Données utiles pour l'analyse du texte

Nombre d'Avogadro	$N_A \simeq 10^{24}$
Constante de Boltzmann	$k_B \simeq 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Constante de Planck réduite	$h/2\pi = \hbar \simeq 10^{-34} \text{ J.s}$
Accélération de la pesanteur	$g \simeq 10 \text{ m.s}^{-2}$
Masse molaire du rubidium	$M \simeq 100 \text{ g.mol}^{-1}$

L'atome devant son miroir*

Résumé

Les progrès du refroidissement d'atomes par laser ont permis de contrôler le mouvement des atomes. De cette maîtrise est née l'optique atomique qui, après l'optique électronique et l'optique neutronique, étend le champ de l'optique à des objets plus gros et plus complexes. Nous nous sommes particulièrement intéressés à un composant optique de base, le miroir. En se réfléchissant à sa surface, les atomes nous informent sur leur interaction avec celle-ci.

Depuis plusieurs années les faisceaux laser permettent de refroidir des atomes neutres jusqu'à des températures de l'ordre du microkelvin. La réduction de l'agitation de ces atomes les rend manipulables et a permis de fonder une véritable optique atomique. Les rayons sont les trajectoires des atomes que l'on dévie, réfléchit ou focalise en utilisant toute une panoplie de forces exercées par des faisceaux laser et des champs magnétiques. L'optique atomique a également

ses ondes et les longueurs d'onde de de Broglie associées sont d'autant plus grandes que les atomes sont plus lents, de un à quelques centaines de nanomètres. L'optique atomique utilise deux types de miroirs : le miroir magnétique et le miroir à onde évanescente. C'est en cherchant à améliorer la qualité de ces derniers que nous avons mis en évidence leur sensibilité à l'interaction de van der Waals ou à la rugosité d'une surface à l'échelle du nanomètre.

1 Réfléchir un atome sur un miroir de lumière

Le miroir est constitué d'un prisme de verre à la surface duquel on forme une onde évanescente. Cette onde est obtenue par réflexion totale à l'intérieur du prisme de l'onde lumineuse monochromatique issue d'un laser (figure 1). Pour obtenir la réflexion totale, il faut que l'angle d'incidence du faisceau laser dépasse un angle limite. Si la lumière ne peut plus se propager vers l'extérieur du prisme, la continuité du champ électromagnétique à l'interface impose l'existence d'un champ non nul à l'extérieur, qui décroît exponentiellement en s'éloignant de la surface : c'est l'onde évanescente. Pour des incidences pas trop proches de l'angle limite, sa longueur caractéristique de décroissance est de l'ordre de $\lambda/2\pi$ ($\lambda = 780 \text{ nm}$ est la longueur d'onde du laser).

Le prisme est placé dans une enceinte à vide. Lorsqu'un atome approche de sa surface, il rencontre un champ électromagnétique d'intensité croissante et subit donc une force dipolaire, répulsive si la fréquence du laser est supérieure à la fréquence de résonance de la transition atomique (voir appendice).

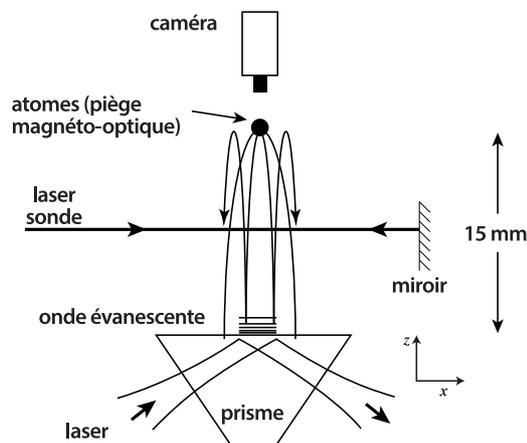


Figure 1: L'onde évanescente est créée par réflexion totale d'un laser à la surface d'un prisme. Les atomes tombent du piège magnéto-optique puis sont réfléchis par l'onde évanescente. Leur fluorescence est observée quand ils traversent le laser sonde.

L'onde évanescente crée ainsi une barrière de potentiel qui croît exponentiellement lorsque l'atome s'approche de la surface du prisme où

*Texte extrait et adapté d'un article publié dans la revue *Images de la physique* en 1998.

elle atteint une valeur maximale U_0 (voir figure 2 à gauche). Un atome dont l'énergie cinétique est inférieure à U_0 rebrousse chemin avant d'atteindre la surface. L'intensité laser utilisée (quelques watts par mm^2) correspond à une énergie U_0 de l'ordre de 10^{-25} joule. Des atomes de rubidium ayant cette énergie ont une vitesse d'environ 1 m/s. À température ambiante la vitesse d'un atome est de l'ordre de quelques centaines de m/s. Pour le faire rebondir, il faut donc que la composante de sa vitesse normale à la surface soit sensiblement diminuée. Cela peut être obtenu en incidence rasante avec des atomes ayant une vitesse thermique ordinaire ou avec des atomes ralentis. Nous avons choisi la deuxième méthode, dans une expérience consistant à lâcher des atomes froids sur une surface.

2 Caractériser l'interaction d'un atome avec une surface

Lors du rebond, les atomes s'approchent de la surface de verre à une distance voisine de la longueur de décroissance de l'onde évanescente, soit une centaine de nanomètres. À cette distance, ils interagissent aussi avec la surface de verre : en l'absence d'onde évanescente, un atome neutre subit une force attractive au voisinage d'une surface diélectrique.

Comment comprendre l'origine de cette force ? Examinons d'abord le cas d'un dipôle électrique permanent placé parallèlement au plan d'une paroi diélectrique. Tout se passe comme s'il interagissait avec un dipôle de sens contraire et symétrique par rapport au plan de la paroi, nommé "dipôle image". Dans son état fondamental un atome neutre ne possède pas de moment dipolaire électrique permanent. Cependant, des fluctuations d'origine quantique produisent un dipôle fluctuant de valeur instantanée différente de zéro, mais dont la valeur moyenne est nulle. Bien que sa fréquence caractéristique de fluctuation ν soit très élevée (de l'ordre des fréquences optiques), le dipôle apparaît figé à l'échelle du temps de propagation du champ entre l'atome et la paroi lorsque la distance atome-paroi est petite devant la longueur d'onde optique. L'interaction de ce dipôle fluctuant et de son dipôle image donne lieu à une force attractive, dite force de van der Waals.

Dans un miroir à atomes, on mesure la force de van der Waals en l'équilibrant par la force

La source d'atomes froids est un piège combinant des faisceaux lasers et un champ magnétique. Il contient 100 millions d'atomes dans une sphère d'un millimètre de diamètre et les maintient à une température voisine de $10 \mu\text{K}$. On ouvre le piège en coupant les faisceaux laser et le champ magnétique. Les atomes acquièrent alors une vitesse de 0,5 m/s au bout d'1 centimètre de chute libre et peuvent rebondir sur la surface horizontale du miroir à atomes. Pour observer leur rebond, on les illumine avec un laser se propageant horizontalement entre le piège et la surface du miroir (figure 1). On détecte alors la très faible absorption de ce laser au passage des atomes, avant et après le rebond, ou on peut capter la lumière diffusée par les atomes grâce à une caméra très sensible.

dipolaire à une distance connue entre l'atome et la paroi. La figure 2 (droite) représente l'énergie potentielle qui correspond aux deux forces en fonction de la distance z à la paroi. Au potentiel dipolaire déjà présenté s'ajoute le potentiel de van der Waals qui varie en $1/z^3$. La somme des deux potentiels présente un maximum pour une distance d'environ 50 nm. Les atomes froids permettent de sonder cette barrière de potentiel.

Dans une expérience de chute libre, l'énergie cinétique des atomes est fixée par l'altitude initiale. On pourrait choisir d'augmenter cette hauteur jusqu'à ce que les atomes ne rebondissent plus. Dans la pratique, il est plus simple de fixer la hauteur de chute et de baisser l'intensité du laser, donc la valeur du potentiel dipolaire, jusqu'au seuil de réflexion des atomes. On mesure ainsi la valeur du maximum du potentiel total et, puisqu'on connaît la valeur du potentiel dipolaire, on obtient une mesure du potentiel de van der Waals à une distance donnée. Il est intéressant de noter qu'il existe une zone de transition autour du seuil de réflexion car l'atome peut passer à travers la barrière par effet tunnel, ou être réfléchi au-dessus de la barrière (réflexion quantique). Dans notre expérience, cette zone de transition n'a pas été observée car sa largeur, de quelques centièmes de l'énergie cinétique incidente, est masquée par la dispersion en énergie des atomes et les fluctuations d'intensité du laser. Le seuil de réflexion observé est en bon accord avec le modèle de l'interaction de van der Waals évoqué plus haut.

3 Mesurer les rugosités de surface

Nous avons été surpris d'observer qu'une très petite variation de la distance minimale d'approche, due par exemple à un défaut de la surface de l'ordre du nanomètre, modifiait de façon notable la trajectoire des atomes réfléchis. En fait, la rugosité de la surface se traduit par une perturbation du champ lumineux de l'onde évanescente. Cette perturbation conduit à une modification du potentiel dipolaire sur lequel rebondissent les atomes et donc à une modification de leurs trajectoires.

Pour étudier la sensibilité du dispositif à la rugosité de la surface, nous avons fait rebondir les atomes sur une structure régulière connue. Pour cela, nous avons réalisé un réseau de diffraction à atomes *via* une modulation périodique de l'onde évanescente. Dans ce but, le faisceau laser est partiellement réfléchi de sorte à interférer avec l'onde aller. Il en résulte une modulation spatiale du potentiel répulsif de forme sinusoidale (voir figure 3, à gauche). La période de modulation est fixée à environ la moitié de la longueur d'onde lumineuse. La profondeur de modulation des surfaces équipotentielles, qui résulte de l'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie, est réglable via la fraction R d'intensité réfléchie. On montre que la profondeur de modulation est une fraction ε de la longueur d'onde lumineuse, $\varepsilon = 2\sqrt{R}/(1 + R)$ étant le contraste de l'interférence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. Pour que la diffraction

soit observable, il faut que la profondeur de modulation des surfaces équipotentielles, qui jouent le rôle de miroir atomique et qui produisent donc la modulation des ondes atomiques réfléchies, soit de l'ordre de la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} de l'onde atomique incidente. Comme cette longueur d'onde est de l'ordre de 8 nm pour du rubidium arrivant à 0,5 m/s, il faut que l'intensité réfléchie soit très faible, de l'ordre de 10^{-4} de l'intensité incidente.

Ces résultats débouchent sur la possibilité d'analyser la rugosité de la surface du prisme avec une sensibilité inférieure au nanomètre. En effet, le cas d'une surface rugueuse peut s'interpréter comme une multitude d'interférences entre l'onde lumineuse incidente et les ondes diffusées par les défauts de la surface. Ceci crée des réseaux de diffraction d'orientation et de périodes variables qui conduisent donc, non plus à des ordres de diffraction bien distincts, mais à un élargissement global du nuage d'atomes. L'analyse détaillée de cet élargissement permet de caractériser quantitativement la rugosité de la surface.

Finalement, le rebond d'un atome permet de sonder la surface-miroir avec une résolution de l'ordre d'une fraction de $\lambda_{dB}/2\pi$ dans la direction perpendiculaire à celle-ci. Le grand intérêt de cette méthode est que l'atome perturbe très peu le champ analysé. En contrepartie, il faut effectuer une moyenne sur un grand nombre d'atomes pour obtenir un signal utilisable.

Appendice

Un atome neutre plongé dans un champ électrique voit son nuage électronique déformé de sorte qu'un dipôle électrique est induit. Le moment de ce dipôle \vec{p} est lié à l'amplitude du champ électrique \vec{E} par la relation $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$ où α est la polarisabilité de l'atome qui dépend de la pulsation d'oscillation ω du champ électrique.

La polarisation induite de l'atome résulte du déplacement des charges sous l'effet du champ électrique extérieur. Pour modéliser ce phénomène, on suppose que le noyau est immobile. Il soumet l'électron de charge $-e$ à une force de rappel élastique $-m\omega_0^2\vec{r}$, où m et \vec{r} désignent respectivement la masse de l'électron et sa position relativement au noyau, tandis que ω_0 est la pulsation fondamentale de l'oscillateur atomique. Si l'on suppose que le champ électrique \vec{E} est uniforme à l'échelle de l'atome, l'électron subit aussi une force $-e\vec{E} = -e\vec{E}_0 \cos\omega t$. Ce modèle très

simple, dit de l'électron élastiquement lié, permet de déterminer la polarisabilité $\alpha(\omega)$ de l'atome en régime forcé.

La moyenne temporelle de l'énergie potentielle du dipôle atomique induit, plongé dans le champ électrique \vec{E} , vaut $U = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0|E_0|^2$. Dans un champ inhomogène, un atome subit une force qui dérive de cette énergie potentielle. Au voisinage d'une résonance atomique, la polarisabilité peut atteindre des valeurs importantes. Elle devient négative pour des fréquences plus élevées que celle de la résonance : c'est cette situation, où le dipôle induit oscille en opposition de phase par rapport au champ, qui est utilisée dans le miroir à atomes. Dans ce cas, l'atome est expulsé des régions de champ fort par une force qui dépend de $|E_0|^2$, c'est-à-dire de l'intensité du laser qui crée le champ.

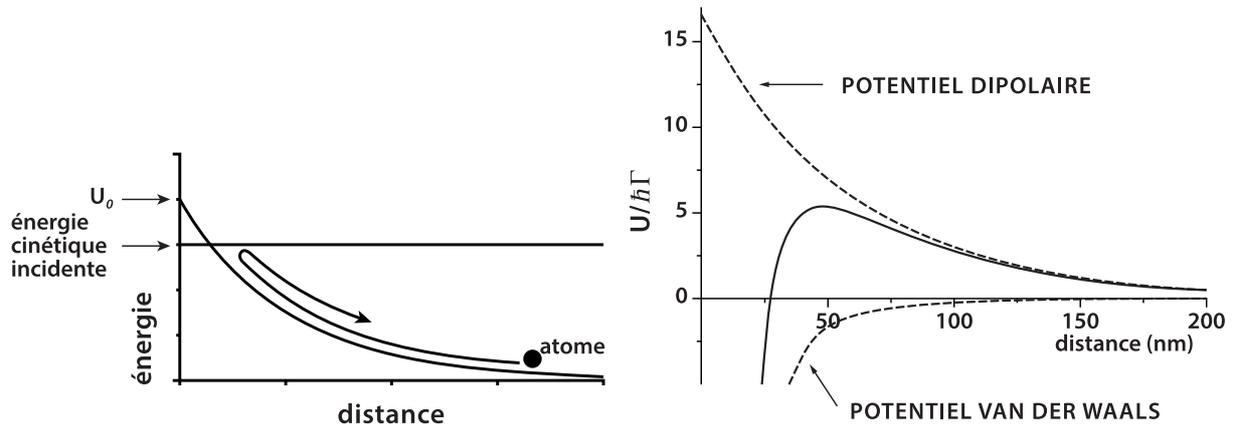


Figure 2: **A gauche** : L'onde évanescente crée un potentiel d'interaction qui décroît exponentiellement en fonction de la distance du prisme. Les atomes sont réfléchis si leur énergie cinétique est inférieure à la valeur maximale de l'énergie potentielle. **A droite** : Le potentiel total auquel sont soumis les atomes (trait plein) est la somme du potentiel dipolaire et du potentiel de van der Waals (en pointillé). Il est représenté en fonction de la distance au prisme. L'unité d'énergie est $\hbar\Gamma$ où $\Gamma/2\pi = 6$ MHz est la largeur naturelle de la transition atomique utilisée pour le rubidium. Les valeurs correspondent aux conditions de l'expérience décrite dans le texte.

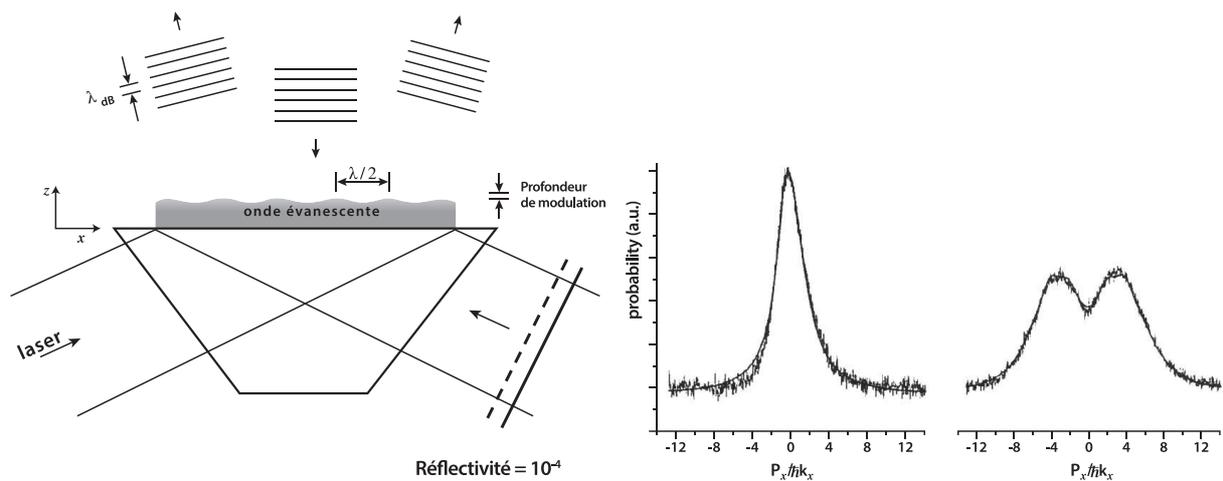


Figure 3: **A gauche** : Réseau de diffraction à atomes. Une petite fraction de la lumière incidente est renvoyée vers le prisme, créant une onde évanescente légèrement modulée. La profondeur des surfaces équipotentielles (amplitude verticale entre les sommets et les creux) est beaucoup plus petite que sa période. Une onde de de Broglie atomique subit une forte diffraction si λ_{dB} est de l'ordre de cette profondeur de modulation. Puisque $\lambda_{dB} \approx \lambda/100$, les atomes sont sensibles à de très faibles déformations de l'onde évanescente. **A droite** : Mesure de la probabilité de diffraction atomique (en unité arbitraire) en fonction de la quantité de mouvement transverse P_x de l'atome en unité de $\hbar k_x$. La partie gauche correspond à la réflexion sur une surface plane. La partie droite représente la figure de diffraction sur un réseau de lumière pour lequel $\varepsilon = 0,023$. Les pics correspondent aux deux premiers ordres diffractés (en $\pm 2\hbar k_x$ et $\pm 4\hbar k_x$) qui ne sont pas résolus.

Analyse de l'article

I - Onde évanescente

1. Démontrer la condition d'obtention de la réflexion totale (lignes 27-29). Vous appuierez votre raisonnement par un schéma. Déterminer l'angle limite si l'indice optique du prisme vaut $n = 2$.

Les questions qui suivent ont pour but de modéliser l'onde évanescente (lignes 29-37). On note \vec{k} et \vec{k}' les vecteurs d'onde complexes du faisceau laser incident dans le prisme et de l'onde évanescente dans le vide, respectivement, et on repère par les indices x et z leurs composantes tangentielles et normales à la surface du prisme.

2. Expliquer pourquoi les composantes tangentielles k_x et k'_x sont égales.

3. En déduire la relation liant k'_z , k et l'indice n pour un angle d'incidence i .

4. Retrouver la condition de réflexion totale et, quand elle est vérifiée, donner l'expression de la longueur caractéristique de décroissance de l'onde évanescente, qu'on notera ℓ .

5. Tracer l'allure de la variation de ℓ en fonction de l'angle d'incidence i . Commenter les lignes 34 à 37 du texte.

II - Rebond des atomes

6. En utilisant la modélisation exposée dans l'appendice (lignes 210-231), déterminer l'expression de la polarisabilité $\alpha(\omega)$ en fonction de m , e , ε_0 , ω_0 et ω . Quelle est son unité ?

7. Justifier l'expression de U donnée dans l'appendice, ligne 234.

8. Justifier les lignes 39-44.

9. Expliquer les lignes 45-49.

10. Expliquer pourquoi les atomes rebroussement chemin (lignes 49-51 et figure 2 à gauche).

11. Vérifier que les valeurs de U_0 et de la vitesse des atomes de rubidium indiquées lignes 53-55 sont bien cohérentes entre elles.

12. Expliquer quantitativement les lignes 55-57.

13. Expliquer les lignes 57-62. Préciser quantitativement ce que signifie "incidence rasante".

14. Estimer la densité volumique d'atomes dans le piège et la comparer avec la densité de molécules dans l'air ambiant.

15. Estimer la pression dans le piège en supposant que les atomes froids se comportent comme un gaz parfait. Quelle contrainte expérimentale en découle ?

16. Vérifier la valeur de la vitesse de chute des atomes indiquée ligne 72.

III - Interaction d'un atome avec une surface diélectrique

17. Tracer l'allure des lignes du champ d'un dipôle électrique.

18. En déduire pourquoi un dipôle permanent est attiré par son dipôle image dans une paroi diélectrique (lignes 94-97) et justifier la dépendance en $1/z^3$ indiquée ligne 119.

19. Expliquer les lignes 103 à 108.

20. L'ordre de grandeur de la distance minimale atome-paroi donnée dans le texte vérifie-t-elle la condition énoncée aux lignes 107-108 ?

- 21.** Le potentiel dipolaire est de la forme $U_0 \exp(-2z/\ell)$ et le potentiel de van der Waals est de la forme $-A/z^3$. Quel est le signe de A ? Décrire le comportement asymptotique du potentiel total pour $z \rightarrow 0$ et $z \rightarrow \infty$.
- 22.** Construire avec U_0 , ℓ et A une quantité sans dimension δ proportionnelle à A .
- 23.** Tracer l'allure du potentiel total dans les limites $\delta \gg 1$ et $\delta \ll 1$. De quelle limite se rapproche la figure 2 à droite ?
- 24.** Écrire, sans les résoudre, les deux équations permettant de déterminer A en fonction de l'altitude initiale des atomes, qu'on notera h , et de la valeur de U_0 correspondant au seuil de réflexion des atomes (lignes 123-134).

On rappelle que la probabilité de transmission T par effet tunnel (lignes 134-143) à travers une barrière de potentiel rectangulaire de largeur a et de hauteur V , pour un atome de masse m dont l'énergie cinétique E_c est inférieure à V , vaut environ $T \simeq \exp(-2a\sqrt{2m(V - E_c)}/\hbar) \ll 1$.

- 25.** De quel autre phénomène physique rencontré dans l'article peut-on rapprocher l'effet tunnel ? Vous argumenterez votre réponse.
- 26.** On cherche l'expression de T pour estimer le coefficient de transmission à travers le potentiel de la figure 2 (droite) lorsque l'énergie cinétique E_c de l'atome est inférieure à la valeur maximale du potentiel total, qu'on notera V_{\max} . Expliquer au moyen d'un schéma comment on peut, pour ce calcul, approcher le potentiel total par une barrière rectangulaire.
- 27.** Comment varie la largeur de cette barrière en fonction de $V_{\max} - E_c$ lorsque l'énergie cinétique E_c est juste inférieure à V_{\max} ? En déduire comment, dans cette approximation, la probabilité de transmission varie avec E_c . Proposer une expression littérale de la largeur de la zone de transition sur laquelle on observe l'effet tunnel (lignes 134-143).

IV - Mesure des rugosités de surface

- 28.** Donner l'expression de l'amplitude de l'onde évanescente résultant du faisceau laser incident en fonction de x et z . Par analogie, en déduire l'amplitude de l'onde évanescente résultant du faisceau laser réfléchi sur le miroir de réflectivité R .
- 29.** En déduire que le potentiel répulsif qui en résulte se met sous la forme

$$U(x, z) = U_1 e^{-2z/\ell} [1 + \varepsilon \cos(2k_x x)]$$

où U_1 est une constante de normalisation.

- 30.** Exprimer z en fonction de x sur une équipotentielle dans le cas où $\varepsilon \ll 1$. Dans ce cas, représenter graphiquement quelques équipotentielles.
- 31.** Donner l'expression de la profondeur des équipotentielles dans cette approximation.
- 32.** Rappeler la définition de la longueur d'onde de de Broglie et retrouver son ordre de grandeur pour le rubidium (lignes 183-185).
- 33.** Montrer que les conditions expérimentales de la figure 3 correspondent bien au régime où la diffraction doit être observable.
- 34.** Retrouver l'ordre de grandeur de R (lignes 185-187).
- 35.** Calculer à quel angle de diffraction correspondent les pics sur la figure 3 à droite.

* *
*

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES**

CONCOURS D'ADMISSION 2020

MERCREDI 22 AVRIL 2020 - 08h00 – 12h00

FILIÈRE PC - Épreuve n°5

**PHYSIQUE B
(XEULC)**

Durée : 4 heures

L'utilisation de calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Ondes de gravité dans un fluide

Des ondes de gravité peuvent apparaître au sein d'un fluide stratifié, c'est-à-dire un fluide dont la masse volumique varie spatialement selon une direction particulière, généralement la verticale. Elles sont appelées ondes internes. Des ondes peuvent également apparaître à l'interface entre deux fluides de masses volumiques différentes et non miscibles. Elles sont dites ondes de surface. Les vagues à la surface d'un océan en sont une manifestation. Notons qu'il s'agit là d'une situation limite de la précédente.

Cette étude comprend deux parties qui peuvent être abordées de façon indépendante. La première s'intéresse aux ondes à l'interface eau/air, la seconde est consacrée aux ondes internes dans l'eau. Nous définissons le référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$, supposé galiléen, tel que le champ de gravité s'exprime $\vec{g} = -g\vec{u}_y$. Nous restreindrons ces études à des situations spatialement bidimensionnelles, dans le plan vertical (O, x, y) .

En vue des applications numériques nous adoptons les valeurs suivantes : $D = 15 \text{ cm}$, $L = 15 \text{ cm}$ et $H = 20 \text{ cm}$. Ces grandeurs seront introduites et présentées dans la suite.

N.B. : Nous considérerons que le principe (ou théorème) d'ARCHIMÈDE reste applicable hors du domaine de la stricte statique des fluides.

1 Ondes de surface.

Reportons-nous à la figure (1). Nous considérons un objet cylindrique, de masse volumique ρ_c uniforme, de diamètre $D = 2R$ et de longueur L , flottant à la surface de l'eau de masse volumique ρ . Cette eau est contenue dans un canal de largeur très légèrement supérieure à L (mais considérée égale à L), de profondeur H et de longueur très supérieure à toutes les longueurs caractéristiques du système. L'origine O du repère est placée au niveau de la surface de l'eau. Nous notons Y l'ordonnée du centre de masse G du flotteur et $u = Y - Y_0$ son écart par rapport à son ordonnée d'équilibre Y_0 (fluide et flotteur à l'équilibre). Nous nous placerons toujours dans le cas où l'axe du flotteur reste parallèle à l'axe (Oz) et tel que $|u| \ll R$. Nous négligerons l'action de l'air sur le flotteur.

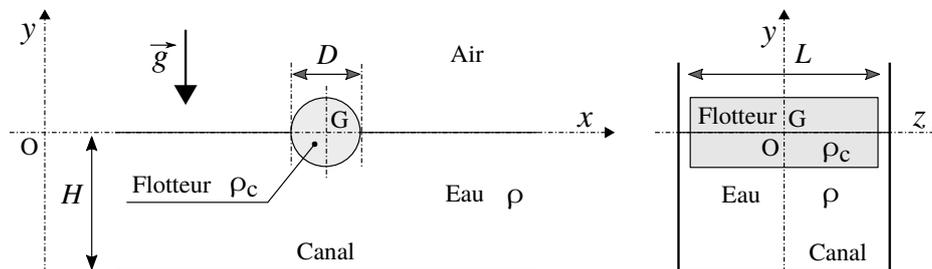


FIGURE 1 – Objet cylindrique (ρ_c, D, L) flottant horizontalement à la surface de l'eau (ρ) d'un canal (vues de face et de côté). Ces figures ne sont pas à l'échelle. En particulier, la largeur du canal n'est que très légèrement supérieure à L (l'écart est exagéré sur le schéma afin de le rendre visible).

1. Nous souhaitons que le cylindre flotte, à l'équilibre, en étant à moitié immergé dans l'eau. Préciser la relation que doit alors vérifier ρ_c . Calculer sa valeur numérique.

Nous nous placerons dans cette situation dans toute cette partie.

- Nous supposons que l'équilibre du flotteur a été légèrement perturbé (verticalement) et souhaitons exprimer la pulsation ω_0 de ses oscillations libres. Nous négligerons ici toute cause de dissipation d'énergie mécanique et nous nous placerons dans le cas où le fond du canal n'influence pas le mouvement du flotteur.

2. Sur la base de considérations physiques et d'arguments dimensionnels, établir la dépendance de ω_0^2 avec les différents paramètres du problème. On détaillera chaque étape du raisonnement.
3. Exprimer, au premier ordre relativement au rapport u/R et en fonction de L , D et u , la variation algébrique δV_{im} de volume immergé du flotteur par rapport à la situation d'équilibre.
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par la variable u . On fera apparaître la pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de g et D .

5. Calculer la valeur numérique de la fréquence f_0 correspondant à ω_0 .

- La figure (2) représente l'évolution temporelle de l'ordonnée Y du centre de masse G du flotteur, obtenue expérimentalement.

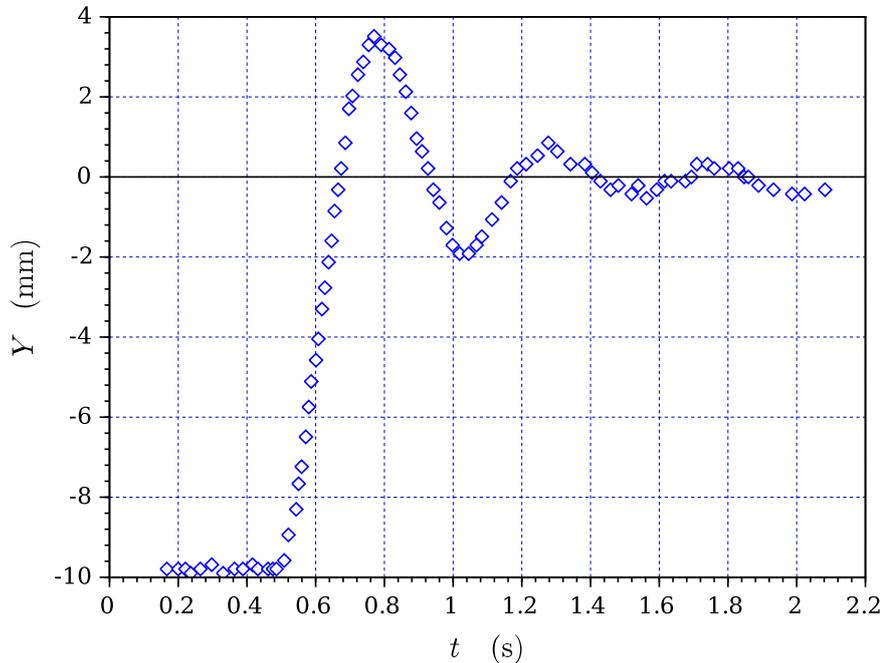


FIGURE 2 – Évolution temporelle expérimentale de l'ordonnée Y du centre de masse G du flotteur.

- 40
6. Déterminer, à partir de la figure (2), la pseudo-fréquence f_{exp} des oscillations du flotteur ainsi que l'amplitude initiale u_0 . Proposer une estimation (approximative) du facteur de qualité Q de cet oscillateur (en précisant la méthode adoptée).

7. Comparer à f_0 la pseudo-fréquence f_{exp} des oscillations du flotteur estimée à partir de la figure (2).

- Nous souhaitons maintenant identifier les effets responsables de l'amortissement des oscillations du flotteur. Nous commençons par l'effet de traînée.

- 45
8. Préciser, sur la base d'une argumentation, l'expression du nombre de REYNOLDS Re qu'il convient d'associer à l'écoulement de l'eau autour du flotteur en mouvement. En donner une estimation (nous adopterons, pour la viscosité cinématique de l'eau, la valeur $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$). Commenter ce résultat.

- 50
9. Donner l'expression de la force de traînée \vec{F}_T qui paraît alors la mieux adaptée à décrire l'action mécanique du fluide sur le flotteur en mouvement (toujours transversalement à son axe) à la vitesse $\vec{V} = V \vec{u}_y$. On raisonnera comme si le cylindre était totalement immergé dans un milieu infini et on s'inspirera du résultat connu relatif à un objet sphérique.

10. Exprimer, à partir de grandeurs caractéristiques que l'on précisera, le rapport caractéristique K_{TR} de la force de traînée à la force de rappel gravitationnel qui est intervenue en question (4) lors de l'établissement de l'équation différentielle.

- 55
11. Estimer numériquement le rapport K_{TR} . Conclure sur la participation de l'effet de traînée à l'amortissement des oscillations du flotteur.

- Nous recherchons maintenant la cause de l'amortissement des oscillations du flotteur dans les ondes de surface qu'elles génèrent. L'image inférieure de la figure (3) est une chronophotographie permettant de donner une représentation de l'évolution temporelle de la surface libre eau/air. Pour cela on réalise un film du canal à raison de 250 images par seconde, pendant 3 s. Pour chaque image (telle que celle du haut de la figure (3)), on stocke l'état de couleur de

60 chacun des pixels correspondant à une ligne horizontale prédéterminée (en pratique, située très légèrement en dessous de l'interface libre eau/air au repos [ligne en trait pointillé sur la figure du haut]). Ces lignes de pixels sont ensuite représentées les unes en dessous des autres en respectant la chronologie de la prise d'images (figure du bas). Cette chronophotographie se rapporte à l'expérience relative à l'évolution représentée sur la figure (2).

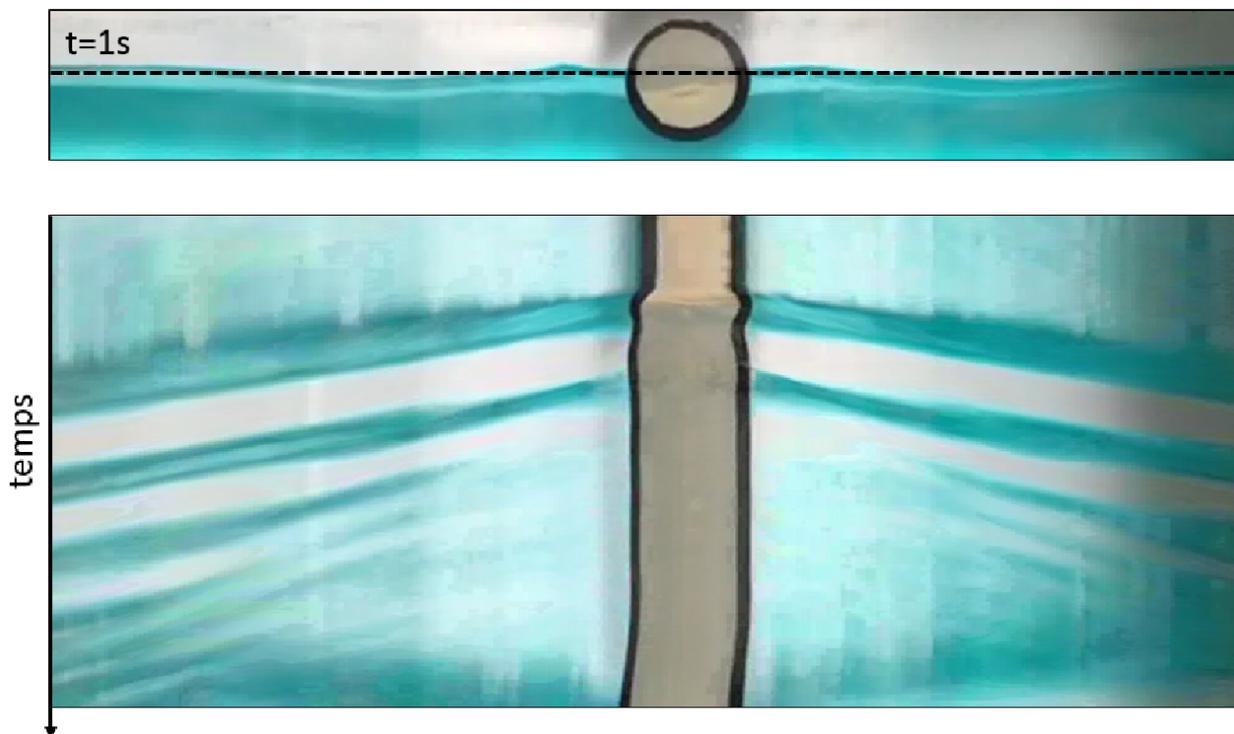


FIGURE 3 – Chronophotographie illustrant l'évolution de l'interface eau/air (cadence de 250 images par seconde sur une durée de 3 s). La ligne horizontale en trait pointillé tracée sur la photographie du haut représente la ligne des pixels suivis temporellement et qui est reportée chronologiquement, de haut en bas, pour former l'image du bas.

- 65
12. Proposer une interprétation des lignes obliques situées de part et d'autre de la frange sombre verticale et centrale (trace du flotteur).
 13. Déterminer, à partir de cette chronophotographie, la fréquence f'_{exp} des oscillations du flotteur. On précisera la démarche suivie.
 14. De la même manière, déterminer la longueur d'onde λ_{exp} des ondes de surface.
 15. Estimer la célérité c_{exp} de ces ondes de surface.
- Nous admettons que la relation de dispersion liant la pulsation ω ($\omega \geq 0$) au nombre d'onde k des ondes de surface se propageant dans un canal de profondeur H est donnée par la relation :

$$\omega^2 = gk \tanh(kH) \quad \text{où} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} > 0 \quad \text{et} \quad \tanh(kH) = \frac{\sinh(kH)}{\cosh(kH)} = \frac{\exp(2kH) - 1}{\exp(2kH) + 1} \quad (1)$$

- 70
16. Représenter l'allure graphique de la fonction $\omega = \omega(k)$. On précisera ses comportements limite et asymptotique.
 17. Indiquer à quelle condition le milieu peut être considéré comme non dispersif.
 18. Associer la célérité c_{exp} calculée à la question (15) à l'une des vitesses de groupe ou de phase.
 19. Dédire de la relation (1), dans la limite $kH \ll 1$, l'expression de la célérité c des ondes de surface. Calculer sa valeur numérique. Vérifier la compatibilité de cette valeur avec celle de c_{exp} déterminée en réponse à la question (15).
- 75

- Nous décrivons l'évolution spatio-temporelle de la hauteur (algébrique) h des vagues formant l'onde de surface par l'équation :

$$h(x, t) = A \sin(\Omega_0 t \pm kx) \quad (A = \text{Cste} \in \mathbb{R}_+ ; \Omega_0 \in \mathbb{R}_+ ; k \in \mathbb{R}_+) \quad (2)$$

N.B. : En réalité, l'amplitude A dépend du temps (amortissement des oscillations du flotteur excitant les ondes de surface) et de l'espace (amortissement des ondes de surface). Nous considérerons ici simplement que cette amplitude ne varie pas (sensiblement) sur l'échelle d'une période ni sur celle d'une longueur d'onde. En pratique, sauf à la question (23), nous considérerons donc l'amplitude A comme constante et uniforme.

80 Nous adoptons comme état de référence, notamment pour ce qui concerne les énergies, la situation correspondant à une interface plane et immobile. Par ailleurs, nous considérons que nous pouvons nous placer dans la limite des faibles profondeurs ($kH \ll 1$). Nous notons c la célérité des ondes de surface.

20. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = E_p(\rho, g, L, A, \lambda)$ emmagasinée par l'onde, sur une étendue spatiale (selon (Ox)) égale à une longueur d'onde. Rappelons que la largeur de la cuve (égale à la longueur du flotteur) est notée L .
85
21. En déduire l'expression du flux (moyen) d'énergie potentielle $\Phi_p = \Phi_p(\rho, g, L, A, c)$ ($[\Phi_p] = W$) traversant une section verticale d'abscisse donnée.
22. Nous cherchons d'abord à relier l'amplitude A des ondes à l'amplitude B ($B \geq 0$) des oscillations du flotteur. Nous considérons alors que le volume total des bosses (occupant chacune une demie longueur d'onde) des ondes se formant de part et d'autre du flotteur est égal à celui balayé par le flotteur sur une demie période.
90 Dans cette démarche nous considérons que le flotteur oscille à amplitude constante sur l'échelle d'une période (hypothèse jumelle de celle adjointe à l'équation (2)).

Exprimer, dans ces conditions, l'amplitude A en fonction de B , D et λ .

23. En reliant la variation d'énergie par unité de temps du flotteur au flux Φ_p qu'il rayonne par le biais des ondes de surface, établir que l'amplitude B de ses oscillations vérifie l'équation différentielle du premier ordre :

$$\dot{B} + \frac{B}{\tau} = 0 \quad (3)$$

On explicitera la dépendance de la constante τ avec le diamètre D , la célérité c et la longueur d'onde λ .

24. Déduire du résultat précédent l'expression du facteur de qualité Q du système oscillant. On exprimera Q en fonction de la célérité c des ondes, de la période T des oscillations et du diamètre D du cylindre.
95
25. Estimer la valeur de ce facteur de qualité. Analyser ce résultat.

2 Ondes internes.

La masse volumique de l'eau varie en fonction de la salinité, de la température et de la pression, ce qui conduit généralement à une stratification verticale du milieu océanique. Nous considérons ici que la masse volumique ρ_0 du milieu, en situation d'équilibre, varie selon la relation :

$$\rho_0(y) = \rho_0(0) - \bar{\rho} \frac{y}{\ell} \quad (4)$$

La grandeur $\bar{\rho}$ représente la masse volumique moyenne (selon la verticale) et la grandeur $\rho_0(0)$ celle correspondant au fond océanique ($y = 0$). La longueur caractéristique ℓ est de l'ordre de 10^7 m. Le plan (O, z, x) du référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ est placé au niveau du fond océanique (se reporter à la figure (4)). Enfin, nous négligerons toute cause de dissipation de l'énergie mécanique.
100

Le traitement de la sous-partie suivante (questions (26), (27) et (28)) n'est pas indispensable à la suite de l'étude.

- Un cylindre homogène de centre de masse G , de diamètre $D = 2R$, de longueur $L = D$ et de masse volumique ρ_c (de valeur *a priori* différente de celle prise en partie (1)) trouve son équilibre, entre deux eaux, à une altitude Y_0 . Nous notons $Y = Y_0 + u$ l'ordonnée de son centre de masse G , la variable u représentant l'écart à sa position d'équilibre. Nous supposons que son axe reste en permanence parallèle à l'axe (Oz) . Ce système est représenté sur la figure (4).
105

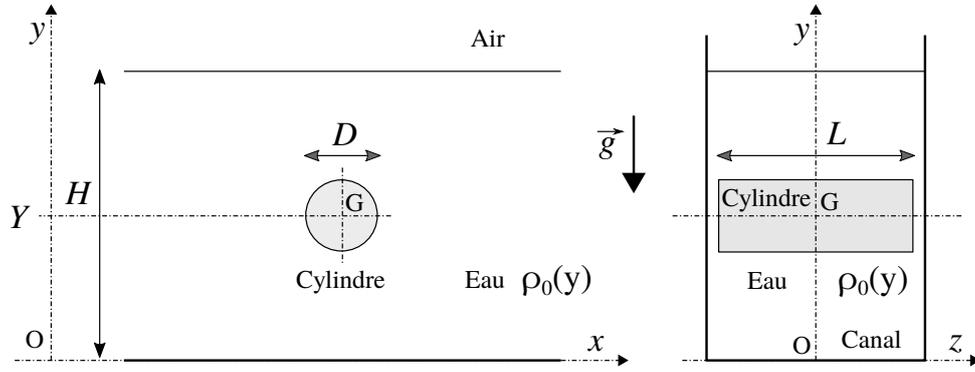


FIGURE 4 – Objet cylindrique (ρ_c, D, L) immergé dans l'eau ($\rho_0(y)$). Ces figures ne sont pas à l'échelle. En particulier, la largeur du canal n'est que très légèrement supérieure à L (l'écart est exagéré sur le schéma afin de le rendre visible).

26. Établir l'équation algébrique satisfaite par l'ordonnée Y_0 ainsi que l'équation différentielle vérifiée par la variable u . On fera apparaître la pulsation propre Ω_0 ($\Omega_0 > 0$) des oscillations du cylindre que l'on exprimera en fonction des grandeurs $g, \ell, \bar{\rho}$ et ρ_c . On considérera que l'action du fluide sur le cylindre est traduite simplement par la poussée d'ARCHIMÈDE.

Il sera avantageux de noter que la masse volumique de l'eau varie de façon affine avec l'altitude y .

27. Dans le cas où $Y_0 = H/2$, exprimer Ω_0^2 en fonction de g et ℓ .
 28. Calculer la valeur de la période T_0 associée à Ω_0 .

• Nous étudions maintenant la propagation des ondes internes dans le milieu océanique stratifié. Nous imaginons que ces ondes sont excitées à la pulsation ω , par exemple par les oscillations verticales imposées à l'objet cylindrique immergé représenté figure (4). Dans la situation de référence, qui correspond à l'océan au repos, la vitesse du fluide est uniformément nulle et sa masse volumique varie selon la relation (4). L'excitation entraîne des variations de vitesse qui s'accompagnent de variations de la masse volumique et de la pression du fluide, par rapport à la situation de référence. Nous notons les champs correspondants de vitesse, de masse volumique et de pression, réponses à cette excitation, sous la forme :

$$\begin{cases} \delta\vec{v}(x, y, t) = \delta v_x(x, y, t) \vec{u}_x + \delta v_y(x, y, t) \vec{u}_y \\ \rho(x, y, t) = \rho_0(y) + \delta\rho(x, y, t) \\ P(x, y, t) = P_0(y) + \delta P(x, y, t) \end{cases} \quad (5)$$

L'indice "0" se rapporte à la situation de référence. Nous recherchons chacune de ces variations sous la forme d'ondes planes harmoniques que nous écrivons en représentation complexe :

$$\delta\psi = A_\psi \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y)] \quad (A_\psi \in \mathbb{C}, \omega \geq 0, k_x \in \mathbb{R}, k_y \in \mathbb{R}) \quad (6)$$

Enfin, nous considérons l'écoulement du fluide comme incompressible et parfait.

29. Représenter, sur un schéma, dans le cas où $k_x = 2k_y > 0$, la direction de propagation \vec{u} de l'onde. Faire ensuite apparaître les longueurs d'onde λ_x et λ_y en précisant comment elles sont obtenues.

• Nous admettons que les fonctions variations $\delta\psi$ sont solutions du système d'équations différentielles linéaires (au premier ordre par rapport à chacune des fonctions $\delta\psi$) :

$$\begin{cases} (1) \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_y}{\partial y} = 0 \\ (2) \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \delta v_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = 0 \\ (3) \bar{\rho} \frac{\partial \delta v_x}{\partial t} = -\frac{\partial \delta P}{\partial x} \\ (4) \bar{\rho} \frac{\partial \delta v_y}{\partial t} = -\frac{\partial \delta P}{\partial y} - g \delta \rho \end{cases} \quad (7)$$

30. Préciser ce que traduit chacune de ces équations.

31. Introduire, dans le système différentiel (7), les fonctions sous leur forme donnée par l'équation (6) afin d'établir un système linéaire d'équations algébriques vérifié par les amplitudes complexes de ces fonctions.

32. Dédurre de ce système d'équations la relation de dispersion liant ω , k_x et k_y . Vérifier qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\omega^2 (k_x^2 + k_y^2) = \alpha^2 k_x^2 \quad (8)$$

où α est une constante positive, propre au milieu stratifié, que l'on exprimera en fonction des grandeurs g et ℓ .

33. Écrire cette relation de dispersion en faisant apparaître l'angle θ que forme le vecteur d'onde \vec{k} avec l'axe horizontal (Ox).

34. Analyser cette relation de dispersion. On s'interrogera notamment sur la façon dont le vecteur d'onde \vec{k} est lié à la pulsation d'excitation ω .

35. Exprimer, en faisant apparaître les composantes k_x et k_y , la vitesse de phase \vec{V}_ϕ de ces ondes. Rappelons que cette vitesse est celle des plans de phase.

36. Exprimer, en faisant apparaître les composantes k_x et k_y , la vitesse de groupe \vec{V}_g de ces ondes. Nous admettrons que chacune de ses composantes s'exprime de la même manière que dans le cas unidimensionnel, mais avec la composante correspondante du vecteur d'onde.

Cette vitesse est celle de propagation de l'énergie. Elle définit une direction orientée qui est l'analogue de ce que représente un rayon lumineux en optique.

37. Établir que les vitesses de phase et de groupe sont orthogonales. Établir que leurs composantes selon l'axe (Ox) sont de même signe. En s'appuyant sur la première équation du système (7), montrer que la vitesse $\delta\vec{v}$ est orthogonale au vecteur d'onde \vec{k} .

38. Représenter, sur un schéma, la vitesse de groupe, la vitesse de phase ainsi que la direction de la vitesse $\delta\vec{v}$, dans le cas où $k_x = 2k_y > 0$.

• La figure (5) représente une cartographie¹ spatiale instantanée du champ $\partial\delta\rho/\partial y$, en régime établi. La valeur va croissant depuis la couleur bleue (négatif intense) vers la couleur rouge (positif intense) en passant par le niveau zéro en jaune-vert. Dans cette expérience, le milieu est linéairement stratifié et tel que la longueur ℓ introduite dans la présentation de la partie (2) est égale à 12 m. Ce milieu est excité harmoniquement à la pulsation ω par les oscillations verticales imposées à un cylindre d'axe perpendiculaire au plan de la figure. Ce cylindre est situé au centre de la figure.

39. Commenter cette cartographie. Le champ représenté peut-il être décrit par une unique onde plane (une argumentation est attendue) ?

40. Estimer, à partir de la cartographie représentée figure (5), la valeur de la pulsation excitatrice ω .

41. Les ondes internes peuvent interagir avec le relief sous-marin et subir des réflexions. Représenter, sur un schéma (inspiré de la figure (6)), le vecteur d'onde et la vitesse de groupe (orientant l'équivalent du rayon lumineux) d'une onde, avant puis après sa réflexion sur une paroi verticale. Le vecteur d'onde incident est tel que $k_x = 2k_y > 0$. Nous admettrons que l'onde réfléchie vérifie la relation de dispersion de l'onde incidente.

1. Pour réaliser cette cartographie on place une grille derrière la cuve et on photographie son image vue depuis le devant de la cuve, cylindre et fluide étant au repos. On photographie ensuite à nouveau cette grille, à un instant donné, lorsque les oscillations sont établies. C'est à partir de la comparaison de ces deux photographies que l'on accède au gradient de masse volumique, *via* le gradient d'indice optique qu'il induit.

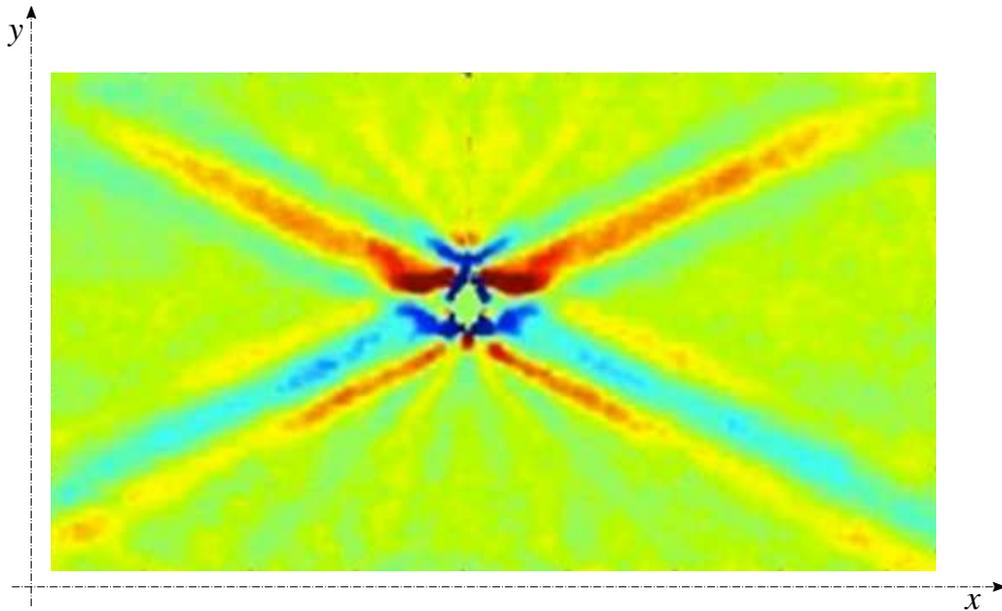


FIGURE 5 – Cartographie spatiale instantanée du champ $\partial\delta p/\partial y$ d'un milieu verticalement et linéairement stratifié ($\ell = 12$ m), excité par les oscillations verticales (ω) d'un cylindre (situé au centre de la figure). La valeur est codée par la couleur allant du bleu (négatif extrême) au rouge (positif extrême).

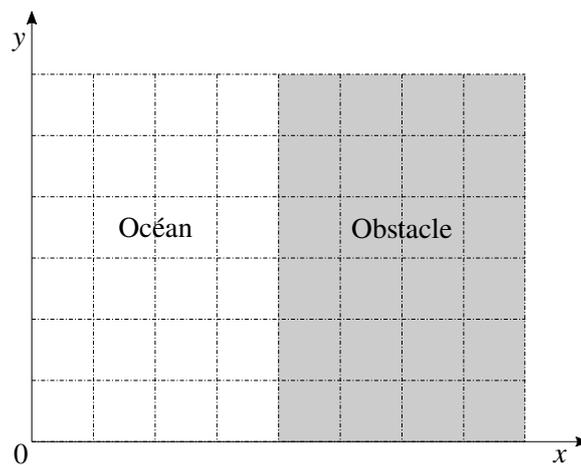


FIGURE 6 – Relief sous-marin formant une falaise verticale.

42. Le vecteur d'onde incident est toujours tel que $k_x = 2k_y > 0$ mais le plan représentant la paroi sous-marine a maintenant pour équation cartésienne $y - 2x = \text{Cste}$. Représenter, sur un schéma inspiré de la figure (6) et adapté à cette nouvelle situation, deux rayons voisins parallèles incidents puis réfléchis (rappelons encore qu'un "rayon" est orienté par la vitesse de groupe). Analyser cette situation d'un point de vue énergétique.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE – ESPCI

CONCOURS D'ADMISSION 2020

MARDI 21 AVRIL 2020 – 8h00 - 12h00

FILIÈRE PC – Épreuve n°3

PHYSIQUE A

(XE)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Commencez par lire attentivement ce texte, ce qui devrait vous prendre environ 30 minutes. Puis répondez aux questions de la partie intitulée “Analyse de l’article”.

La lumière ralentie¹

Résumé

Il est possible de ralentir la propagation de la lumière dans un milieu constitué d’atomes froids. Un laser dont la fréquence est ajustée à une transition atomique bien choisie place l’ensemble des atomes dans un état qui les rend incapables d’absorber la lumière à cette fréquence. Une impulsion laser émise autour de cette fréquence peut alors être considérablement ralentie.

1 Le dispositif expérimental

Les matériaux transparents ralentissent la lumière et on nomme indice de réfraction le quotient de la vitesse de la lumière dans le vide et de sa vitesse dans un milieu donné. Le diamant, dont l’indice de réfraction est l’un des plus élevés, ne ralentit la lumière que d’un facteur 2,4. Pour obtenir un ralentissement d’un facteur dix millions, on utilise la “transparence induite”, un effet d’origine quantique observé pour la première fois dans les années 1990. La transparence induite permet de rendre transparent un nuage de gaz à une fréquence où il aurait dû être opaque. Pour cela, il est préparé par un laser – dit de couplage – dont la fréquence est ajustée à une transition atomique bien choisie.

Malheureusement, cette manipulation est perturbée par l’agitation thermique des atomes. En effet, lorsqu’un atome se rapproche ou s’éloigne d’une source monochromatique, il la perçoit avec une fréquence différente. A cause de l’agitation thermique, tout se passe comme si les atomes recevaient un faisceau dont la fréquence est mal ajustée. Pour limiter cet effet, il faut refroidir le gaz à l’aide d’un dispositif combinant faisceaux laser et champ magnétique.

La préparation du gaz débute dans un four qui émet un intense faisceau d’atomes de sodium propulsés à environ 720 m/s. Ils rencontrent alors un faisceau laser. En heurtant les atomes, les photons du laser les ralentissent à 40 m/s en une milliseconde. La poursuite du refroidissement s’opère au moyen de six faisceaux qui baignent les atomes de tous côtés et les ralentissent encore pour les amener à 50 μ K. Les faisceaux laser sont alors éteints et les atomes sont

piégés dans un champ magnétique. Le gaz est ensuite refroidi par évaporation : modifier lentement la profondeur du puit de potentiel qui les piège permet d’éjecter les atomes les plus rapides. Les quelques millions d’atomes restants ont une température de 500 nK et forment un nuage en forme de cigare de 229 μ m de longueur et 50 μ m de diamètre. Tout le processus se déroule dans une chambre où règne une pression 10^{14} fois inférieure à la pression atmosphérique.

Une fois prêt, le gaz d’atomes est éclairé latéralement par le laser de couplage, puis une impulsion lumineuse est émise, qui le traverse dans le sens de la longueur. Un détecteur de lumière permet de mesurer la durée que met l’impulsion pour traverser le nuage, qui varie de quelques micro- à quelques millisecondes. Immédiatement après cette mesure, la longueur du nuage est déterminée avec un autre faisceau laser qui l’éclaire par dessous et projette son ombre sur une caméra. Cette longueur divisée par le temps de traversée donne la vitesse de propagation de l’impulsion.

2 La transparence induite

Le sodium appartient à la famille des alcalins qui regroupe les éléments n’ayant qu’un seul électron de valence. Lorsque celui-ci est sur son orbitale fondamentale, son énergie est minimale. Lorsqu’il quitte cette orbitale, il acquiert d’autant plus d’énergie qu’il s’éloigne du noyau : quand l’électron occupe une orbitale permise de grand rayon, l’atome est dans un état excité.

Par ailleurs, l’électron de valence et le noyau de l’atome ont tous deux un moment magnétique

¹Texte extrait et adapté d’un article publié dans le dossier n°53 de la revue *Pour la science* paru en 2006 sous la plume de Lene Vestergaard Hau. Les figures 3 et 4 sont extraites de Lene Vestergaard Hau et al., *Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas*, Nature 397, 594–598 (1999).

associé à un moment cinétique intrinsèque nommé spin. Lorsque ces deux spins sont antiparallèles, l'énergie d'interaction de leurs champs magnétiques est minimale ; elle est maximale lorsqu'ils sont parallèles. L'énergie d'un état excité dépend donc aussi de l'alignement des spins électronique et nucléaire.

Bien qu'un atome puisse occuper une multitude d'états d'énergie, nous n'en avons utilisé que trois pour ralentir la lumière. Après sa préparation, le nuage de sodium ultra-froid ne contient que des atomes dans l'état fondamental (état 1) dont l'énergie est minimale : l'électron de valence est sur le niveau le plus bas, son spin et celui du noyau sont antiparallèles. L'état 2 ressemble beaucoup à l'état 1, mais les spins de l'électron et du noyau sont parallèles : cela le place $7,4 \mu\text{eV}$ au-dessus de l'état 1. L'état 3 est un niveau excité avec les spins de l'électron et du noyau antiparallèles. Il est, quant à lui, $2,1 \text{ eV}$ au-dessus de l'état 1. En se désexcitant de l'état 3, l'atome émet une lumière dont la fréquence correspond à la couleur jaune des lampes à vapeur de sodium.

L'impulsion lumineuse que nous voulons ralentir est réglée sur une fréquence voisine de celle de la transition 1-3. Si cette impulsion est envoyée sur le nuage sans précaution, les atomes l'absorbent plus ou moins en passant de l'état 1 à l'état 3. Puis ils se désexcitent rapidement et retombent dans l'état 1 en émettant la lumière jaune correspondante dans toutes les directions. L'analyse de l'intensité de la lumière transmise révèle un profil d'absorption centré sur la fréquence de la transition 1-3. L'ajout du laser de couplage, réglé sur la fréquence de la transition 2-3, empêche l'absorption dans une bande étroite de fréquences centrée sur celle de la transition 1-3. C'est cette situation de transparence induite par la présence du laser de couplage qui permet de ralentir l'impulsion lumineuse.

Une analogie mécanique permet de décrire la situation. Les transitions atomiques 1-3 et 2-3 peuvent être modélisées par deux oscillateurs harmoniques amortis indépendants de masses identiques m , de raideurs $k_1 = m\omega_1^2$ et $k_2 = m\omega_2^2$. Envoyer une impulsion lumineuse de pulsation ω voisine de celle de la transition 1-3 (ω_1) revient à exciter l'oscillateur correspondant avec une force harmonique $F(t)$ de même pulsation que l'impulsion lumineuse (voir figure 1).

Dans cette situation, la puissance transférée à l'oscillateur varie en fonction de la pulsation excitatrice ω en suivant le profil habituel d'absorption résonante (voir figure 2a). Dans cette analogie mécanique, le laser de couplage joue le rôle

d'un ressort liant les deux masses, dont la raideur $K = m\Omega^2$ est proportionnelle à son intensité lumineuse. Sa présence modifie aussi la raideur des deux oscillateurs qui deviennent $k_1 - K$ et $k_2 - K$. Le profil d'absorption de ce système est représenté sur les figures 2b et c.

Une fois rendu transparent par l'action du laser de couplage, l'indice de réfraction du nuage vaut exactement un – comme dans le vide – pour la lumière dont la fréquence correspond très précisément à la transition de l'état 1 vers l'état 3. Toutefois, aux fréquences voisines, l'indice de réfraction ne vaut plus exactement un.

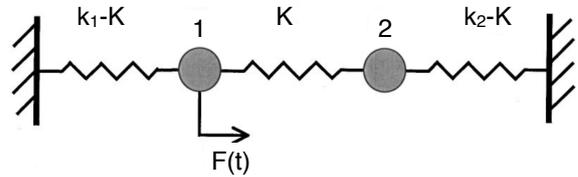


Figure 1: Le modèle mécanique unidimensionnel utilisé pour décrire les trois niveaux de l'atome de sodium en interaction avec les deux lasers.

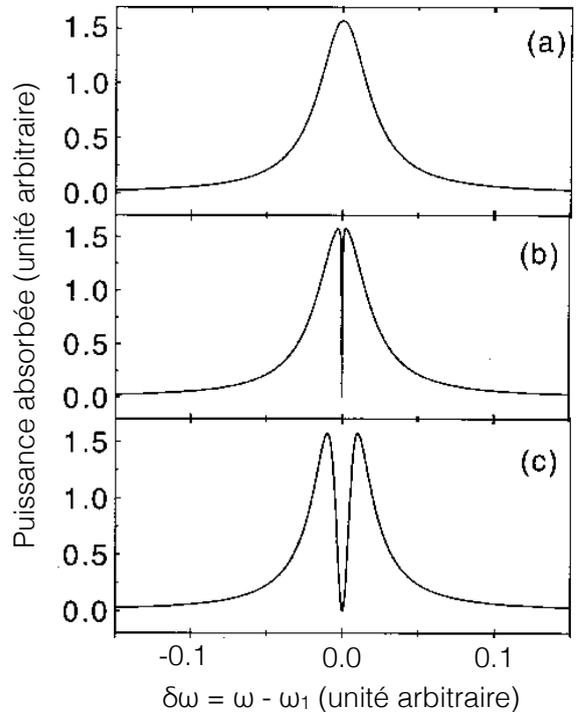


Figure 2: Puissance moyenne (sur une période) fournie par la force extérieure $F(t)$ sans couplage (a) puis pour des valeurs croissantes de Ω (b-c).

3 La lumière ralentie

Si l'indice de réfraction vaut 1 pour la fréquence correspondant à la transition vers l'état 3, l'impulsion, réglée sur cette fréquence, ne devrait-elle pas progresser à la vitesse de la lumière dans le vide ? Non, parce que l'indice de réfraction du nuage varie très rapidement autour de cette fréquence fondamentale et qu'une impulsion lumineuse ne contient jamais une seule fréquence, mais un intervalle de fréquences.

Une impulsion est en effet une superposition d'oscillations sinusoïdales de fréquences voisines. Le pic d'intensité de l'impulsion est l'endroit où toutes ces oscillations sont en phase, où toutes leurs crêtes coïncident. La vitesse de ce pic, que l'on nomme vitesse de groupe, n'est pas toujours égale à la célérité des ondes sinusoïdales – la vitesse de phase – constituant l'impulsion. Dans le vide, la vitesse de phase vaut environ 300 000 kilomètres par seconde pour toutes les fréquences. Dans ce cas, toutes les ondes sinusoïdales constituant l'impulsion avancent à la même vitesse, et le point où elles sont en phase également. L'impulsion progresse alors aussi à la vitesse de la lumière dans le vide, vitesse de phase et

vitesse de groupe sont égales. Toutefois, lorsque l'indice de réfraction varie avec la fréquence, les différentes ondes constituant l'impulsion se déplacent à des vitesses différentes, ce qui modifie le déplacement du pic d'intensité de l'impulsion. En fait, la vitesse de groupe, celle à laquelle progresse l'impulsion, diminue d'autant plus vite que l'indice de réfraction augmente rapidement avec la fréquence (voir appendice).

Cette façon de ralentir la lumière est très différente de ce qui se passe dans un milieu transparent ordinaire. Dans notre cas, la vitesse de groupe est réduite, mais la vitesse de phase est très peu modifiée, car l'indice de réfraction reste proche de 1. L'indice varie brusquement sur un intervalle de fréquences étroit (voir la figure 3b) ce qui provoque une diminution de la vitesse de groupe d'un facteur de l'ordre de 10 millions.

Enfin, le ralentissement de l'impulsion lumineuse est mesuré en comparant de façon très précise l'instant où elle est détectée avec celui où l'on détecte l'impulsion en l'absence du gaz d'atomes (voir figure 4). Une impulsion ralentie sort du dispositif avec une intensité diminuée, car le nuage n'est pas parfaitement transparent.

Appendice : vitesse de phase et vitesse de groupe

Une impulsion lumineuse est une onde électromagnétique de courte durée. Sa vitesse de phase v_ϕ est la célérité d'un point de cette onde tandis que sa vitesse de groupe v_g est la vitesse à laquelle progresse l'enveloppe du motif oscillant. Une impulsion lumineuse est la somme d'ondes sinusoïdales de diverses fréquences. Quand l'indice de réfraction du milieu où se propage l'impulsion ne varie pas avec la fréquence, toutes ses composantes se propagent à la même vitesse : la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales. En revanche, quand l'indice de réfraction du milieu varie avec la fréquence, les composantes de l'impulsion se déplacent à des célérités différentes, de sorte que vitesse de phase et vitesse de groupe sont différentes.

L'onde résultant de la superposition de deux ondes sinusoïdales de pulsation ω_1 et ω_2 est le produit de deux ondes sinusoïdales que l'on désigne

par onde motif et onde enveloppe. La pulsation de l'onde motif est la moyenne de ω_1 et ω_2 . Sa vitesse, qui n'est autre que la vitesse de phase, est liée à l'indice de réfraction à cette pulsation moyenne. Quant à l'onde enveloppe, sa pulsation est proportionnelle à la différence entre ω_1 et ω_2 . La vitesse de groupe dépend donc de l'écart entre les deux indices de réfraction $n(\omega_1)$ et $n(\omega_2)$, c'est-à-dire de la variation de l'indice de réfraction avec la pulsation.

Ce raisonnement se généralise à une impulsion quelconque. Sa vitesse de phase est donnée par l'indice de réfraction à la pulsation moyenne de l'impulsion et sa vitesse de groupe dépend de la variation de l'indice de réfraction avec la pulsation : quand l'indice croît avec la pulsation, la vitesse de groupe est d'autant plus petite que l'indice varie rapidement.

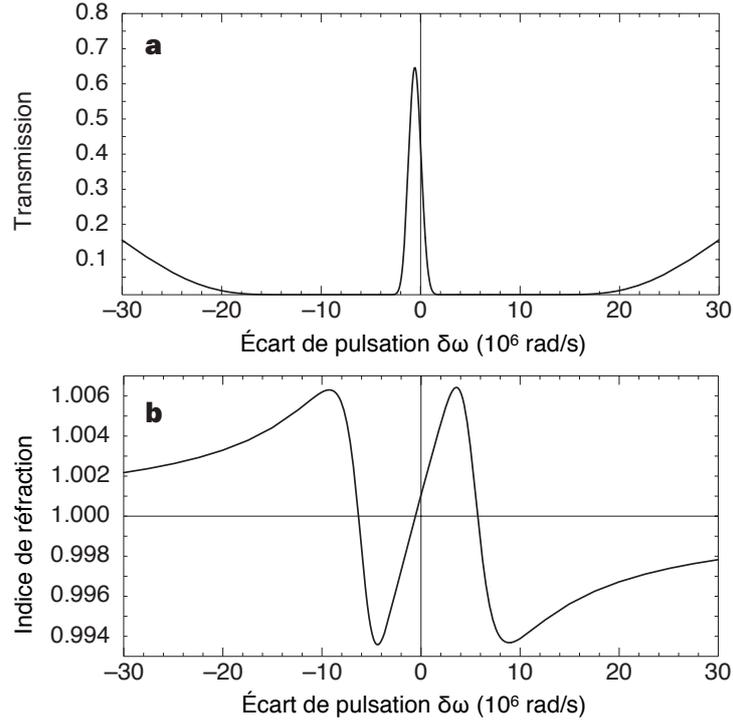


Figure 3: **a** : Transmission du nuage d'atomes en fonction de l'écart entre la pulsation de l'impulsion et la pulsation de la transition 1–3. Le nuage, d'une longueur égale à $229 \mu\text{m}$, a une température de 450 nK et une densité de $3,3 \times 10^{18} \text{ atomes/m}^3$. Le laser de couplage, accordé sur la transition 2–3, a une intensité de 520 W/m^2 . La position du pic est décalée de la pulsation de résonance de $0,6 \times 10^6 \text{ rad/s}$ à cause de l'effet Stark dynamique, non discuté ici. **b** : Variation de l'indice de réfraction du nuage en fonction de l'écart de pulsation de l'impulsion avec la pulsation de résonance de la transition 1–3.

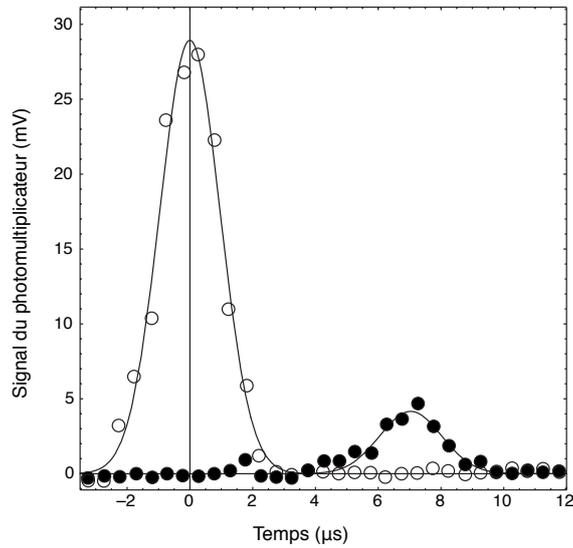


Figure 4: Mesure du retard de l'impulsion lumineuse. La courbe de référence (sans atomes dans le dispositif) est représentée en points blancs. La courbe en points noirs représente celle de l'impulsion ayant traversé le nuage d'atomes. Les courbes en trait plein sont les ajustements aux courbes expérimentales.

Analyse de l'article

Constante d'Avogadro	$N_A \simeq 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B \simeq 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Constante de Planck réduite	$h/2\pi = \hbar \simeq 10^{-34} \text{ J.s}$
Masse molaire du sodium	$M \simeq 20 \text{ g.mol}^{-1}$

Pour les applications numériques, on se contentera d'un seul chiffre significatif.

I - Le dispositif expérimental

1. Quel est l'effet mis en jeu aux lignes 19 à 21 ? Rappeler la formule donnant la fréquence perçue par l'atome en fonction de sa vitesse relative à la source lumineuse.
2. Donner l'expression littérale du nombre de photons nécessaire pour ralentir un atome de sodium à la sortie du four (lignes 27–32). On notera λ la longueur d'onde du laser. Estimer l'ordre de grandeur de ce nombre de photons.
3. Expliquer pourquoi la modification de la profondeur du piège magnétique permet d'éjecter les atomes les plus rapides (lignes 37–41).
4. Pourquoi cette éjection conduit-elle à un refroidissement du gaz résiduel ?
5. Quelle est l'ordre de grandeur de la vitesse moyenne des atomes une fois les processus de piégeage et de refroidissement terminés ?
6. À votre avis, pourquoi faut-il maintenir une si faible pression dans la chambre d'expérimentation ?
7. Rappeler comment l'énergie d'une transition atomique est reliée à sa pulsation (lignes 91–94).

II - Étude de l'analogie mécanique

Nous allons maintenant étudier l'analogie mécanique proposée aux lignes 112–132.

8. Dans la suite, nous allons supposer que $\omega_1 = \omega_2$. Justifiez cette approximation en vous appuyant sur le texte.
9. Écrire les équations différentielles d'évolution du système représenté sur la figure 1. On notera $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les déplacements des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre, et on écrira les forces d'amortissement de chacun des oscillateurs sous la forme $-m\gamma_1\dot{x}_1$ et $-m\gamma_2\dot{x}_2$, où $\dot{x}_i = dx_i/dt$, et γ_1 et γ_2 sont les coefficients d'amortissement correspondants.
10. Écrire la forme algébrique que prend ce système en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω . On notera \underline{x}_i l'amplitude complexe du déplacement de l'oscillateur i .
11. Dans cette question uniquement, on considère que les oscillateurs ne sont pas amortis. Quelles sont alors les pulsations de résonance ω_+ et ω_- ? Donner l'expression de $\Omega_r = |\omega_+ - \omega_-|$ dans la limite où $\Omega \ll \omega_1$.

On suppose dorénavant que $\gamma_2 = 0$ tout en conservant $\gamma_1 > 0$.

12. Réécrire, sans le résoudre, le système obtenu à la question 10 en posant $\omega = \omega_1 + \delta\omega$ et en éliminant Ω au profit de Ω_r .
13. On suppose que ω_1 est très grand devant γ_1 , $|\delta\omega|$ et Ω_r . Simplifier le système précédent.
14. Vérifier qu'une force extérieure de la forme $F(t) = F \cos \omega t$, où l'amplitude F est réelle et positive, fournit, en moyenne sur une période, la puissance $\frac{1}{2} F \omega_1 \text{Im}(\underline{x}_1)$ (où $\text{Im}(\underline{x}_1)$ désigne la

partie imaginaire de l'amplitude complexe du déplacement de l'oscillateur 1), à un signe près qui dépend de la convention choisie à la question 10 dans l'exponentielle complexe.

15. Retrouver la courbe de la figure 2a. Donner l'expression de sa largeur à mi-hauteur.
16. Décrire le mouvement des oscillateurs dans le cas où $\delta\omega = 0$ et $\Omega_r \neq 0$. Commenter.
17. Déterminer l'expression de $\underline{x}_1(\delta\omega)$ en fonction de $\delta\omega$.
18. Simplifier cette expression quand $|\delta\omega| \ll \Omega_r$.
19. Retrouver la forme des figures 2b et 2c en analysant les configurations pour lesquelles $\delta\omega$ tend vers zéro ou devient très grand. Donner une expression littérale de la largeur du creux central.

III - Transparence induite

Nous allons maintenant utiliser les résultats précédents pour comprendre la transparence induite. On admet que l'indice complexe du gaz d'atomes est donné par $n(\omega) = 1 + C \underline{x}_1(\omega)/F$, où C est proportionnel au nombre d'atomes par unité de volume.

20. Sachant que l'expérience est menée avec un laser opérant en lumière visible (jaune du sodium), quel est l'ordre de grandeur de ω_1 ?
21. On donne pour cette expérience les valeurs $\gamma_1 = 6,3 \times 10^7$ rad/s et $\Omega_r = 0,2\gamma_1$. Vérifier que l'on est bien dans les conditions de la question 13.
22. Comment Ω_r dépend-il de l'intensité du laser de couplage ?
23. Rappeler la relation donnant le nombre d'onde k en fonction de la pulsation ω , de l'indice du milieu n et la vitesse de la lumière c .
24. En s'aidant des résultats de la partie II, expliquer le phénomène de transparence induite (lignes 133–139).
25. Toujours en vous appuyant sur les résultats de la partie II, déterminez une expression littérale puis un ordre de grandeur numérique de l'intervalle de pulsation pour lequel le gaz d'atomes est transparent à la lumière. Comparez votre résultat à la figure 3a. Comment la largeur de cet intervalle varie-t-elle avec l'intensité lumineuse ?

IV - Lumière ralentie

26. Quelle est la vitesse de phase en $\omega = \omega_1$?
27. Dériver le nombre d'onde par rapport à la pulsation, puis exprimer la vitesse de groupe v_g de l'impulsion en fonction de ω , c , de la partie réelle de $n(\omega)$ notée $n_r(\omega)$, et de sa dérivée $n'_r(\omega)$.
28. Grâce à la figure 3b, indiquer précisément dans quel intervalle de pulsation la lumière est le plus ralentie.
29. En utilisant le résultat de la question 17 au voisinage de $\delta\omega = 0$, obtenir l'expression de la vitesse de groupe en $\omega = \omega_1$.
30. Grâce à la figure 4 et au texte de la légende de la figure 3, estimer la valeur numérique de cette vitesse de groupe.
31. Au vu de cette valeur, comment peut-on simplifier l'expression obtenue à la question 29 ? En déduire comment la vitesse de groupe à $\omega = \omega_1$ dépend de l'intensité du laser de couplage.
32. Quels sont l'avantage et l'inconvénient d'augmenter l'intensité du laser de couplage ?

——— Fin des questions ———

ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES - ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION 2021

MERCREDI 14 AVRIL 2021

08h00 – 12h00

FILIÈRE PSI

COMPOSITION de PHYSIQUE
(XCR)

Durée : 4 heures

- *L'utilisation de calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Autour de la modulation acousto-optique

Le fonctionnement d'un modulateur acousto-optique repose sur l'interaction entre un faisceau optique et une onde acoustique dans un cristal. Les applications d'un tel dispositif sont nombreuses. Nous nous intéresserons dans ce problème à l'analyse des fréquences de vibration dans un cristal.

Ainsi, nous allons dans un premier temps étudier les principes de la propagation d'ondes acoustiques, dans l'air et dans un cristal. Ces ondes acoustiques peuvent être générées à l'aide d'un transducteur piézoélectrique dont nous étudierons le fonctionnement dans un deuxième temps. Une fois ces éléments décrits, nous explorerons les moyens de mettre en œuvre l'analyse spectrale à l'aide de différentes méthodes optiques.

Notations, formulaire et données numériques.

- Pour un champ scalaire φ , $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)) = \Delta\varphi$, où Δ est l'opérateur laplacien
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- À 20 °C pour l'air, la compressibilité isentropique est $\chi_S = 7,00 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$ et la masse volumique est $\rho_0 = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Quelques données numériques : $5,8^{-0,5} \approx 0,415$; $8,4^{-0,5} \approx 0,345$; $8,4^{0,5} \approx 2,90$; $5,8^{0,5} \approx 2,41$; $2^{0,5} \approx 1,4$; $3^{0,5} \approx 1,7$; $35/1,4 = 25$

I Génération d'ondes acoustiques

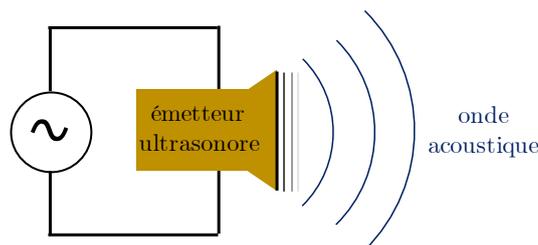


Figure 1 – Un émetteur ultrasonore connecté à une source de tension sinusoïdale émet une onde acoustique *via* la vibration d'un matériau piézoélectrique.

Nous étudions dans cette partie un dispositif permettant la génération d'ondes acoustiques dans une certaine gamme de fréquences. Il s'agit d'un émetteur d'ondes acoustiques ultrasonores, relié à une source de tension sinusoïdale, comme présenté sur la figure 1. Ce dispositif expérimental, usuellement utilisé en séance de travaux pratiques, est constitué d'un matériau piézoélectrique. Le comportement d'un tel matériau et la modélisation de sa réponse à une sollicitation seront détaillés dans la partie II. Le principe de fonctionnement d'un émetteur ultrasonore est le suivant : sous l'influence d'une tension oscillant à une certaine fréquence, le matériau piézoélectrique vibre. Cette vibration provoque une surpression acoustique à l'origine d'une onde acoustique.

I.A Étude fréquentielle de l'émetteur ultrasonore

À l'aide d'un générateur de signaux, on alimente un émetteur ultrasonore par une tension sinusoïdale $U_e(t) = U_0 \cos(2\pi ft)$, de fréquence f , que nous pouvons faire varier, et d'amplitude U_0 . On mesure l'amplitude de l'onde acoustique à l'aide d'un microphone qui convertit la surpression acoustique en une tension $U_s(t) = U_{s,m} \cos(2\pi ft + \varphi)$. Les résultats expérimentaux sont représentés sur la figure 2 : on

trace $\frac{U_{s,m}}{U_0}$ en fonction de la fréquence. Émetteur et récepteur se font face. On considère que le récepteur présente une réponse uniforme sur la plage de fréquences considérée et on souhaite caractériser la réponse en fréquence de l'émetteur.

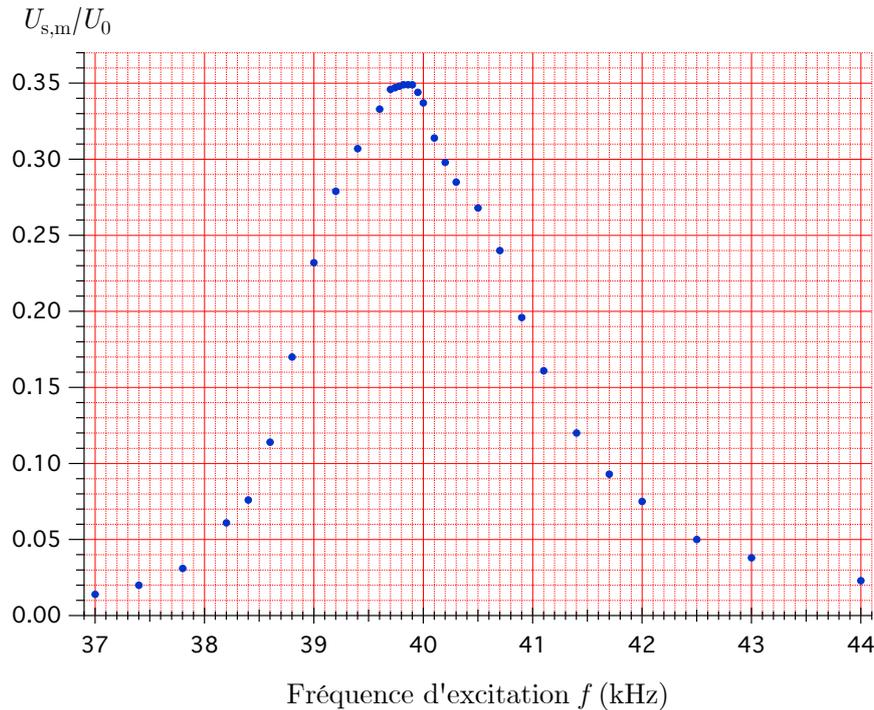


Figure 2 – Tracé de $\frac{U_{s,m}}{U_0}$ en fonction de la fréquence d'excitation f .

1. Interpréter la courbe de réponse, représentée figure 2, comme celle d'un filtre, dont on précisera la nature, et dont on évaluera par lecture graphique les grandeurs caractéristiques suivantes : fréquence propre f_p , bande passante Δf à -3 dB et facteur de qualité Q .
2. Rappeler la gamme de fréquences sur laquelle l'oreille humaine est sensible. Conclure quant à la dénomination de l'émetteur.

I.B Étude de la propagation des ondes acoustiques

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats relatifs à la propagation des ondes acoustiques dans l'air. On modélise l'air comme un fluide homogène, sans viscosité, de masse volumique ρ et de compressibilité isentropique χ_S . On négligera l'influence du champ de pesanteur. À l'équilibre, le fluide est caractérisé par un champ de pression uniforme, noté P_0 , une masse volumique uniforme, notée ρ_0 , et un champ de vitesse uniforme de valeur nulle $\vec{v} = \vec{0}$.

En présence d'une perturbation acoustique, les amplitudes des champs de pression $P(\vec{r},t)$, de vitesse $\vec{v}(\vec{r},t)$ et de masse volumique $\rho(\vec{r},t)$ diffèrent de leurs valeurs à l'équilibre. La perturbation sera caractérisée par les grandeurs $p(\vec{r},t)$, $\mu(\vec{r},t)$ et $\vec{v}(\vec{r},t)$ telles que :

$$P(\vec{r},t) = P_0 + p(\vec{r},t), \quad (1)$$

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0 + \mu(\vec{r},t), \quad (2)$$

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{0} + \vec{v}(\vec{r},t). \quad (3)$$

Le vecteur \vec{r} situe la position dans l'espace du point M, dans un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ associé au référentiel du laboratoire, supposé galiléen. On se place dans le cadre de l'approximation acoustique : $\forall \vec{r}, \forall t$, on a $|p(\vec{r}, t)| \ll P_0$ et $|\mu(\vec{r}, t)| \ll \rho_0$ et $\vec{v}(\vec{r}, t)$ est considérée comme petite par rapport aux vitesses caractéristiques de la propagation de l'onde. Ainsi, les trois grandeurs $p(\vec{r}, t)$, $\mu(\vec{r}, t)$ et $\vec{v}(\vec{r}, t)$ sont considérées comme infiniment petites dans la suite.

On rappelle à toutes fins utiles l'équation d'EULER, l'équation de conservation de la masse et la définition de la compressibilité isentropique :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = - \text{grad} P, \quad (4)$$

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S. \quad (6)$$

3. Dans le cadre de l'approximation acoustique, établir les équations et relations linéarisées déduites des équations (4), (5), (6), dont les perturbations $p(\vec{r}, t)$, $\mu(\vec{r}, t)$ et $\vec{v}(\vec{r}, t)$ sont solutions.
4. Établir l'équation de D'ALEMBERT pour la surpression $p(\vec{r}, t)$

$$\Delta p(\vec{r}, t) - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = 0, \quad (7)$$

où l'on exprimera c_a en fonction de ρ_0 et χ_S .

5. On souhaite mesurer la célérité des ondes acoustiques dans l'air. Pour cela, on place deux récepteurs ultrasonores en face d'un émetteur ultrasonore, qui fonctionnent tous sur le même principe que l'émetteur ultrasonore étudié précédemment. L'émetteur envoie régulièrement des trains d'onde et on écarte un récepteur d'une distance $d_{\text{rec}} = 17$ cm par rapport à l'autre récepteur. Les deux récepteurs sont excités par un train d'onde de l'émetteur et les signaux obtenus à l'oscilloscope sont représentés en figure 3. En exploitant ces oscillogrammes, déterminer la valeur de la célérité des ondes acoustiques dans cette expérience. Comparer la valeur mesurée à la valeur théorique et commenter ce résultat.

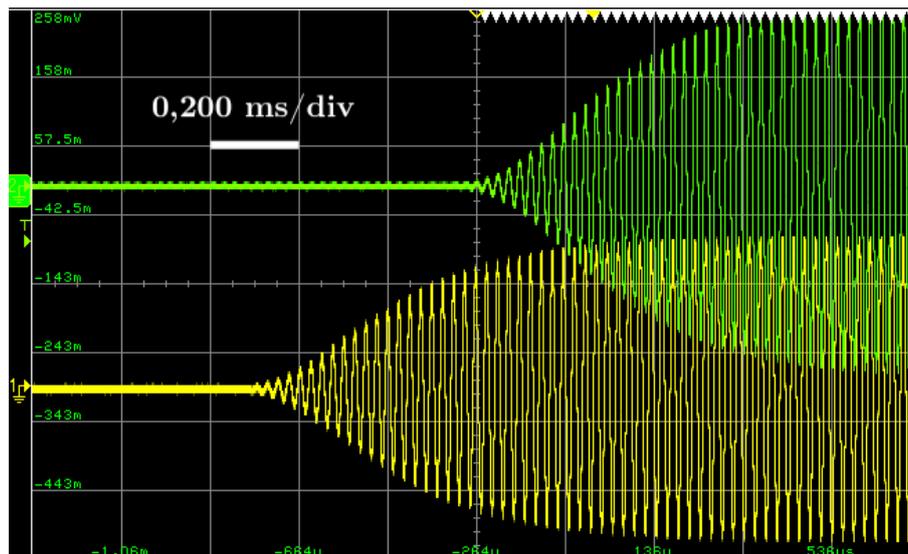


Figure 3 – Signaux expérimentaux délivrés par les deux récepteurs ultrasonores. Une grande division selon l'axe des abscisses correspond à 200 μ s comme indiqué sur la figure.

I.C Propagation d'ondes acoustiques dans un cristal

La propagation des ondes acoustiques ne se limite pas à un fluide. Il est possible de modéliser la propagation d'une onde de compression dans un solide cristallin, en s'intéressant aux vibrations du réseau cristallin.

Nous considérons un modèle unidimensionnel de cristal, de longueur L , constitué de N atomes identiques de même masse m . À l'équilibre, chaque atome est situé sur un nœud d'un réseau cristallin de pas a et d'axe (Ox) . La position d'équilibre du n -ième atome est na , avec n entier naturel dans l'intervalle $[1; N]$. Sous l'influence d'une excitation collective, la position d'un atome au cours du temps peut varier. Elle est désignée par son abscisse $x_n(t)$, repérée par rapport à l'origine O du repère, placée à une extrémité du cristal. Pour un atome quelconque indexé par n , on définit $u_n(t) = x_n(t) - na$, l'écart à sa position d'équilibre. L'interaction d'un atome avec son environnement est modélisée par une force de rappel de constante de raideur K pour chacun des atomes voisins. On néglige l'influence du champ de pesanteur. Les différentes notations sont rappelées sur le schéma de la figure 4.

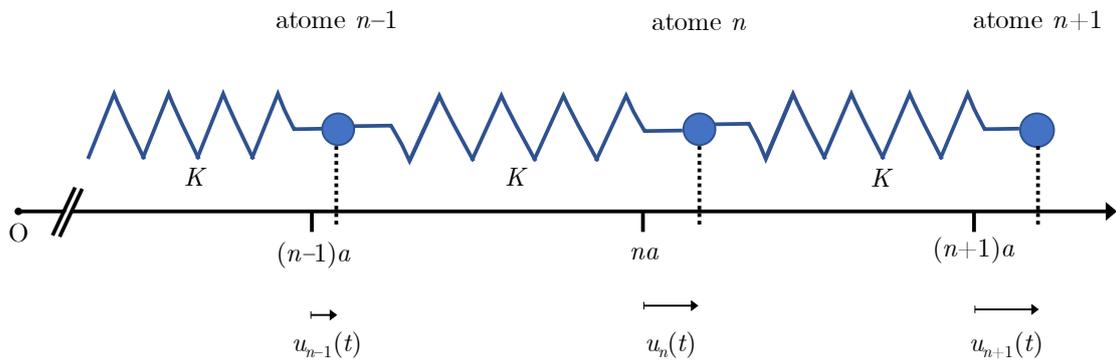


Figure 4 – Représentation du modèle unidimensionnel d'un cristal. Chaque atome est relié à ses deux voisins par un ressort de constante de raideur K et de longueur à vide a .

6. Établir l'équation différentielle reliant $u_n(t)$, $u_{n-1}(t)$ et $u_{n+1}(t)$.

7. Pour cette question uniquement, nous nous plaçons dans l'approximation des milieux continus. Cette approximation consiste à considérer que les atomes sont très rapprochés vis-à-vis de la distance caractéristique λ_c de variation de u_n en fonction de n : $a \ll \lambda_c$. On peut alors considérer $u_n(t)$ comme une fonction continue $u(x,t) = u(x_n = na,t)$, $\forall n$. Établir que le champ de déplacement $u(x,t)$ est solution d'une équation de D'ALEMBERT. On précisera l'expression de la célérité c_s de l'onde ainsi décrite.

• On considère maintenant l'équation obtenue à la question 6. On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes, faisant apparaître le caractère discret du réseau cristallin, et dont l'expression est :

$$u_n(t) = u_0 \exp [i(qna - \omega t)] , \quad (8)$$

où $u_0 \in \mathbb{R}^+$, $\omega \in \mathbb{R}^+$ et $i^2 = -1$.

8. Montrer que la relation de dispersion $\omega(q)$ se met sous la forme suivante :

$$\omega(q) = A \left| \sin \left(\frac{qa}{2} \right) \right| , \quad (9)$$

où A est une constante à exprimer en fonction des données.

9. On suppose que le cristal est de longueur L suffisamment grande pour négliger les effets de bord et considérer le cristal comme infini. Afin de faire disparaître les effets de bord, nous utilisons des conditions aux limites périodiques : nous supposons que les deux extrémités sont liées entre elles de sorte à fermer la chaîne linéaire d'atomes sur elle-même. Cela se traduit par la condition mathématique $u_{N+1}(t) = u_1(t)$. En déduire que $q = pq_0$, où $p \in \mathbb{Z}$, q_0 étant à exprimer en fonction des données. Chaque nombre d'onde q , quantifié par l'entier relatif p , correspond alors à un mode de vibration du cristal.
10. En considérant q et q' deux nombres d'onde tels que $q' - q = h \times \frac{2\pi}{a}$, où $h \in \mathbb{Z}$, expliquer pourquoi nous pouvons restreindre l'étude aux nombres d'onde q appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}\right]$.
11. Représenter graphiquement sur cet intervalle, appelé première zone de BRILLOUIN, l'évolution de la pulsation $\omega(q)$ en fonction de q .
12. Proposer un critère quantitatif permettant de fixer un domaine sur lequel la relation de dispersion $\omega(q)$ peut être linéarisée. Comparer ce critère à celui utilisé dans le cadre de l'approximation des milieux continus, mise en œuvre à la question 7. Donner alors le lien entre ω et q . À quoi correspond le facteur de proportionnalité ? On fera apparaître cette relation linéaire sur le graphique représenté en réponse à la question 11.
13. Ainsi décrite, l'onde se propageant le long du réseau cristallin peut être assimilée à une quasi-particule, appelée phonon, matérialisant la propagation d'un mode de vibration au sein du cristal induite par le mouvement collectif d'oscillation des atomes. Par analogie avec un autre domaine de la physique, nommer la particule associée à une onde également caractérisée par une relation de dispersion linéaire.

II Fonctionnement d'un transducteur piézoélectrique

Pour générer une onde acoustique dans l'air ou dans un cristal, nous utilisons un transducteur piézoélectrique dont nous allons étudier le fonctionnement dans cette partie. La piézoélectricité est une propriété électromécanique de certains matériaux. Elle correspond à l'apparition d'une polarisation électrique sous l'effet d'une contrainte sur le matériau induisant une déformation ou, inversement, à la déformation du matériau sous l'effet d'un champ électrique.

II.A Modèle électromécanique de la piézoélectricité

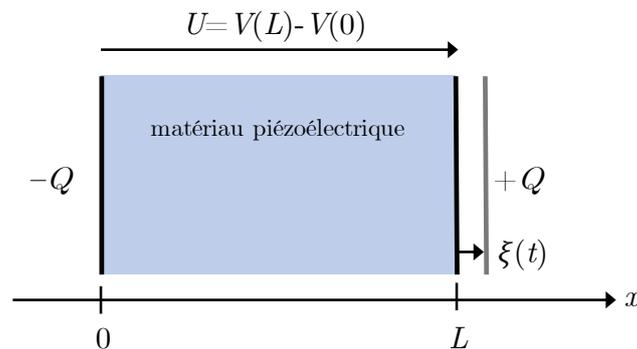


Figure 5 – Schéma d'un matériau piézoélectrique, limité par deux armatures conductrices situées en $x = 0$ et $x = L$ et respectivement chargées $-Q$ et $+Q$. L'armature placée en $x = L$ est susceptible de se déplacer et son déplacement algébrique est noté ξ .

On considère un élément de volume de matériau piézoélectrique électriquement isolant. Cet élément est limité dans l'espace par deux surfaces conductrices parallèles de section S , appelées armatures, séparées d'une distance L quand le matériau n'est soumis à aucune sollicitation mécanique ou électrique. On suppose que les deux surfaces conductrices sont deux plans identiques, de longueur et de largeur l_y et l_z , telles que $l_y, l_z \gg L$, et portant les charges totales, relatives à chacune des plaques, $+Q$ et $-Q$, comme représenté sur la figure 5. On suppose que le système $\mathcal{S} = \{\text{matériau piézoélectrique} + \text{armatures}\}$ est placé dans le vide.

Par ailleurs, le matériau peut se dilater ou se contracter sous l'influence d'une force \vec{F} . On supposera dans la suite que la force s'applique uniquement dans la direction (Ox) : $\vec{F} = F\vec{e}_x$. L'allongement algébrique résultant, noté ξ , est petit devant la longueur caractéristique du matériau au repos L ($|\xi| \ll L$). On suppose que seule l'armature portant la charge $+Q$ peut se déplacer. Elle est située en $x = L$ lorsque le matériau est au repos. L'autre armature, portant la charge $-Q$, est considérée comme fixe et choisie comme origine de l'axe (Ox) . On note $U = V(L) - V(0)$ la tension entre les deux armatures, où $V(0)$ et $V(L)$ sont les potentiels électrostatiques des armatures portant respectivement les charges $-Q$ et $+Q$. Notons que les charges $-Q$ et $+Q$ ne représentent que les charges libres accumulées sur les armatures liées à une tension appliquée entre ces dernières et ne sont pas la conséquence du caractère diélectrique (isolant) et piézoélectrique du matériau.

14. Rappeler l'équation locale de MAXWELL-GAUSS dans une zone de l'espace où il existe une distribution volumique de charges ρ . Dédurre de cette équation le théorème de GAUSS.

- Un matériau piézoélectrique peut être considéré comme un matériau diélectrique, c'est-à-dire présentant une polarisation lorsque le matériau est sollicité électriquement. En réponse à un champ électrique extérieur, une distribution locale de charges $\rho_{\text{liée}}$ se crée. Celle-ci peut alors s'ajouter à une densité volumique de charges pré-existante ρ_{libre} . Ainsi, la densité volumique de charges totale s'écrit $\rho = \rho_{\text{liée}} + \rho_{\text{libre}}$.

Un dipôle électrostatique est un ensemble de charges, négatives et positives, de charge totale nulle, disposées de telle sorte que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives. On associe alors au dipôle électrostatique un moment dipolaire, défini par $\vec{p} = q\vec{d}$ où q est la valeur absolue de la charge portée par chaque barycentre et \vec{d} le vecteur reliant le barycentre des charges négatives au barycentre des charges positives. \vec{p} est exprimé en $C \cdot m$.

En introduisant la polarisation \vec{P} qui correspond à la densité volumique de moments dipolaires $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$, il est possible d'écrire $\rho_{\text{liée}} = -\text{div}(\vec{P})$. Dans un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope et pour des champs harmoniques ou statiques, la polarisation est liée au champ électrique par $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$ où ε_r , appelée permittivité relative du matériau, est une constante supérieure à 1 qui dépend du matériau considéré. On note $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ le vecteur déplacement électrique.

15. Réécrire le théorème de GAUSS pour le déplacement électrique \vec{D} dans le milieu diélectrique.

16. On considère que le système \mathcal{S} constitué des deux armatures séparées par un matériau diélectrique matérialise un condensateur plan. On souhaite déterminer la capacité C de ce condensateur. On se place dans les conditions de l'électrostatique, c'est-à-dire que les champs ne dépendent pas du temps.

16.a) Expliquer pourquoi l'amplitude du champ \vec{D} est constante par morceaux, dans chacune des zones $x < 0$, $x \in]0, L[$ et $x > 0$, qu'on dénommera respectivement zones I, II et III. On notera D_I , D_{II} et D_{III} les composantes algébriques de \vec{D} selon \vec{e}_x dans les différentes zones.

16.b) Établir que le champ \vec{D} est nul hors du système \mathcal{S} .

16.c) Déterminer le champ \vec{D} pour x dans l'intervalle $]0, L[$.

16.d) En déduire la capacité C du condensateur en fonction de ε_r , ε_0 , S et L .

• Dans les paragraphes précédents, nous avons déterminé les propriétés électriques d'un matériau diélectrique. Nous étudions maintenant le phénomène de piézoélectricité qui caractérise le couplage entre la déformation mécanique d'un matériau et les propriétés électriques relatives à ces déformations, à l'aide d'un modèle élémentaire.

Considérons un cristal, dont la maille est hexagonale, composé d'ions électropositifs et d'ions électronégatifs régulièrement répartis et alternés, de manière à ce que la charge totale d'une maille soit nulle. En fonction de l'étirement ou de la compression, induits par l'action mécanique F , les deux barycentres des charges positives et négatives ne sont plus confondus. Dans les deux configurations, représentées en figure 6, la charge totale est nulle. On note d_{\pm} la distance entre les barycentres des charges positives et négatives au sein d'une maille déformée.

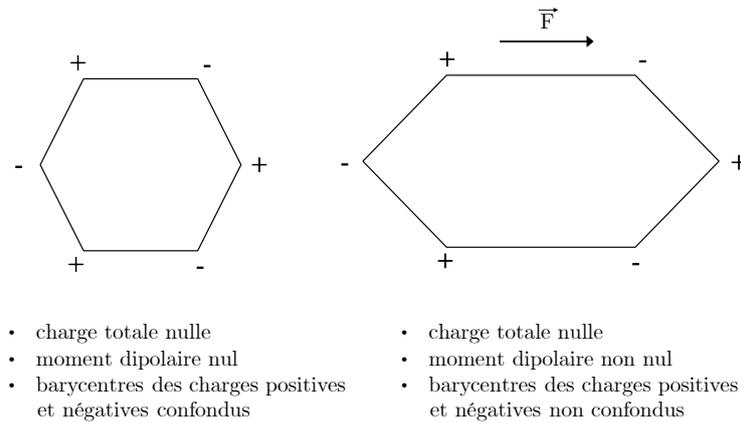


Figure 6 – **Représentation schématique de la déformation d'une maille cristalline d'un matériau piézoélectrique et apparition d'un moment dipolaire.**

17. Représenter la position des barycentres des charges positives et négatives pour la maille déformée représentée en figure 6. Exprimer, pour cette maille, la valeur absolue du moment dipolaire p_{hex} créé par l'élongation en fonction de la distance d_{\pm} et de la charge élémentaire e .

• Sous l'action d'une force F qui provoque l'allongement ξ , il apparaît une densité de moments dipolaires $\vec{P}_{\text{piézo}}$, liée à une densité volumique de charges $\rho_{\text{piézo}}$, de façon similaire à la description adoptée pour un matériau diélectrique. On admet que la polarisation totale, prenant en compte l'effet piézoélectrique et le caractère diélectrique du milieu, s'écrit alors

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} + \epsilon_0\epsilon_r \frac{\gamma\xi}{L}\vec{e}_x, \quad (10)$$

où γ est appelé coefficient piézoélectrique et dépend du matériau considéré.

18. En utilisant l'expression de \vec{P} de l'équation (10) et en reprenant le raisonnement conduit à la question 16 pour la situation illustrée sur la figure 5, déduire que la tension U entre les armatures du matériau piézoélectrique s'écrit :

$$U = \frac{Q}{C} + \gamma\xi. \quad (11)$$

Cette équation est l'équation électrique d'un matériau piézoélectrique.

• On admettra que l'équation mécanique d'un matériau piézoélectrique, donnant la force F à appliquer pour obtenir un allongement algébrique ξ et pour une charge Q s'écrit :

$$F = \gamma Q + k\xi. \quad (12)$$

19. En déduire la force de rappel qui s'exerce sur l'armature de charge $+Q$, si celle-ci présente un déplacement ξ par rapport à sa position au repos en $x = L$. De plus, la modélisation de la dissipation au sein du matériau piézoélectrique lors du mouvement de l'armature se traduit par une action mécanique $\vec{f}_\xi = -\alpha \frac{d\xi}{dt} \vec{e}_x$ qui s'exerce sur celle-ci. On suppose par ailleurs que l'armature est caractérisée par une masse effective m , qui prend en compte l'inertie du matériau piézoélectrique. Montrer alors que l'équation différentielle régissant le mouvement de l'armature se met sous la forme suivante :

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} + \alpha \frac{d\xi}{dt} + k\xi + \gamma Q = 0. \quad (13)$$

- Le système $\mathcal{S} = \{\text{armatures} + \text{matériau piézoélectrique}\}$ de la figure 5 est sollicité par une tension sinusoïdale, comme illustré figure 7. On impose entre les armatures du matériau piézoélectrique une tension sinusoïdale $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$, dont la représentation complexe est $\underline{U}(t) = U_0 \exp(i\omega t)$, avec $U_0 \in \mathbb{R}^+$. La représentation complexe de l'élongation algébrique $\xi(t)$ est donnée par : $\underline{\xi}(t) = \underline{\xi}_0 \exp(i\omega t)$, où $\underline{\xi}_0 = \xi_0 \exp(i\varphi)$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$.

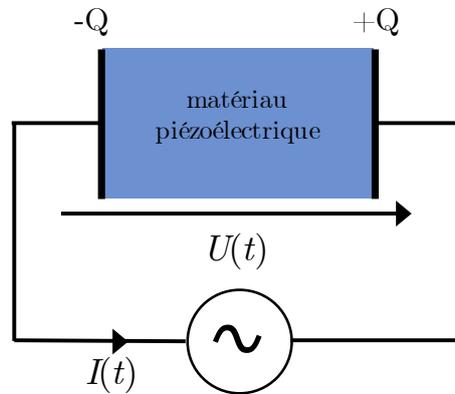


Figure 7 – Sollicitation d'un cristal piézoélectrique par une tension sinusoïdale.

20. À partir des équations (11) et (13), montrer que la fonction de transfert électromécanique du système $\underline{H}_{\text{elm}}(\omega)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{H}_{\text{elm}}(\omega) = \frac{\underline{\xi}_0}{U_0} = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i \frac{\omega}{Q_{\text{elm}}\omega_0}}, \quad (14)$$

où l'on exprimera H_0 , ω_0 et Q_{elm} en fonction des paramètres du problème. On supposera que $k > \gamma^2 C$.

21. Déterminer l'expression du module $|\underline{H}_{\text{elm}}(\omega)|$ de la fonction de transfert en fonction de H_0 , ω , ω_0 et Q_{elm} . Déterminer pour quelle valeur $\omega_m > 0$ de ω la réponse du système est maximale, en précisant la condition pour laquelle ω_m existe.
22. Dans l'approximation d'une résonance aigüe, c'est-à-dire pour $Q_{\text{elm}} \gg 1$, exprimer ω_m en fonction de ω_0 . Étudier le comportement asymptotique de $|\underline{H}_{\text{elm}}|$ pour $\omega \gg \omega_m$ et $\omega \ll \omega_m$. Représenter graphiquement la courbe $|\underline{H}_{\text{elm}}(\omega)|$. On fera apparaître les valeurs de $|\underline{H}_{\text{elm}}|$ pour $\omega = 0$ et $\omega \rightarrow \infty$, ainsi que l'ordonnée et l'abscisse du point correspondant à la résonance.
23. Comparer la courbe de la fonction de transfert électromécanique obtenue avec la courbe de la figure 2 obtenue expérimentalement. À partir de l'évaluation des paramètres expérimentaux réalisée à la question 1, discuter de l'approximation réalisée à la question 22.

II.B Modèle électrocinétique d'un transducteur piézoélectrique

Le système $\mathcal{S} = \{\text{armatures} + \text{matériau piézoélectrique}\}$ peut être étudié par une approche électrocinétique, dont le lien avec la modélisation électromécanique sera établi au paragraphe II.C. On modélise le système \mathcal{S} par un circuit électrique équivalent représenté figure 8. Le système \mathcal{S} entre les bornes A et B est alimenté par la tension sinusoïdale $U(t)$ de pulsation ω .

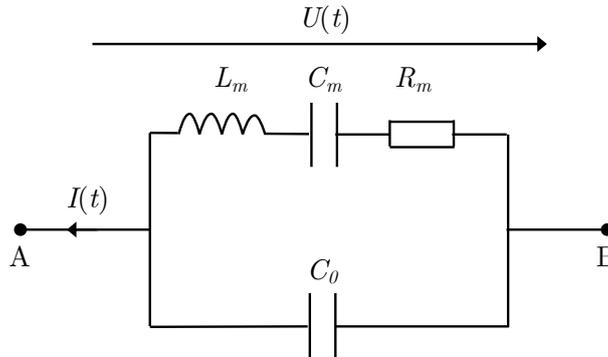


Figure 8 – Modélisation électrocinétique d'un transducteur piézoélectrique.

24. Montrer que l'impédance du dipôle électrique Z_{AB} s'écrit de la manière suivante :

$$Z_{AB} = \frac{1}{iC_0\omega} \frac{1 + iQ_r \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)}{1 + iQ_a \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)}. \quad (15)$$

On exprimera ω_r , ω_a , Q_r et Q_a en fonction de L_m , C_0 , C_m et R_m . En déduire l'expression du module $|Z_{AB}|$ de l'impédance complexe Z_{AB} .

25. En ignorant le préfacteur $1/C_0\omega$, déterminer successivement les minima du numérateur et du dénominateur de $|Z_{AB}|$ en fonction de ω . En déduire si $|Z_{AB}(\omega_r)|$ et $|Z_{AB}(\omega_a)|$ sont des minima ou des maxima de $|Z_{AB}|$.
26. L'amplitude de la tension étant fixée par la source, justifier qu'on observe une résonance concernant l'émission d'une onde sonore pour $\omega = \omega_r$ et une anti-résonance pour $\omega = \omega_a$.

II.C Lien entre le modèle électromécanique et le circuit équivalent

27. Le courant $I(t)$ représenté sur les figures 7 et 8 et $Q(t)$ la charge des armatures du matériau piézoélectrique ont pour notation complexe respectivement \underline{I} et \underline{Q} . En utilisant les équations (11) et (13), montrer que l'impédance $Z_{\mathcal{S}}$ du système \mathcal{S} peut se mettre sous la forme de l'impédance Z_{AB} du dipôle électrique AB, dont l'expression est donnée par l'équation (15).
28. Relier les paramètres électrocinétique C_0 , C_m , R_m et L_m aux paramètres électromécaniques γ , C , α , m et k .
29. Identifier le paramètre électrocinétique responsable de la dissipation dans le système. Est-ce cohérent avec le modèle électromécanique ?

III Analyseur spectral

Nous étudions dans cette partie le principe d'un modulateur acousto-optique. Le cristal peut contenir plusieurs modes de vibration, associés à plusieurs fréquences acoustiques. Le dispositif présenté

ici peut être utilisé pour analyser les modes de vibration dans un cristal excités par un transducteur piézoélectrique. Ce dispositif repose sur l'interaction entre une onde électromagnétique et les modes de l'onde acoustique dans un cristal.

III.A Interaction entre un champ électromagnétique et les phonons

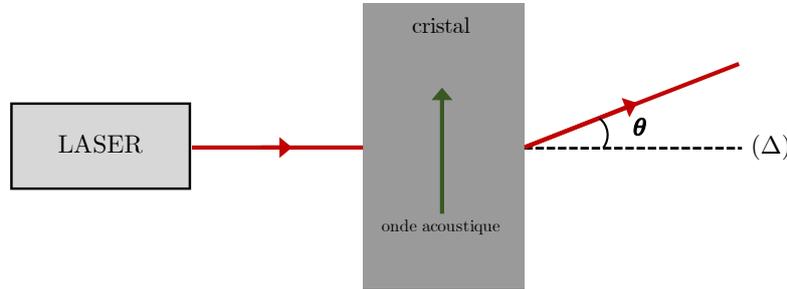


Figure 9 – Schéma de principe de l'utilisation d'un modulateur acousto-optique.

On considère le système simplifié d'un modulateur acousto-optique, présenté sur la figure 9, où une source laser illumine un cristal parcouru par une onde acoustique progressive, créée par un dispositif piézoélectrique, étudié dans la partie II.

Une onde lumineuse monochromatique de pulsation ω en incidence normale sur le cristal est matérialisée par un rayon lumineux. Le faisceau incident est issu de la source laser, parallèle à l'axe optique (Δ). À la suite de son passage dans le cristal, le faisceau lumineux est dévié d'un angle θ par rapport à l'axe optique. Cet angle dépend des propriétés du cristal et de l'onde incidente.

Pour modéliser l'interaction entre l'onde lumineuse et l'onde acoustique générée dans le cristal, nous adoptons une approche corpusculaire.

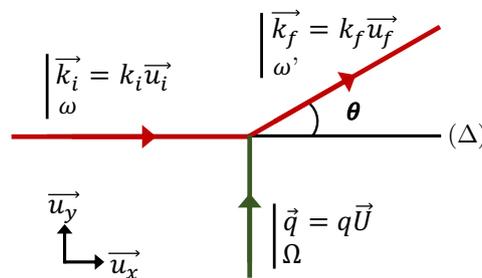


Figure 10 – Approche corpusculaire de l'interaction d'une onde électromagnétique avec une onde acoustique dans un cristal. Le vecteur d'onde et la pulsation sont rappelés pour chaque particule et quasi-particule.

★ L'onde lumineuse incidente de pulsation ω , de longueur d'onde λ et de direction de propagation \vec{u}_i peut être décrite par un flux de photons. On note alors $\vec{k}_i = k_i \vec{u}_i$ le vecteur d'onde d'un photon incident, $\mathcal{E}_i = \hbar\omega$ son énergie et $\vec{p}_i = \hbar\vec{k}_i$ sa quantité de mouvement.

★ L'onde lumineuse émergente est décrite de la même façon avec une pulsation ω' , une longueur d'onde λ' et une direction de propagation \vec{u}_f . On note alors $\vec{k}_f = k_f \vec{u}_f$ le vecteur d'onde d'un photon émergent, $\mathcal{E}_f = \hbar\omega'$ son énergie et $\vec{p}_f = \hbar\vec{k}_f$ sa quantité de mouvement.

★ L'onde acoustique dans le cristal de pulsation Ω , de longueur d'onde Λ et de direction de propagation \vec{U} peut être décrite par une quasi-particule appelée phonon, comme nous l'avons remarqué

au paragraphe I.C. On note alors \vec{q} le vecteur d'onde du phonon, $\mathcal{E} = \hbar\Omega$ son énergie et $\vec{P}_i = \hbar\vec{q}$ sa quantité de mouvement.

★ L'interaction entre l'onde lumineuse et l'onde acoustique se traduit par l'interaction entre un photon incident de quantité de mouvement \vec{p}_i et un phonon incident de quantité de mouvement \vec{P}_i pour donner un photon émergent de quantité de mouvement \vec{p}_f , comme présenté sur la figure 10. On considère que le phonon est absorbé à la suite de l'interaction avec l'onde lumineuse.

Nous supposons que les photons se déplacent dans le vide.

30. Rappeler l'expression de la relation de dispersion $k(\omega)$ pour des ondes électromagnétiques dans le vide, ici assimilées à des photons.
31. Établir la relation liant ω , ω' et Ω .
32. On souhaite déterminer la fréquence de l'onde acoustique dans le cristal. Un spectromètre optique usuel possède une résolution d'environ $\Delta\lambda_{\text{spec}} = 1 \text{ nm}$. On considère une onde acoustique de fréquence $F = 200 \text{ MHz}$ à la célérité $c_s = 1,00 \times 10^4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et la source laser émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$. Préciser à quelle couleur correspond cette longueur d'onde. Expliquer pourquoi un tel spectromètre ne permet pas de déterminer la valeur de Λ . On pourra réaliser des approximations pertinentes qui pourront être réutilisées dans la suite.
33. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement, obtenir deux relations : l'une exprimant q en fonction de k_f et θ , l'autre reliant k_i , k_f et θ .
34. Exprimer $\sin(\theta)$ en fonction de F , c_s et λ puis évaluer numériquement $\sin(\theta)$.
35. En déduire, à l'aide d'une approximation, une expression simple de θ en fonction de Λ et λ . Quel phénomène optique avons-nous modélisé ici ?

III.B Montage optique

On souhaite donc réaliser un montage optique afin d'analyser les faisceaux en sortie du cristal pour déterminer les longueurs d'onde des modes acoustiques présents dans le cristal. On se propose dans cette partie d'utiliser deux montages différents mettant en œuvre deux techniques d'analyse différentes.

III.B.a Conjugaison des angles

La première technique consiste à réaliser un montage optique pour faire correspondre les angles en sortie du cristal avec un déplacement latéral du point d'impact du faisceau dans le plan focal d'un objectif de microscope. On considère pour cela le montage présenté sur la figure 11 composé des lentilles minces convergentes (L1) et (L2) de distances focales respectives $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$ et d'un objectif de microscope équivalent à une lentille mince convergente de focale $f_{\text{obj}} > 0$. La surface de détection d'une caméra est placée dans le plan focal image de l'objectif afin d'observer le faisceau lumineux. On éclaire le cristal avec un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$ et on suppose pour simplifier qu'il existe deux modes acoustiques dans le cristal de longueurs d'onde Λ_1 et Λ_2 correspondant respectivement aux angles d'émission θ_1 et θ_2 . On considère que les deux modes acoustiques ont des longueurs d'ondes proches, telles que $\Lambda_1 = \Lambda_0 + \Delta\Lambda/2$ et $\Lambda_2 = \Lambda_0 - \Delta\Lambda/2$ avec $\Lambda_0 \gg \Delta\Lambda$.

On pourra considérer que pour tout angle α , on a $\tan(\alpha) \approx \sin(\alpha) \approx \alpha$.

36. Reproduire le schéma de la figure 11 et dessiner le chemin optique des deux rayons (traits plein et pointillés) jusqu'à la surface de détection de la caméra.
37. Le faisceau issu du cristal avec un angle θ_1 rencontre la surface de détection de la caméra au point C_1 . Exprimer la distance $F'_{\text{obj}}C_1$ en fonction de f_1 , f_2 , θ_1 et f_{obj} .

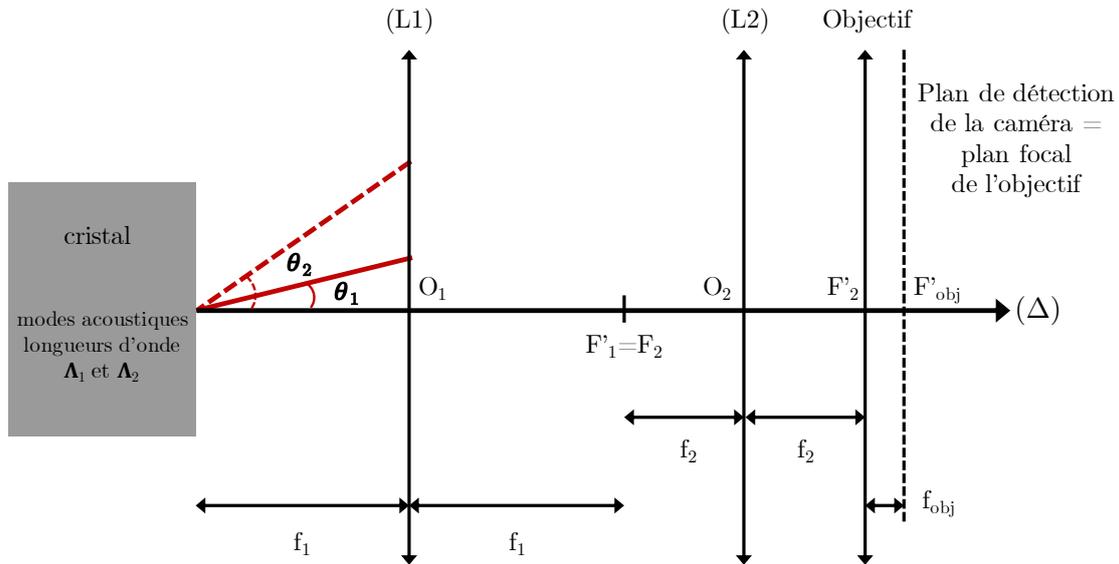


Figure 11 – Montage optique permettant la mesure des angles en sortie du cristal.

38. La taille d'un pixel de la surface de détection de la caméra est $d_{\text{pixel}} = 50 \mu\text{m}$. Les distances focales ont pour valeurs $f_1 = 500 \text{ mm}$, $f_2 = 60 \text{ mm}$ et $f_{\text{obj}} = 2,5 \text{ mm}$. Déterminer l'expression de l'écart minimal en longueur d'onde $\Delta\Lambda$ que ce montage permet de résoudre. Évaluer numériquement cette résolution. On déterminera la valeur de Λ_0 en utilisant les valeurs des paramètres de l'onde acoustique proposées à la question 32. Discuter le choix des distances focales pour augmenter la résolution.

III.B.b Superposition d'ondes lumineuses

Une autre technique consiste à observer la superposition du faisceau optique traversant le cristal avec un faisceau de référence. Le montage optique consiste à séparer en deux le faisceau issu du laser comme présenté en figure 12. Le faisceau d'intérêt va traverser le cristal (dans lequel se propage une onde acoustique de longueur d'onde Λ et de pulsation Ω) et va être ensuite recombinaison avec le faisceau de référence sur la surface photosensible d'une photodiode rapide. On considère que le faisceau de lumière de pulsation ω et de longueur d'onde $\lambda = 600 \text{ nm}$ se propageant dans le vide correspond à une onde électromagnétique, décrite par une grandeur scalaire $s(M,t) = s_0 \cos(\omega t + \phi(M))$ dont l'évolution est régie par l'équation de D'ALEMBERT, où M est un point de l'espace et $\phi(M)$ est une phase qui dépend du parcours de l'onde.

Les deux faisceaux, correspondant à des ondes électromagnétiques, sont donc décrits par les amplitudes scalaires $s_1(M,t) = s_{1,0} \cos(\omega_1 t + \phi_1(M))$ et $s_2(M,t) = s_{2,0} \cos(\omega_2 t + \phi_2(M))$. Par ailleurs, le montage optique est réalisé de sorte à avoir $s_{1,0} = s_{2,0} = s_0$ et $\phi_1(M \in \text{photodiode}) = \phi_2(M \in \text{photodiode}) = 0$.

39. En utilisant les résultats obtenus dans la partie III.A, donner l'expression de ω_1 et ω_2 en fonction de ω et Ω .
40. Expliquer pourquoi l'amplitude scalaire au point M au niveau de la surface photosensible de la photodiode s'écrit comme la somme des deux amplitudes scalaires :

$$s_{\text{tot}}(t) = s_1(M \in \text{photodiode}, t) + s_2(M \in \text{photodiode}, t). \quad (16)$$

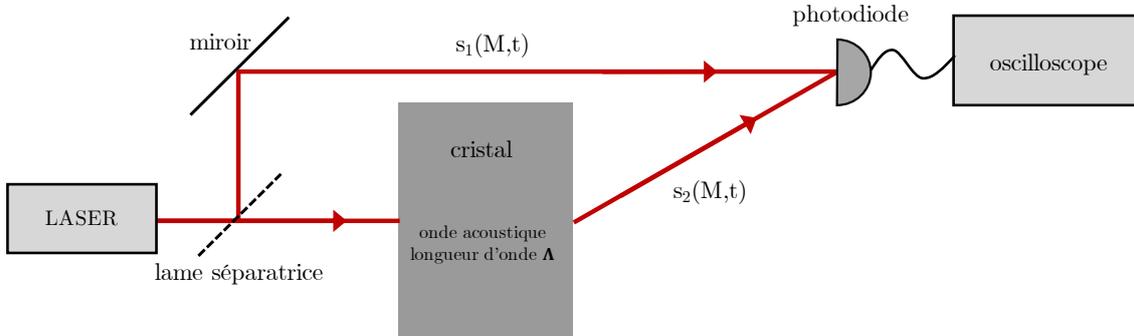


Figure 12 – Montage optique permettant de réaliser la superposition de deux ondes lumineuses.

41. La photodiode est sensible à l'intensité lumineuse $I_l(t) = |s_{\text{tot}}|^2(t)$ et a un temps de réponse de 10 ps. Expliquer pourquoi le signal observé $u(t)$ en sortie de la photodiode est proportionnel à $1 + \cos(\Omega t)$ et en déduire que ce dispositif permet de mesurer Ω .

III.C Traitement du signal obtenu

On se place dans la configuration de la partie III.B.b représentée par la figure 12. On suppose que plusieurs modes acoustiques peuvent se propager dans le cristal. Leurs fréquences sont comprises dans l'intervalle [200 ; 230] MHz. Cependant, la bande passante de l'oscilloscope vaut 100 MHz et ne permet pas d'observer convenablement le signal. Il faut donc réaliser un traitement du signal afin de pouvoir en extraire l'information recherchée. Afin d'obtenir un signal à des fréquences exploitables, on utilise le montage représenté en figure 13. On suppose dans un premier temps que seul un mode acoustique de pulsation Ω est présent dans le cristal.

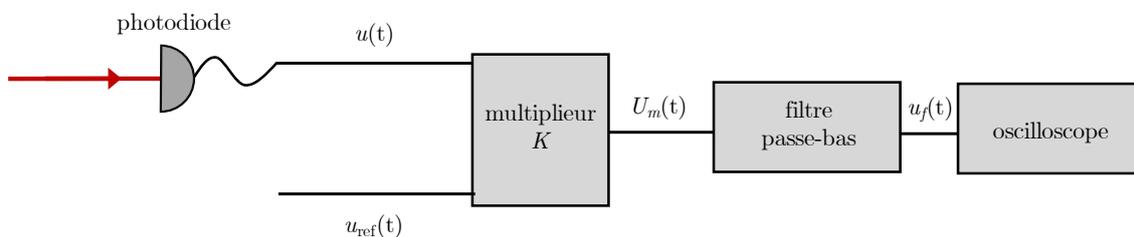


Figure 13 – Montage électronique pour réaliser le traitement du signal.

Le signal $u(t)$ en sortie de la photodiode est envoyé sur une entrée d'un multiplieur, l'autre entrée étant alimentée par un signal de référence $u_{\text{ref}}(t) = u_{\text{ref},0} \cos(\omega_{\text{ref}} t)$. Le signal en sortie du multiplieur, produit des deux signaux entrants multiplié par un facteur numérique K , est ensuite filtré à l'aide d'un filtre passe-bas puis observé sur un oscilloscope. On règle la pulsation du signal de référence pour avoir $\omega_{\text{ref}} = 2\pi \times 2,00 \times 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

42. On considère que seulement la composante alternative $u_{\text{alt}}(t)$ du signal $u(t)$ est envoyée dans le multiplieur. On écrit alors $u_{\text{alt}}(t)$ sous la forme $u_{\text{alt}}(t) = u_{\text{alt},0} \cos(\omega_{\text{alt}} t)$. Exprimer ω_{alt} en fonction de Ω . Exprimer ensuite le signal $U_m(t)$ en sortie du multiplieur en une somme de deux termes à déterminer.
43. Expliquer la valeur choisie pour ω_{ref} .

44. Le filtre réalise une fonction passe-bas du premier ordre. Réaliser un schéma d'un montage permettant de réaliser le filtrage passe-bas, utilisant deux composants passifs usuels. Proposer des valeurs réalistes des deux composants pour réaliser le filtrage souhaité.

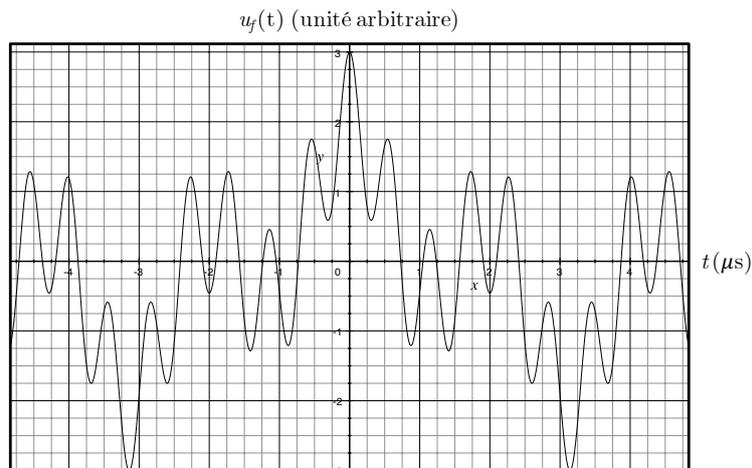


Figure 14 – Signal $u_f(t)$ observé sur l'oscilloscope.

45. Le cristal présente en réalité plusieurs modes acoustiques. Sur l'oscilloscope, on observe alors le signal représenté figure 14. Proposer un outil d'analyse pour déterminer les composantes spectrales du signal.
46. Le spectre du signal $u_f(t)$ observé sur l'oscilloscope (figure 14) est présenté figure 15. Déterminer les valeurs des fréquences des modes acoustiques dans le cristal.

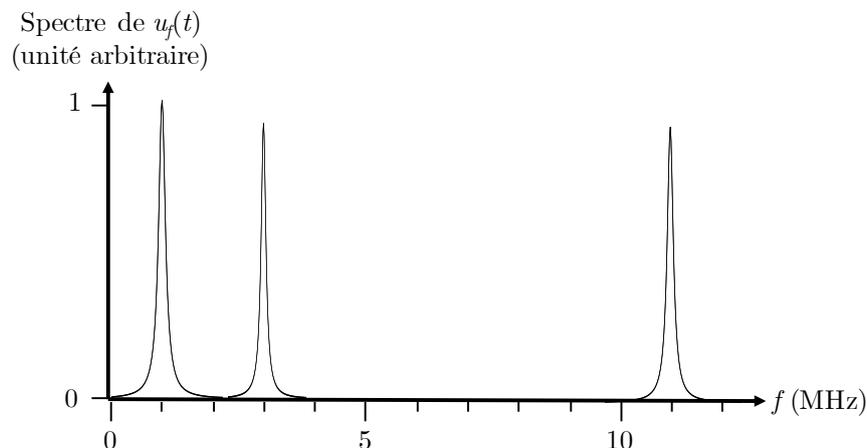


Figure 15 – Spectre du signal $u_f(t)$ présenté en figure 14.

47. Dans cette étude, nous nous sommes intéressés au fonctionnement d'un modulateur acousto-optique et nous avons utilisé les propriétés de l'interaction entre une onde acoustique et une onde lumineuse pour analyser les modes vibratoires présents au sein du cristal. Proposer une autre utilisation de la modulation acousto-optique.

* *
*