

Correction de la compilation de problèmes de concours

Révisions des écrits 2024-2025

XE PC 2010
XE PC 2016
XEULC PC 2020
XE PC 2020
XE PSI 2021

PC* Pasteur

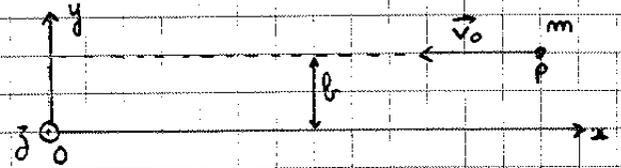
I Genèse des planètes telluriques

I.1 Accrétion de petits corps par une planète en formation

I.1.1 $\vec{L} = \vec{OP} \wedge m \vec{v}_p$

$$= \begin{vmatrix} +\infty & -v_0 \\ b & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m v_0 b \vec{u}_z$$



On retrouve bien: $b = \frac{\|\vec{L}\|}{m v_0}$ b est le paramètre d'impact.

I.1.2 La trajectoire est une conique. Puisque la particule vient de l'infini, la trajectoire est une parabole ou une hyperbole.

Conservation de l'énergie mécanique: $E = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] - \frac{G M m}{r}$

Conservation du moment cinétique: $m r^2 \dot{\theta} = m b v_0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{b^2 v_0^2}{r^2} - \frac{G M}{r}$$

A la distance minimale d'approche: $\dot{r} = 0 \Rightarrow v_0^2 = \frac{b^2 v_0^2}{r_{min}^2} - \frac{2 G M}{r_{min}}$

d'où: $b = r_{min} \left(1 + \frac{2 G M}{v_0^2 r_{min}}\right)^{1/2}$

I.1.3 La vitesse de libération correspond à la trajectoire parabolique, donc à l'énergie mécanique nulle:

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M m}{R} = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2 G M}{R}}$$

r_{min} vérifie: $r_{min}^2 + \frac{2 G M}{v_0^2} r_{min} - b^2 = 0$ ou $r_{min}^2 + \frac{v_0^2 R}{v_0^2} r_{min} - b^2 = 0$

de solution: $r_{min} = \frac{1}{2} \left[-R \frac{v_0^2}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 R}{v_0^2}\right)^2 + 4 b^2} \right]$

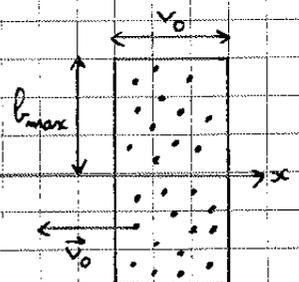
La particule heurte la planète si: $r_{min} < R$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{v_0^2 R}{v_0^2}\right)^2 + 4 b^2} < 2R + R \frac{v_0^2}{v_0^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_0^2 R}{v_0^2}\right)^2 + 4 b^2 < 4R^2 + 4R^2 \frac{v_0^2}{v_0^2} + \left(R \frac{v_0^2}{v_0^2}\right)^2$$

d'où: $b^2 < R^2 \left(1 + \frac{v_0^2}{v_0^2}\right)$

I.1.4 Les particules qui vont heurter la planète par sec. sont contenues dans le cylindre de rayon $b_{max} = R \left(1 + \frac{v_0^2}{v_0^2}\right)^{1/2}$ et de hauteur v_0



leur nombre est: $N = m \pi b_{max}^2 v_0$

donc: $N = m \pi R^2 v_0 \left(1 + \frac{2 G M}{R v_0^2}\right)$

I.1.5 Augmentation de masse de la planète: $dM = \rho \cdot 4\pi R^2 dR = N \cdot m \cdot dt$

d'où: $\frac{dR}{dt} = \frac{N \cdot m}{4\pi R^2 \rho}$ soit: $\frac{dR}{dt} = \frac{m \cdot m \cdot v_0}{4\rho} \left(1 + \frac{2GM}{Rv_0^2}\right)$

Si $v_0 \gg v_e$ $\frac{dR}{dt} \approx \frac{m \cdot m \cdot v_0}{4\rho}$
Si $v_0 \ll v_e$ $\frac{dR}{dt} = \frac{m \cdot m \cdot GM}{2\rho R v_0}$ } Dans les deux cas, R croît fortement au cours du temps.

localisation gravitationnelle: les particules "convergent" sur la planète par attraction gravitationnelle

accrétion galopante: plus dR/dt est grand, plus la masse M de la planète augmente. On plus la masse M est grande, plus dR/dt est grand d'après la formule encadrée. \rightarrow effet "boule de neige", donc phénomène "galopant"

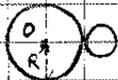
I.1.6 $M_1 > M_2$ initialement $\Rightarrow \left(\frac{dR}{dt}\right)_1 > \left(\frac{dR}{dt}\right)_2 \Rightarrow M_1$ croît plus vite que M_2

donc $\frac{M_1}{M_2}$ augmente au cours du temps. Les grosses planètes sont favorisées.

I.2 Chauffage par collision

I.2.1 Bilan d'énergie interne pour Mars: $MC \Delta T = E_c$

Calcul de E_c : état initial  astéroïde à l'infini avec une vitesse nulle $E = 0$

état final:  $E = 0 = E_c - \frac{GMm}{R+r} \Rightarrow E_c = \frac{GMm}{R+r}$

donc: $\Delta T = \frac{\frac{GMm}{R+r}}{MC} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{C(R+r)}$ avec: $R = \frac{2GM}{v_e^2} = 3,2 \cdot 10^6 \text{ m}$

A.N: $\Delta T = 200 \text{ K}$

I.2.2 D'après l'étude précédente, l'énergie cinétique des particules qui entrent en collision avec la planète est convertie en énergie interne, d'où une élévation de la température de la planète. Le rayonnement en surface permet d'évacuer une partie de l'énergie interne.

I.3 Différenciation planétaire

I.3.1 Par invariances et symétries: $\vec{g} = -g(r) \vec{e}_r$ ($g(r)$ défini > 0 par l'énergie)

Théorème de Gauss à la sphère de rayon $r \leq R$: $-4\pi r^2 \cdot g(r) = -4\pi G M_{int}$

donc: $g(r) = \frac{GM_{int}}{r^2} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho_m r$

et on a: $g_0 = \frac{4}{3}\pi G \rho_m R$

donc: $g(r) = g_0 \frac{r}{R}$

I.3.2 \vec{F} = poids + poussée d'Archimède = $-\rho_2 V g(n) \vec{u}_n + \rho_m V g(n) \vec{u}_n$

donc: $\vec{F} = (\rho_m - \rho_2) V g_0 \frac{r}{R} \vec{u}_n$

$\vec{F} = -\text{grad} E_p \Rightarrow (\rho_m - \rho_2) V g_0 \frac{r}{R} = -\frac{dE_p}{dr} \Rightarrow E_p = -(\rho_m - \rho_2) \frac{V g_0}{2R} r^2 + \text{constante}$

donc: $\Delta E_p = E_p(r=0) - E_p(r=R) \Rightarrow \Delta E_p = (\rho_m - \rho_2) \frac{V g_0 R}{2}$

A.N: $\rho_m = 5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $V = \frac{M_{Fe}}{\rho_2} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$; $\Delta E_p = -800 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

C'est comparable à une enthalpie de réaction chimique. Par exemple $\Delta H \approx -400 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour la réaction $C + O_2 \rightarrow CO_2$

I.3.3 La masse du noyau est égale au tiers de celle de la Terre, donc: $M_{\text{noyau}} = \frac{1}{3} M_{\text{terrestre}}$

$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi R_N^3 \rho_2 = \frac{1}{3} \frac{4}{3} \pi (R^3 - R_N^3) \rho_1$

$\Rightarrow (\rho_2 + \frac{\rho_1}{2}) R_N^3 = \frac{\rho_1}{2} R^3$

$\Rightarrow R_N = R \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + 2\rho_2} \right)^{1/3}$ A.N: $R_N = 3000 \text{ km}$

La pression est plus élevée dans le noyau, donc la température est aussi élevée.

II. Refroidissement par conduction

II.1 équation de la diffusion thermique: $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

II.2 $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{z}{4\sqrt{\kappa t^{3/2}}} \frac{df}{d\xi}$
 $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{df}{d\xi}$ puis $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2 f}{d\xi^2}$

donc: $\frac{z}{4\sqrt{\kappa t^{3/2}}} \frac{df}{d\xi} = \frac{\kappa}{4\kappa t} \frac{d^2 f}{d\xi^2} \Rightarrow \frac{z}{\sqrt{\kappa t}} \frac{df}{d\xi} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \Rightarrow \boxed{-2\xi \frac{df}{d\xi} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}}$

On a: $\frac{df}{d\xi} = A e^{-\xi^2}$ et $\frac{d^2 f}{d\xi^2} = -2\xi A e^{-\xi^2} = -2\xi \frac{df}{d\xi}$

$f(\xi) = A \int_0^\xi e^{-s^2} ds + B$ est donc une solution de l'équation différentielle en $f(\xi)$.

II.3 $T(z=0, t) = T_s = f(0) = B$ donc: $\boxed{B = T_s}$

$T(z, t=0) = T_c = f(+\infty) = A \int_0^{+\infty} \exp(-s^2) ds + B = A \frac{\sqrt{\pi}}{2} + T_s$ donc: $\boxed{A = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (T_c - T_s)}$

II.4 $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} A e^{-\xi^2}$ donc $\boxed{\frac{\partial T}{\partial z}(z=0) = \frac{T_c - T_s}{\sqrt{\pi \kappa t}}}$

et $(\vec{v} \cdot \vec{grad}) T_0 = v_z \frac{dT_0(z)}{dz} = v_z \frac{T_c - T_s}{a}$ donc: $\frac{DT}{Dt} \sim \frac{\partial T_1}{\partial t} + v_z \frac{T_c - T_s}{a}$

on a aussi: $\Delta T = \Delta T_0(z) + \Delta T_1 = \Delta T_1$ car $\Delta T_0(z) = 0$ d'après III.1.1

il reste: $\frac{\partial T_1}{\partial t} = K \Delta T_1 - \beta v_z$ avec: $\beta = \frac{T_c - T_s}{a}$

Les termes de diffusion thermique et de viscosité ($\nu \Delta \vec{v}$ et $K \Delta T_1$) ont un effet stabilisant par homogénéisation. Ils vont s'opposer à la convection. Les termes issus des dérivées convectives $- \alpha \vec{g} \cdot T_1$ et $-\beta v_z$ vont favoriser la convection.

III.1.3 On a: $0 = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial x}$ (Navier-Stokes projeté selon Ox)

$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} - \alpha g T_1 + \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}$ (Navier-Stokes projeté selon Oz)

$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -\beta v_z + K \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}$

En notation complexe ($\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \lambda$ et $\frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow ik$) et en simplifiant par $e^{(\lambda t + ikx)}$, ces trois équations donnent:

$C = 0$
 $\lambda A = -\alpha g B - k^2 \nu A$
 $\lambda B = -\beta A - k^2 K B$ $\Rightarrow \begin{cases} (\lambda + k^2 \nu) A + \alpha g B = 0 \\ \beta A + (\lambda + k^2 K) B = 0 \end{cases}$

Pour que ce système admette une solution $(A, B) \neq (0, 0)$, il faut que son déterminant soit nul, d'où:

$(\lambda + k^2 \nu)(\lambda + k^2 K) - \alpha \beta g = 0$

III.1.4 $\lambda^2 + \lambda(K + \nu) \frac{\pi^2}{a^2} - \alpha \beta g + \frac{\pi^4}{a^4} \nu K = 0$ en remplaçant k par $\frac{\pi}{a}$

les solutions sont: $\lambda = \frac{1}{2} \left[- (K + \nu) \frac{\pi^2}{a^2} \pm \sqrt{(K + \nu)^2 \frac{\pi^4}{a^4} - 4 \left(\frac{\pi^4}{a^4} \nu K - \alpha \beta g \right)} \right]$

La solution statique est instable si T_1 croît au cours du temps, soit: $\lambda > 0$

$\Rightarrow - (K + \nu) \frac{\pi^2}{a^2} + \sqrt{(K + \nu)^2 \frac{\pi^4}{a^4} - 4 \left(\frac{\pi^4}{a^4} \nu K - \alpha \beta g \right)} > 0$

$\Rightarrow (K + \nu)^2 \frac{\pi^4}{a^4} - 4 \left(\frac{\pi^4}{a^4} \nu K - \alpha \beta g \right) > (K + \nu)^2 \frac{\pi^4}{a^4}$

$\Rightarrow \frac{\pi^4}{a^4} \nu K - \alpha \beta g < 0$ d'où: $Ra = \frac{\alpha \beta g a^4}{\nu K} > Ra_{critique} = \pi^4$

III.1.5 Pour l'eau: $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \ll \nu_{manteau}$

A.N: $Ra = 10^8 > \pi^4$. C'est instable donc la convection est possible.

La grande étendue du système ($a = 3 \cdot 10^6 \text{ m}$) compense sa grande viscosité.

III.2 Chauffage interne

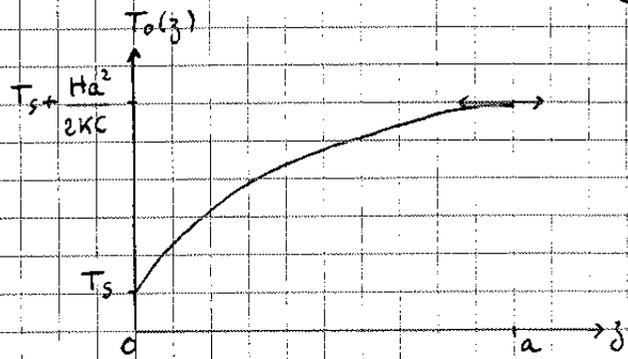
III.2.1 Avec le terme de production mécanique H , on a: $\frac{DT}{Dt} = K \Delta T + \frac{H}{C}$

En régime stationnaire: $\frac{d^2 T_0(z)}{dz^2} = -\frac{H}{\kappa C}$

solution: $T_0(z) = -\frac{H}{2\kappa C} z^2 + Az + B$

conditions aux limites: $T_0(0) = B = T_s$
 $j_{\text{th}}(a) = 0 = -\lambda \frac{dT_0(a)}{dz}$
 $\Rightarrow -\frac{H}{\kappa C} a + A = 0$

donc: $T_0(z) = \frac{H}{\kappa C} \left(az - \frac{z^2}{2} \right) + T_s$



III.2.2 Le seul terme qui change dans les équations du III.1.2 est $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) T_0 = v_z \frac{dT_0(z)}{dz}$

on a: $\frac{dT_0(z)}{dz} = \frac{H}{\kappa C} (a - z)$ donc: $\beta(z) = \frac{H}{\kappa C} (a - z)$ et $\beta\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{Ha}{2\kappa C}$

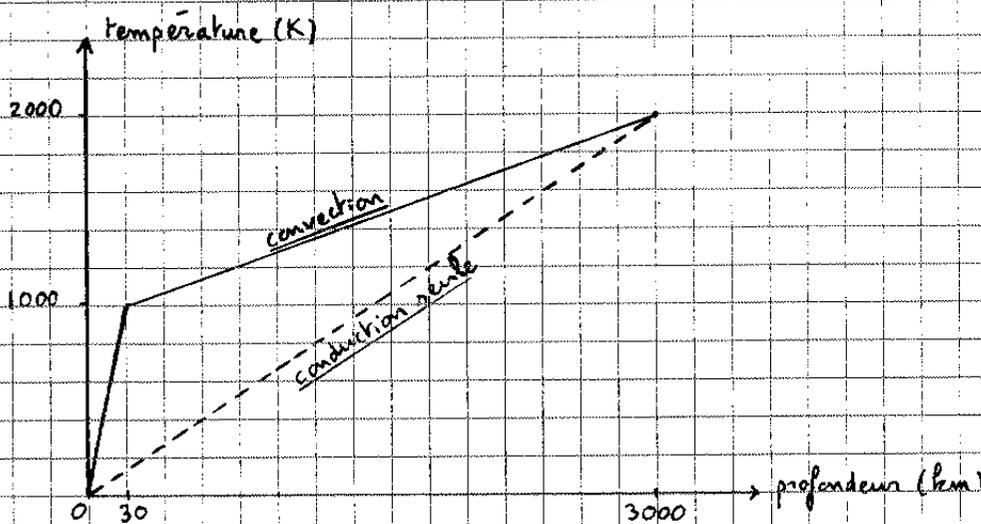
III.2.3 A.N.: $R_a = 2 \cdot 10^9 > R_{\text{critique}}$ donc le chauffage interne suffira à produire de la convection.

III.2.4 La chaleur produite par radioactivité a été importante pendant le premier milliard d'années de la formation de la Terre, donc la convection a également été importante.

III.3 Epilogue

III.3.1 La radioactivité est répartie dans tout le volume du manteau terrestre. La quantité de chaleur produite sera beaucoup plus importante que celle provenant du noyau. Le chauffage interne l'emporte sur le chauffage par le bas.

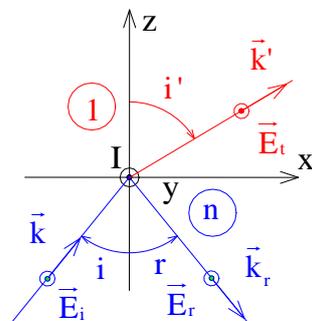
III.3.2



le gradient géothermique $\frac{dT}{dz}(a)$ est plus important lorsqu'il y a de la convection dans le manteau.

I – Onde évanescente

1) Réflexion totale si $i > i_l$ (angle i non orienté) avec $\sin i_l = \frac{1}{n}$ (question de cours de PCSI).



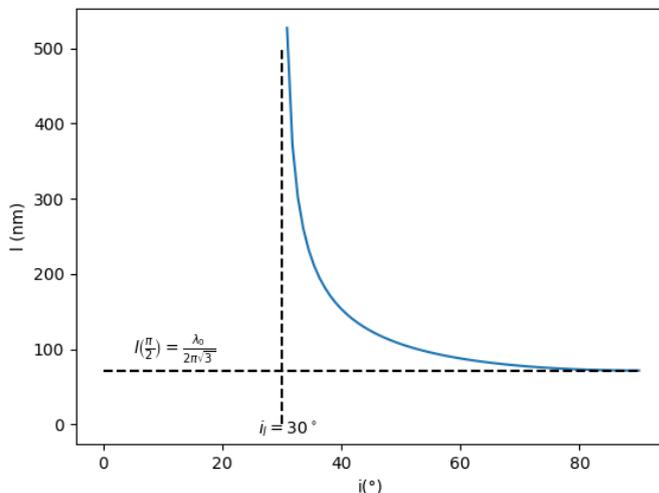
Si $n = 2$, on aboutit à $i > \frac{\pi}{6}$ rad.

2) L'énoncé dit que le champ électromagnétique est continu à l'interface (l. 30–31); nous allons l'admettre mais c'est aller un peu vite en besogne : si c'est, dans le cadre du dispositif de la figure 1, correct pour le champ magnétique \vec{B} , c'est moins évident en ce qui concerne le champ électrique \vec{E} : ce n'est valable que pour les composantes tangentiels de ce champ, et donc la continuité –ou non– du champ électrique dépendra de la polarisation de l'onde incidente. En tout état de cause, ces considérations sont clairement hors-programme.

Posons $\vec{k} \begin{vmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{vmatrix}$ (vecteur d'onde incident), $\vec{k}' \begin{vmatrix} k'_x \\ 0 \\ k'_z \end{vmatrix}$ (vecteur d'onde transmis); on posera également $\vec{k}_r \begin{vmatrix} k_x \\ 0 \\ -k_z \end{vmatrix}$ (vecteur d'onde réfléchi, en accord avec la loi de Descartes de la réflexion).

La continuité d'une composante (tangentielle) de \vec{E} à l'interface s'écrira alors par une relation de la forme $a_i e^{-ik_x x} + a_r e^{-ik_x x} = a_t e^{-ik'_x x} \quad \forall x$. La solution $a_i + a_r = a_t = 0$ pouvant en fait être exclue si l'on considère par ailleurs la continuité d'une composante du champ magnétique \vec{B} , la seule possibilité pour que cette équation soit vérifiée pour tout x est bien que $k_x = k'_x$ (et, accessoirement, on a $a_i + a_r = a_t$).

3) La longueur d'onde $\lambda = 780$ nm est vraisemblablement la longueur d'onde *dans le vide*. On notera par la suite $\lambda_0 = 780$ nm et $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$. En notant k et k' les modules respectifs de \vec{k} et \vec{k}' , on a $k^2 = n^2 k'^2$ (et $k' = \frac{2\pi}{\lambda_0}$). Soit $k^2 = n^2 (k'_x{}^2 + k'_z{}^2)$. Or $k_x = k'_x = k \sin i$. D'où $k'_z{}^2 = k^2 \left(\frac{1}{n^2} - \sin^2 i \right)$.



4) Il y aura réflexion totale si $k_z'^2 < 0$: l'onde transmise sera alors évanescente. On retrouve bien la condition de réflexion totale $\sin i > \frac{1}{n}$. Lorsqu'elle est vérifiée, la distance caractéristique de décroissance de l'onde évanescente est $l = \frac{1}{|k_z'|} = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2 i - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 i_l}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 i_l}} = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{(n \sin i)^2 - 1}}$, où l'on a noté λ_0 la longueur d'onde dans le vide du laser.

5) Pour des incidences "pas trop proches de l'angle limite", on peut considérer que $l \gtrsim \frac{\lambda}{2\pi \sin i}$, qui est bien de l'ordre de $\frac{\lambda}{2\pi}$ (l'angle i n'est pas proche de 0).

II – Rebond des atomes

6) On étudie bien sûr le régime sinusoïdal forcé. Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à un électron de l'atome (s'agit-il d'un atome d'hydrogène ?), s'écrit, avec la modélisation donnée par l'énoncé : $m\vec{a} = -m\omega_0^2\vec{r} - e\vec{E}_0 \cos(\omega t)$ (en fait, on peut montrer que, lorsque les conditions sont remplies pour que "le champ électrique \vec{E} soit uniforme à l'échelle de l'atome", alors l'action exercée par le champ magnétique \vec{B} inévitablement présent est négligeable par rapport à l'action exercée par le champ électrique \vec{E} ; mais cela est-il demandé ? On a par ailleurs bien sûr négligé le poids, mais aussi toute force dissipative qui pourrait modéliser l'émission de rayonnement par l'atome.)

Il vient alors immédiatement $\vec{r}(t) = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\vec{E}_0 \cos(\omega t)$ (comme aucune force dissipative n'est prise en compte, il n'est même pas nécessaire de passer en complexes).

D'où $\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\vec{E}_0 \cos(\omega t)$ et finalement $\alpha(\omega) = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$.

Au passage, on peut remarquer que notre résultat est en bon accord avec l'article (l. 236–240) : au voisinage de la résonance atomique (ω proche de ω_0), la polarisabilité α peut en effet atteindre des valeurs importantes, et elle devient bien négative pour $\omega > \omega_0$.

Unité de α : le m^3 (peut s'obtenir par exemple à partir de la relation de définition de la polarisabilité $\vec{p} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}$, en notant que $1\text{C} = 1\text{F}\cdot 1\text{V}$).

7) La résultante des forces subies par le dipôle induit vaut $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}$. Le programme indique que cette expression, ou celle de l'énergie potentielle, devrait être fournie.

Et donc $\vec{F} = \varepsilon_0\alpha (\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{E} = \varepsilon_0\alpha \left(\overrightarrow{\text{grad}} \frac{E^2}{2} + \text{rot}\vec{E} \wedge \vec{E} \right)$.

Le terme en $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \wedge \vec{E}$ est vraisemblablement nul en valeur moyenne temporelle et donc la force vaut, en moyenne temporelle, $\langle \vec{F} \rangle = \varepsilon_0 \alpha \overrightarrow{\text{grad}} \langle \frac{E^2}{2} \rangle$: elle dérive de l'énergie potentielle moyenne $-\frac{1}{2} \alpha \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$.

Que représente exactement $|E_0|^2$? Pourquoi un module? (aucun intérêt avec le \vec{E}_0 de la ligne 228) \vec{E}_0 est-il un vecteur réel? complexe? quelle est la polarisation de l'onde?

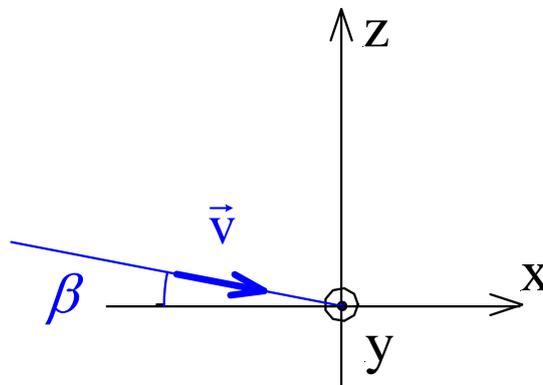
8) L'atome est alors soumis à une force moyenne $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U = +\frac{1}{2} \alpha \varepsilon_0 \overrightarrow{\text{grad}} |E_0|^2$. Comme la fréquence du laser est supérieure à la fréquence de résonance de la transition atomique ($\omega > \omega_0$), alors la polarisabilité α est négative et donc la force moyenne subie est dirigée vers les zones où le champ \vec{E} est le moins intense : l'atome est donc "réfléchi" par la surface du prisme.

9) U est en $|E_0|^2$, donc en $\exp(-2\frac{z}{l})$, donc effectivement "la barrière de potentiel croît exponentiellement lorsque l'atome s'approche de la surface du prisme".

10) Dans une vision "classique" de la question, l'atome a une énergie mécanique constante, que nous noterons \mathcal{E}_0 , au cours de son mouvement. "Loin" de la surface du prisme, cette énergie est entièrement sous forme cinétique : $E_c = \mathcal{E}_0$. Lorsque l'atome se rapproche de la surface, l'énergie cinétique E_c diminue pendant que l'énergie potentielle U augmente. Toutefois, si $\mathcal{E}_0 < U_0$, l'énergie cinétique E_c va s'annuler avant que l'atome n'atteigne la surface en $z = 0$: l'atome fait alors demi-tour (et il retrouve, loin de la surface, l'énergie cinétique \mathcal{E}_0 qu'il avait initialement).

11) U_0 est de l'ordre de 10^{-25} J (l. 53). Calculons la vitesse d'atomes de rubidium qui auraient cette énergie de 10^{-25} J, sous forme cinétique : $v = \sqrt{\frac{2U_0}{m}} = \sqrt{\frac{2U_0 N_A}{M}} \simeq 1 \text{ m.s}^{-1}$ (on ne garde qu'un chiffre significatif), ce qui est en accord avec le texte l. 55.

12) La vitesse quadratique moyenne u vérifie $\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$, soit $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3k_B T N_A}{M}} \simeq 3.10^2 \text{ m.s}^{-1}$ en prenant $T \simeq 3.10^2 \text{ K}$; on retrouve bien les valeurs mentionnées l. 55-57.



13) Apparemment, seule compte la composante de la vitesse qui est normale à la surface du prisme ; on a vu que cette composante doit être inférieure à une valeur limite, de l'ordre du mètre par seconde. Un atome ayant une vitesse thermique ordinaire a une vitesse de l'ordre de 300 m.s^{-1} . Il y a alors deux "solutions" : soit on diminue beaucoup cette vitesse thermique, en refroidissant les atomes, c'est la méthode utilisée dans la suite du texte. Soit on aurait pu envoyer les atomes sur la surface avec une incidence très rasante, pour que la composante normale ne dépasse pas l'ordre de grandeur requis.

On a $v_{\text{normale}} = u \sin \beta \simeq u \beta$ (en supposant $\beta \ll 1$, ce qui sera vérifié sans peine). Il faut donc $\beta < \frac{v_{\text{normale}}}{u} \simeq \frac{1}{300} \text{ rad}$: l'incidence est effectivement très rasante.

14) On se réfère aux l. 67-68 : "100 millions d'atomes dans une sphère d'un millimètre de diamètre", soit une densité volumique d'atomes $N \simeq \frac{10^8}{\frac{4}{3} \pi (\frac{10^{-3}}{2})^3} \simeq 2.10^{17} \text{ m}^{-3}$.

Dans l'air ambiant, et en l'assimilant à un gaz parfait, cette densité volumique peut être obtenue par $\frac{P}{k_B T} \simeq \frac{10^5}{10^{-23} \cdot 300} \simeq 3.10^{25} \text{ m}^{-3}$: elle est environ cent millions de fois plus grande ; la densité volumique

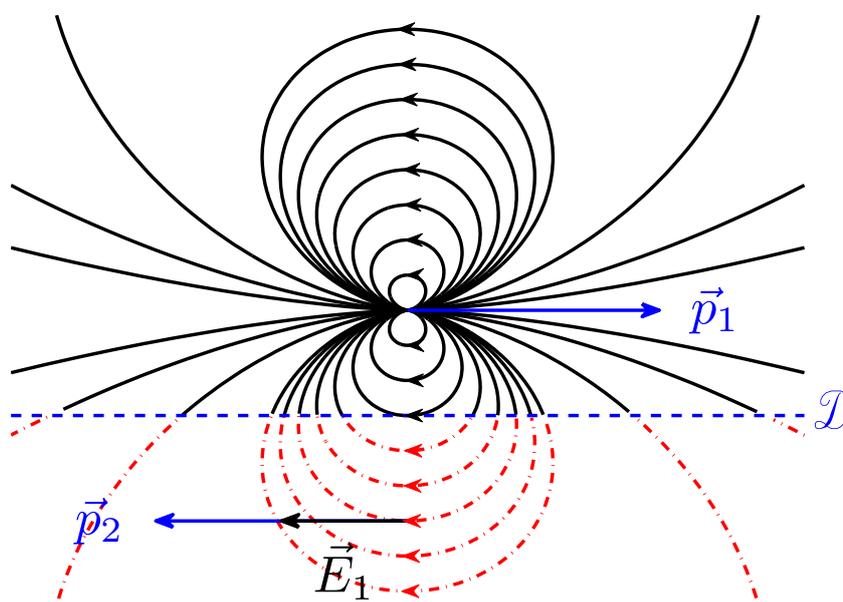
d'atomes dans le piège est donc très faible.

15) On suppose donc que les atomes froids se comportent comme un gaz parfait. Alors $P = Nk_B T$, où N est la densité volumique d'atomes évaluée précédemment. D'où, la température étant $T \simeq 10^{-5}$ K, on obtient $P \simeq 2.10^{-11}$ Pa : soit une pression très très faible par rapport à la pression atmosphérique ordinaire. D'où, vraisemblablement, la nécessité de manipuler dans un "vide" extrêmement poussé.

16) Au bout de $h = 1$ cm de chute libre, et sans vitesse initiale, les atomes atteignent la vitesse $v = \sqrt{2gh} \simeq \sqrt{0,2}$, soit entre 0,4 et 0,5 m.s⁻¹ : en accord avec ce qui est indiqué l. 72.

III – Interaction d'un atome avec une surface diélectrique.

17)



18) On considère ici un dipôle *permanent* \vec{p}_1 , placé parallèlement au plan d'une paroi diélectrique. On a représenté également le dipôle image \vec{p}_2 (l. 95–97) ; on considère également que ce dipôle est permanent. L'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles est alors $U = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1$, où l'on a noté \vec{E}_1 le champ électrique créé par le dipôle \vec{p}_1 au niveau du dipôle \vec{p}_2 . Cette énergie potentielle est négative (voir figure : \vec{p}_2 et \vec{E}_1 sont colinéaires et de même sens), et est d'autant plus grande en valeur absolue que les dipôles sont proches de la paroi : la force entre ces deux dipôles est donc attractive.

Le champ \vec{E}_1 créé par le dipôle 1 au niveau du dipôle 2 est bien en $\frac{1}{z^3}$, donc U également (les dipôles étant supposés permanents, donc en particulier indépendants de z).

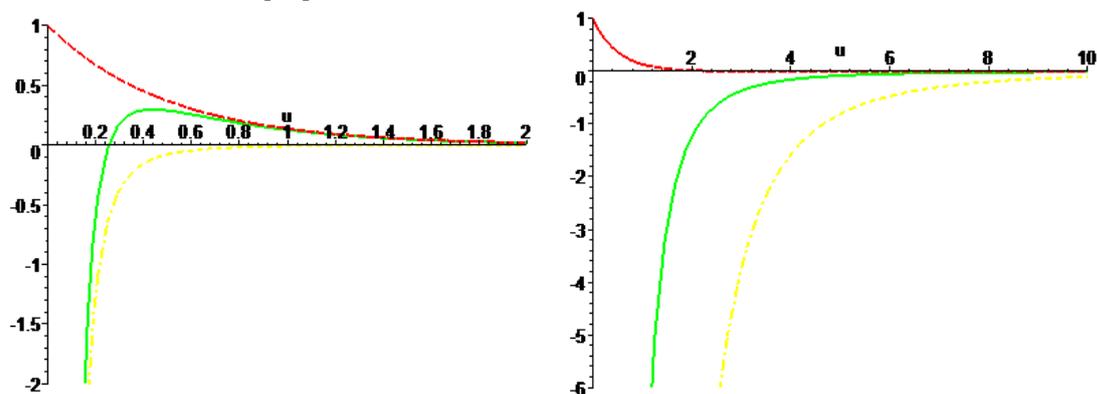
19) L'approximation évoquée dans les l. 103–108 peut être assimilée à l'ARQS : pendant le temps caractéristique $\tau = \frac{1}{\nu}$ de variation du dipôle fluctuant, les ondes électromagnétiques se propagent sur une distance $c\tau$, justement de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde optiques (puisque la fréquence caractéristique ν de fluctuation du dipôle est de l'ordre des fréquences optiques). Si la distance atome–paroi est petite devant ces longueurs d'onde, alors le dipôle n'a effectivement pas le temps de varier de manière sensible dans la durée que mettent les ondes pour se propager sur cette distance, et on peut considérer que son image a bien à tout instant la même valeur que lui (le dipôle image ne peut s'établir qu'avec un "retard" égal au double de la durée de propagation des ondes de l'atome jusqu'à la paroi).

20) Les atomes semblent s'approcher de la paroi jusqu'à une distance de l'ordre de la centaine de nanomètres (l. 86). Cette distance ne vérifie qu'imparfaitement la condition précédente : elle est

effectivement inférieure aux longueurs d'onde optiques, mais pas tant que cela (facteur de 5 à 10 environ).

21) L'interaction de van der Waals est attractive donc $A > 0$. Pour $z \rightarrow 0$, c'est le potentiel de van der Waals qui l'emporte et $U \sim -\frac{A}{z^3}$. Pour $z \rightarrow \infty$, c'est aussi le potentiel de van der Waals qui l'emporte et $U \sim -\frac{A}{z^3}$.

22) $\left[\frac{A}{z^3}\right] = [U_0]$, donc $\left[\frac{A}{U_0}\right] = L^3$. D'où la quantité sans dimension demandée $\delta = \frac{A}{U_0 l^3}$.



23) On peut mettre le potentiel total sous la forme $U = U_0 \left(\exp\left(-\frac{2z}{l}\right) - \delta \left(\frac{l}{z}\right)^3 \right)$.

Sur les figures ci-dessus, on a tracé $\frac{U}{U_0}$ en fonction de $u = \frac{z}{l}$; la figure de gauche correspond à $\delta = 0,01$ et celle de droite à $\delta = 10$. La contribution dipolaire est en rouge, celle de van der Waals en jaune, et la somme est en vert.

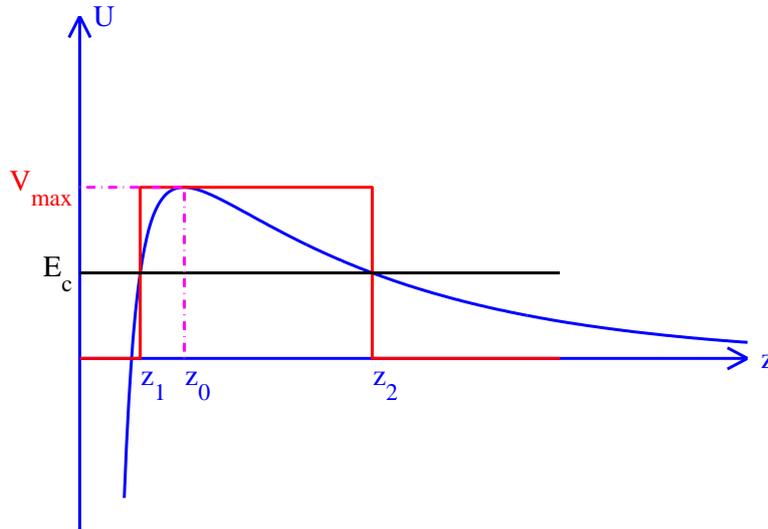
On peut remarquer que, en $z = l$ (soit à l'abscisse $u = 1$ sur les figures ci-dessus), le rapport du potentiel de van der Waals au potentiel dipolaire vaut $\delta \cdot e^2$ en valeur absolue.

La figure 2 de l'énoncé à droite correspond au cas $\delta \ll 1$ (se rapproche de la figure de gauche ci-dessus).

24) La valeur maximale (que l'énoncé note V_{max}) du potentiel total est égale à l'énergie cinétique des atomes incidents, qui vaut mgh (après une chute libre d'une hauteur h , sans vitesse initiale). On a donc $mgh = -\frac{A}{z_0^3} + U_0 \exp\left(-\frac{2z_0}{l}\right)$, où z_0 est la position du maximum de $U(z)$, et s'obtient donc comme solution de l'équation $\frac{dU}{dz}(z) = 0$.

25) Il s'agit probablement de la réflexion totale frustrée. [Toutefois, il n'est nulle part question dans le texte de ce phénomène, qui est par ailleurs totalement hors-programme.](#)

26)



On peut prendre pour largeur a de la barrière la distance entre les deux positions z_1 et z_2 où $U = E_c$, et comme hauteur V_{max} (voir figure ; on surestime ce faisant la barrière de potentiel et donc on obtiendra une valeur de T inférieure à la valeur réelle).

27) On effectue un développement limité à l'ordre 2 de $U(z)$ au voisinage de son maximum, situé en $z = z_0$: $U(z_0 + \varepsilon) \simeq V_{max} + \frac{\varepsilon^2}{2}U''(z_0)$.

Or $U(z_0 + \varepsilon_1) = U(z_0 + \varepsilon_2) = E_c$, avec $z_1 = z_0 + \varepsilon_1 < z_0$ et $z_2 = z_0 + \varepsilon_2 > z_0$. D'où $E_c = V_{max} + \frac{\varepsilon_1^2}{2}U''(z_0) = V_{max} + \frac{\varepsilon_2^2}{2}U''(z_0)$. On en déduit $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{2(V_{max} - E_c)}{-U''(z_0)}}$ (on signale que l'on a bien $U''(z_0) < 0$). Et donc on obtient la largeur a de la barrière lorsque l'énergie cinétique E_c est juste inférieure à V_{max} : $a = 2\varepsilon_2 \simeq 2\sqrt{\frac{2(V_{max} - E_c)}{-U''(z_0)}}$.

Si l'on prend une hauteur de barrière égale à V_{max} , on aboutit alors à une probabilité de transmission par effet tunnel $T \simeq \exp\left(-\frac{8}{\hbar}(V_{max} - E_c)\sqrt{\frac{m}{-U''(z_0)}}\right)$.

Remarque : l'article indique plutôt, contrairement à l'énoncé, que l'on n'observe pas l'effet tunnel. Déterminons donc la largeur (en énergie) de la zone de transition dans laquelle on devrait, en théorie, observer cet effet tunnel. Si nous nous fixons comme critère, forcément arbitraire, $T > \frac{1}{1000}$ comme frontières de cette zone, alors on résout $\exp\left(-\frac{8}{\hbar}(V_{max} - E_c)\sqrt{\frac{m}{-U''(z_0)}}\right) > \frac{1}{1000}$, qui mène à $V_{max} - E_c < \frac{3 \ln 10}{8} \hbar \sqrt{\frac{-U''(z_0)}{m}}$, soit une largeur caractéristique, en énergie, de l'ordre de $\hbar \sqrt{\frac{-U''(z_0)}{m}}$.

IV – Mesure des rugosités de surface.

28) Il s'agit ici de l'amplitude *complexe*. L'onde évanescente résultant du faisceau laser incident a une amplitude complexe en $e^{i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})}$, avec $\vec{k}' \begin{cases} k'_x = k_x \\ 0 \\ \pm \frac{i}{l} \end{cases}$, donc une amplitude complexe en $e^{-\frac{z}{l}} e^{i(\omega t - k_x x)}$; on peut choisir arbitrairement un préfacteur d'amplitude égal à 1.

L'amplitude complexe de l'onde évanescente résultant du faisceau laser réfléchi vaudra alors, à un éventuel facteur de phase près, $\sqrt{R} e^{-\frac{z}{l}} e^{i(\omega t + k_x x)}$.

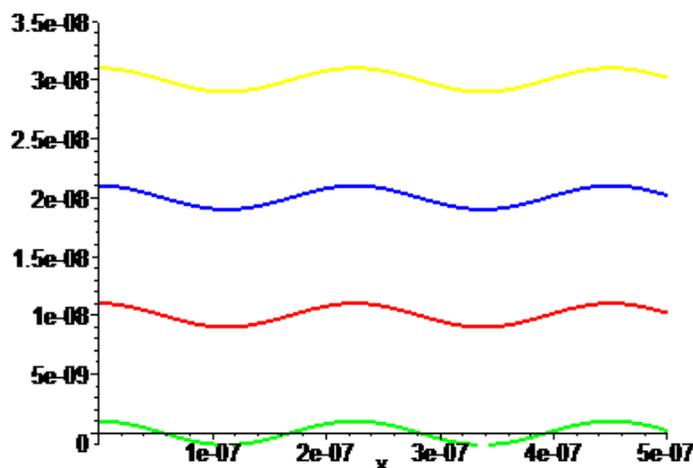
29) L'onde totale résultante a alors une amplitude complexe de la forme $e^{-\frac{z}{l}} [e^{-ik_x x} + \sqrt{R} e^{ik_x x}]$ (on

omet le $e^{i\omega t}$).

Et donc le potentiel répulsif, proportionnel au carré du module de l'amplitude complexe précédente, peut s'écrire $U = \text{cte.}e^{-2\frac{z}{l}} \left(1 + R + \sqrt{R} (e^{2ik_x x} + e^{-2ik_x x})\right)$, ou encore $U(x, z) = U_1 e^{-2\frac{z}{l}} [1 + \varepsilon \cos(2k_x x)]$, avec $\varepsilon = \frac{2\sqrt{R}}{1+R}$.

30) Une équipotentielle se définit par $U(x, z) = \text{cte.}$, soit $e^{-2\frac{z}{l}} = \frac{\text{cte.}}{1 + \varepsilon \cos(2k_x x)} \simeq \text{cte.}(1 - \varepsilon \cos(2k_x x))$ si $\varepsilon \ll 1$. On aboutit alors à l'équation cartésienne approchée des équipotentielles : $z \simeq \text{cte.} - \frac{l}{2} \ln(1 - \varepsilon \cos(2k_x x)) \simeq \text{cte.} + \frac{\varepsilon l}{2} \cos(2k_x x)$.

La figure qui suit a été tracée avec $\varepsilon = 0,023$ et $i = 60^\circ$; la constante varie par pas de 10^{-8} ; on observe que la profondeur est faible devant la période des oscillations.



31) La profondeur (crête à crête) des équipotentielles vaut alors, dans cette approximation, $\varepsilon l = \frac{2\sqrt{R}}{1+R} l$.

32) $\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} = \frac{2\pi\hbar}{mv}$. Pour les atomes de rubidium, dont la vitesse v vaut $0,5 \text{ m.s}^{-1}$, cette longueur d'onde vaut 1.10^{-8} m , en accord avec la l. 184.

33) La profondeur de modulation vaut ici $\varepsilon l = 0,023l$, avec l de l'ordre de $\frac{\lambda_0}{2\pi n} \simeq 6.10^{-8} \text{ m}$. D'où une profondeur de modulation de l'ordre de 1 nm, environ 10 fois plus petite que la longueur d'onde de de Broglie des atomes de rubidium. La légende de la figure 3 nous indique que "une onde de de Broglie subit une forte diffraction si λ_{dB} est de l'ordre de la profondeur de modulation" : on peut vraisemblablement considérer que cette condition est remplie.

34) Si $R \ll 1$, ce qui est le cas ici, alors $\varepsilon \simeq 2\sqrt{R}$, soit $R \simeq \frac{\varepsilon^2}{4}$. Ici, $\varepsilon = 0,023$, d'où $R \simeq \frac{0,023^2}{4} \simeq 1.10^{-4}$, en accord avec la l. 186.

35) On a $\sin \theta = \frac{p_x}{p}$, où θ est l'angle de diffraction recherché. Or $|p_x|$ vaut $2\hbar k_x$ ou $4\hbar k_x$, avec $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin i = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \sin i$, et $p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_{dB}}$, avec $\lambda_{dB} = 8 \text{ nm}$. D'où $\sin \theta = \pm \frac{2n \sin i}{\lambda_0} \lambda_{dB} = \pm \frac{8}{195} \sin i$, ou le double. Si on prend, par exemple, $i = 60^\circ$ (comme à la question 30), cela nous donne des angles de $\pm 2^\circ$ et $\pm 4^\circ$ (mais qui, d'après la légende de la figure 3, ne sont pas résolus).

Ondes de gravité dans un fluide

1 Ondes de surface

1. Le cylindre, de volume V , est soumis à son poids $-\rho_c V g \vec{u}_y$ et à la poussée d'Archimède due à l'eau, égale à $+\rho \frac{V}{2} g \vec{u}_y$ puisque le cylindre est à moitié immergé. À l'équilibre, ces deux forces se compensent, ce qui conduit à $\boxed{\rho_c = \frac{\rho}{2}}$.

Remarque : on néglige la poussée d'Archimède due à l'air puisque la masse volumique de l'air est environ 1000 fois plus faible que celle de l'eau.

2. ω_0 est une pulsation donc $[\omega_0^2] = T^{-2}$.

Il y a cinq grandeurs physiques a priori pertinentes dans ce problème : g, L, D, ρ et ρ_c . De manière plus précise :

- la nature des fluides intervient via le rapport adimensionné $\frac{\rho}{\rho_c}$, puisque la masse n'apparaît pas dans la dimension de ω_0^2 , mais comme il a été fixé à 2 d'après la question précédente on ne s'en préoccupera pas dans la suite;
- la pulsation dépend forcément du champ de pesanteur g puisqu'il intervient dans les deux forces agissant sur le cylindre, et comme d'un point de vue dimensionnel le temps n'apparaît que dans g (on rappelle que $[g] = LT^{-2}$) : $\omega_0^2 \propto g$;
- les dimensions géométriques du cylindre sont L et D ; pour former une pulsation au carré, il faut diviser g par une longueur, donc toute combinaison de L et D ayant cette dimension convient a priori : nous choisissons de prendre simplement D dans la suite car toutes les quantités qui interviennent dans les équations sont proportionnelles à L , cette grandeur va donc s'éliminer.

On peut proposer : $\boxed{\omega_0^2 \propto \frac{g}{D}}$.

3. La variation du volume immergé δV_{im} est représentée par le volume rouge et bleu sur la figure 1. L'intuition nous dit que l'aire représentée en rouge et en bleu est égale à deux fois celle du rectangle $GHCA$, au premier ordre en $\frac{u}{R}$, donc que la variation du volume immergé est : $\delta V_{\text{im}} = -2LRu = -LDu$ (si $u > 0$, le volume immergé est plus grand qu'à l'équilibre).

Mais l'intuition ne suffit peut-être pas. Justifions-le : l'aire jaune est inférieure à celle du triangle rectangle ABC , la longueur $\delta = BC$ est telle que $\frac{\delta}{R}$ est d'ordre 2 en $\frac{u}{R}$ puisque le cercle est tangent à AC en A . Donc l'aire jaune est d'ordre 2 en $\frac{u}{R}$ et c'est exactement la différence entre l'aire du rectangle $GHCA$ et la moitié de l'aire recherchée.

L'expression $\boxed{\delta V_{\text{im}} = -LDu}$ est donc bien l'expression cherchée, au premier ordre en $\frac{u}{R}$.

Remarque : sans approximation, l'aire recherchée est égale à l'aire rouge, $2 \times \theta \frac{R^2}{2}$, plus l'aire bleue, $2 \times \frac{1}{2} |u|v$ où $v = HB = R \cos \theta$ et $|u| = R \sin \theta$.

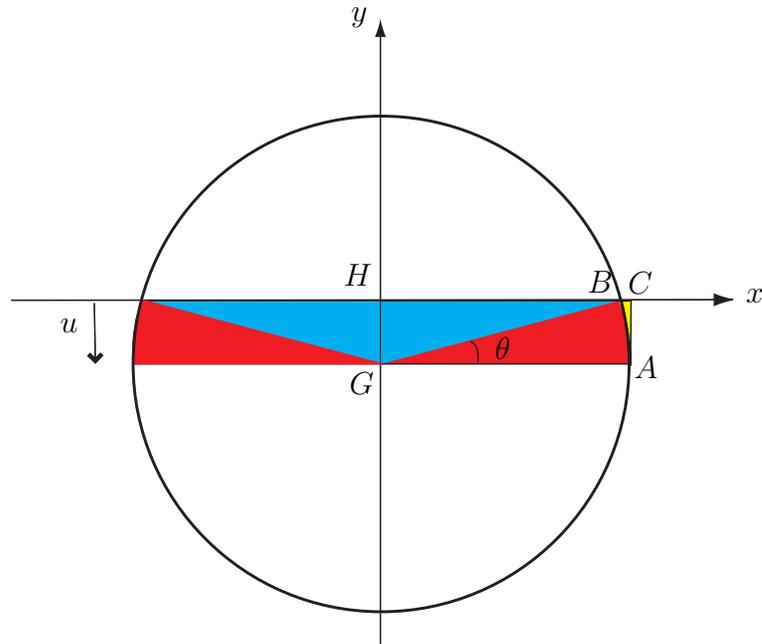


FIGURE 1 – Variation du volume immergé par rapport à la situation d'équilibre.

D'où :

$$\delta V_{\text{im}} = LR^2 \left(\arcsin \left(\frac{-u}{R} \right) - \frac{u}{R} \sqrt{1 - \frac{u^2}{R^2}} \right).$$

Au premier ordre en $\frac{u}{R}$, on obtient bien :

$$\delta V_{\text{im}} = LR^2 \left(\frac{-u}{R} - \frac{u}{R} \right) = -2LRu = -LDu.$$

4. Le bilan des forces subies par le cylindre est le même qu'à la première question : poids et poussée d'Archimède. La loi de la quantité de mouvement appliquée au cylindre dans le référentiel d'étude et projetée sur (Oy) donne :

$$\rho_c \pi \frac{D^2}{4} L \frac{d^2 u}{dt^2} = -\rho_c \pi \frac{D^2}{4} L g + \rho \underbrace{(V_{\text{im},0} - LDu)}_{\text{volume immergé}} g,$$

en notant $V_{\text{im},0}$ le volume immergé à l'équilibre. Les deux premiers termes du membre de droite s'éliminent (condition d'équilibre), donc il reste, sachant que $\frac{\rho}{\rho_c} = 2$:

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{8g}{\pi D}.}$$

On retrouve bien que $\omega_0^2 \propto \frac{g}{D}$.

$$5. f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{8g}{\pi D}}.$$

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{\pi D}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2 \times 9,8}{\pi \times 0,15}} \\
 &\simeq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{20}{0,5}} \simeq \frac{1}{\pi} \sqrt{40} \\
 &\simeq \frac{6}{3}
 \end{aligned}$$

Donc : $f_0 \simeq 2 \text{ Hz}$.

Remarque : f_0 est légèrement supérieur à 2 Hz, mais sans calculatrice, il semble difficile de donner plus de 1 CS.

6. On mesure une période sur la courbe expérimentale (il est difficile d'en mesurer 2), en privilégiant le passage à zéro :

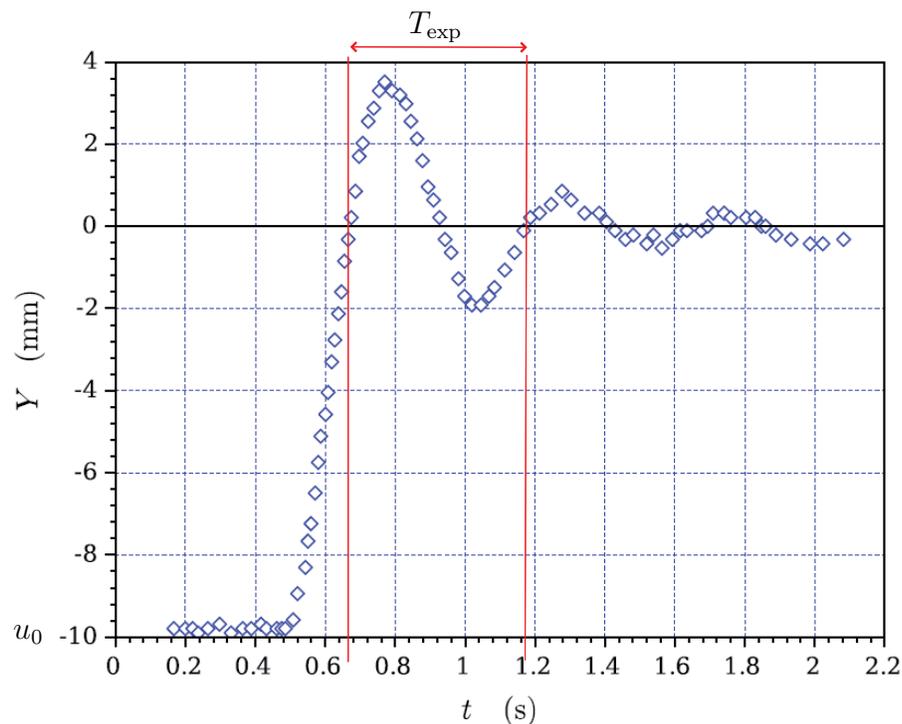


FIGURE 2 – Exploitation de la figure 2.

On mesure : $T_{\text{exp}} \leftrightarrow 21 \text{ mm}$ alors que $1 \text{ s} \leftrightarrow 43 \text{ mm}$ (ces mesures comme toutes les suivantes ont été faites sur le sujet original).

On en déduit : $T_{\text{exp}} = \frac{21}{43} \simeq 0,5 \text{ s}$, soit une pseudo-période : $f_{\text{exp}} \simeq 2 \text{ Hz}$.

Remarque : T_{exp} est légèrement supérieure à 0,5 s donc f_{exp} est légèrement inférieure à 2 Hz.

La position d'équilibre est ici $Y_0 = 0$, donc la lecture de Y donne directement la valeur de u .

On lit $u_0 \approx -10 \text{ mm}$.

On peut estimer le facteur de qualité par le nombre d'oscillations visibles avant l'arrêt du système (puisque'on cherche une estimation approximative!), donc : $Q \simeq 2 \text{ ou } 3$.

Remarque : On pourrait aussi passer par le décroissement logarithmique mais c'est plus long et ça ne semble pas être l'esprit de la question.

7. La fréquence des oscillations est quasiment identique à la fréquence propre. Elle est cependant légèrement inférieure : c'est normal pour un oscillateur amorti, $f = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

8. L'expression du nombre de Reynolds est : $Re = \frac{VD}{\nu}$ où V est une vitesse caractéristique de l'écoulement de l'eau. D est ici l'échelle de longueur pertinente et ν est la viscosité cinématique de l'eau. En effet, la présence du cylindre modifie l'écoulement sur des dimensions de l'ordre de D principalement dans la direction (Ox) puisque le canal est supposé de même longueur que le cylindre. Il faut déterminer l'ordre de grandeur de V .

Sur la figure on estime que la vitesse maximale du cylindre est de l'ordre de 10 mm en 0,1 s soit $\simeq 0,1 \text{ m.s}^{-1}$. On peut donc proposer une vitesse caractéristique V de l'eau de l'ordre de quelques cm.s^{-1} . Une autre façon de voir consiste à dire que l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement est $u_0 f_0$, soit environ 2 cm.s^{-1} .

On en déduit :
$$Re = \frac{0,02 \times 0,15}{10^{-6}} = 3 \times 10^3$$

La force de traînée est donc quadratique.

Remarque : au fur et à mesure que le mouvement du cylindre est amorti, sa vitesse diminue donc celle de l'écoulement de l'eau aussi. Le nombre de Reynolds diminue avec le temps.

9. Cette valeur du nombre de Reynolds correspond au début de la zone pour laquelle la force de traînée est quadratique en la vitesse du cylindre : $\vec{F}_T = -\frac{1}{2}\rho S C V^2 \vec{u}_y$ (sens opposé à celui de la vitesse), où S est le maître-couple, à savoir ici $S = DL$ et $\tilde{C} \simeq 0,5$.

Finalement :
$$\vec{F}_T = -\frac{1}{2}\rho DLCV^2 \vec{u}_y$$

10. Le rapport demandé est $K_{TR} = \frac{\frac{1}{2}\rho DLCV^2}{\rho DL \tilde{u} g}$ où \tilde{u} est le déplacement caractéristique du cylindre, ce qui donne :
$$K_{TR} \simeq \frac{V^2}{g \tilde{u}}$$

11. $V \simeq 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$, $\tilde{u} \simeq 1 \text{ cm}$. On estime alors :
$$K_{TR} \simeq \frac{10^{-4}}{10 \times 10^{-2}} = 10^{-3} \ll 1$$
 La force de traînée est bien trop faible par rapport à la force de rappel pour expliquer l'amortissement relativement important observé sur la figure 2.

12. Ces lignes obliques correspondent à une déformation de la surface libre (vaguelettes) qui se propage en s'écartant du cylindre : ce sont les ondes de surface étudiées dans la suite.

13. Les oscillations du flotteur donnent naissance à ces ondes de surface. On peut estimer qu'il y a eu un aller-retour du cylindre entre deux « creux » en surface, mieux visibles que les bosses, et on peut en utiliser deux ce qui améliore la précision (cf. figure 3). D'autre part la légende de la figure 3 de l'énoncé donne l'échelle de temps : 62 mm pour 3 s. On mesure $\Delta T = 22 \text{ mm}$ pour deux oscillations, soit environ 1 seconde. La période est donc d'environ 0,5 s, soit $f'_{\text{exp}} \simeq 2 \text{ Hz}$, ce qui est cohérent avec les observations de la figure 2 et les résultats de la question 6.

14. On estime la distance entre deux creux sur la photo précédente que l'on mesure à 50 mm, l'échelle fournie est par le diamètre du cylindre (10 mm pour 15 cm), ce qui donne :

$$\lambda_{\text{exp}} \simeq \frac{50}{10} \times 15 \simeq 75 \text{ cm}.$$

Remarque : la lecture est difficile ...

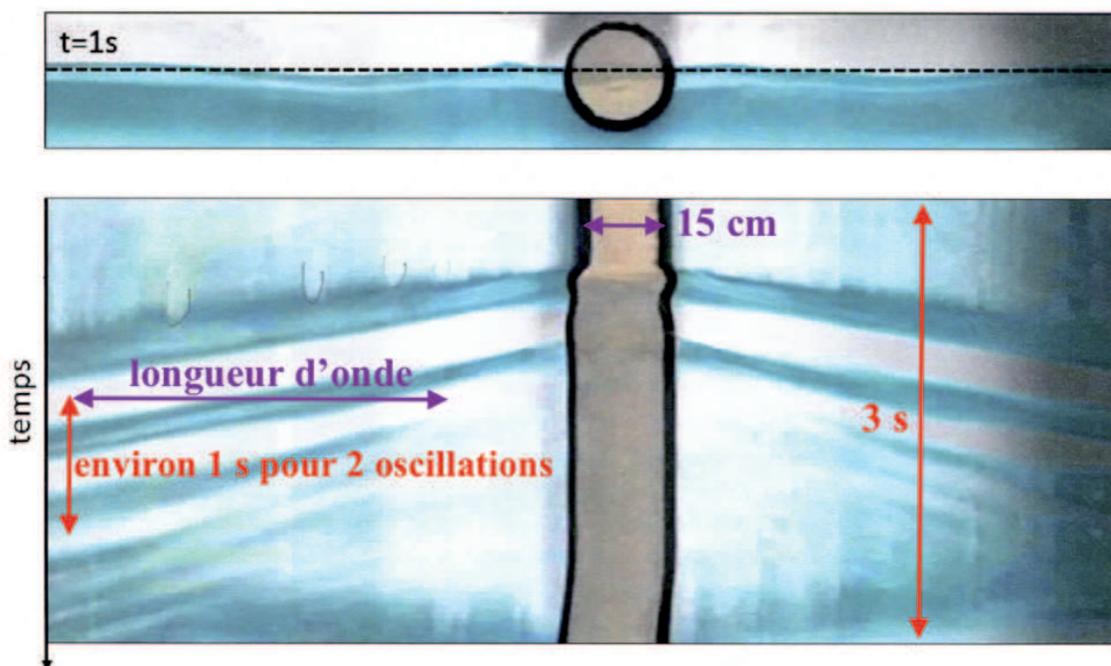


FIGURE 3 – Lecture de la fréquence des oscillations du flotteur et de la longueur d’onde des ondes de surface.

15. On en déduit $c_{\text{exp}} = \lambda_{\text{exp}} f'_{\text{exp}} \simeq 1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

16. La relation de dispersion donnée est : $\omega^2 = gk \tanh(kH)$. On détermine les comportements asymptotiques :

- pour $kH \gg 1$, $\tanh(kH) \sim kH$ donc : $\omega \sim \sqrt{gk}$;
- pour $kH \ll 1$, $\tanh(kH) \sim 1$ donc : $\omega \sim \sqrt{gHk}$.

L’allure de la fonction $\omega(k)$ est donnée par la figure 4.

17. Le milieu peut être considéré comme non dispersif lorsque la vitesse de phase $v_{\varphi} = \frac{\omega}{k}$ est indépendante de k : cela correspond à $kH \ll 1$ (eau peu profonde).

18. La vitesse mesurée est une **vitesse de groupe** car l’onde engendrée par le mouvement du cylindre est un paquet d’onde. En effet, le mouvement du cylindre n’étant pas purement sinusoïdal, il comporte plusieurs fréquences.

19. Dans le cas d’une eau peu profonde, comme $\omega \sim \sqrt{gHk}$, on en déduit la vitesse de groupe, égale à la vitesse de phase ici : $c = \sqrt{gH} \simeq 1,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, ce qui est cohérent avec la mesure de la question 15.

Remarque : $H = 20 \text{ cm}$, $\lambda_{\text{exp}} \simeq 80 \text{ cm}$ donc $kH = \frac{2\pi H}{\lambda_{\text{exp}}} \simeq \frac{\pi}{2} \simeq 1,6$ ce qui n’est pas $\ll 1$. Mais on voit sur la figure 4 que la courbe $\omega(k)$ reste confondue avec la droite $\omega = \sqrt{gH} k$ jusqu’à des valeurs proche de 2,5. *Ce n’est pas évident de s’en rendre compte sans calculatrice.*

20. *Remarquons que l’énoncé est passé de ω_0 à Ω_0 .*

L’énergie potentielle de pesanteur volumique est ρgy à une constante près. L’énergie potentielle

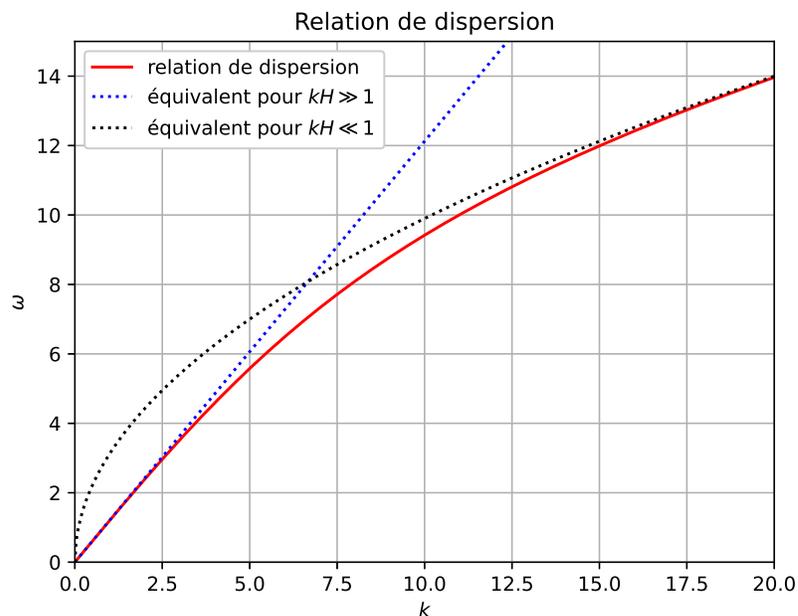


FIGURE 4 – Relation de dispersion des ondes de surface et comportements asymptotiques.

de l'eau sur une largeur λ selon (Ox) est :

$$E_p = E_p(\text{repos}) + \int_{x=0}^{\lambda} \int_{y=0}^{h(x,t)} \rho g y \times L dx dy .$$

On choisit l'énergie potentielle nulle au repos. Il vient :

$$\begin{aligned} E_p &= \rho g L \int_{x=0}^{\lambda} \frac{1}{2} h^2(x,t) dx \\ &= \rho g L \frac{1}{2} A^2 \underbrace{\int_{x=0}^{\lambda} \sin^2(\Omega_0 t - kx) dx}_{\frac{\lambda}{2}} \end{aligned}$$

Ce qui donne : $E_p = \frac{1}{4} \rho g L \lambda A^2$.

21. On exprime de deux façons l'énergie potentielle qui traverse une surface située à une abscisse x donnée pendant une période T de l'onde. Comme les ondes de surface se propagent à la vitesse c constante (aucune perte d'énergie dans l'eau dans ce modèle), l'énergie potentielle emmagasinée sur une longueur d'onde est égale au flux moyen d'énergie potentielle multiplié par T , soit, puisque $\lambda = cT$ ici (cf. relation de dispersion en eau peu profonde) :

$$E_p = \frac{1}{4} \rho g L \times A^2 c T = \Phi_p \times T ,$$

ce qui donne : $\Phi_p = \frac{1}{4} \rho g L c A^2$.

22. Le volume balayé (en rouge sur la figure ci-dessous) par le flotteur sur une demi-période est $V_{\text{balayé}} = 2LDB$ (cf. Q3 avec u sinusoïdal d'amplitude $B \ll R$ donc variant sur une demi-période de $-B$ à $+B$).

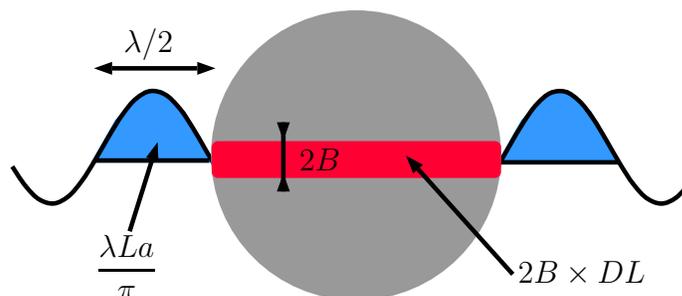


FIGURE 5 – Volume balayé par le flotteur et volume des bosses.

Le volume des bosses (en bleu sur la figure) de part et d'autre du cylindre est, en se plaçant à $t = 0$:

$$V_{\text{bosses}} = L \left| \int_{x=0}^{\lambda/2} \int_0^{y=h_+(x,0)} dx dy \right| + L \left| \int_{x=0}^{-\lambda/2} \int_0^{y=h_-(x,0)} dx dy \right| ,$$

où $h_+(x, t) = A \sin(\Omega_0 t - kx)$ et $h_-(x, t) = A \sin(\Omega_0 t + kx)$ (on compte l'onde à gauche et l'onde à droite du flotteur).

Donc :

$$\begin{aligned} V_{\text{bosses}} &= 2LA \left| \int_0^{\lambda/2} \sin\left(\pm \frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx \right| \\ &= \frac{2\lambda LA}{\pi} \end{aligned}$$

Le volume des bosses de part et d'autre du cylindre est égal au volume balayé par celui-ci. On en déduit : $A = \frac{\pi D}{\lambda} B$.

23. L'équation du mouvement obtenue en Q4 permet, en la multipliant par \dot{u} d'obtenir (au terme de masse près), l'énergie mécanique du flotteur, ce qui donne (avec $u(t) = B \cos(\omega_0 t)$ puisqu'on suppose l'amplitude du flotteur constante) :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} \left(\pi \frac{D^2}{4} L \rho_c \right) (\dot{u}^2 + \omega_0^2 u^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi \frac{D^2}{4} L \rho_c \right) B^2 \omega_0^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) \\ &= \frac{\pi D^2}{8} L \rho_c B^2 \omega_0^2 \\ &= \frac{\rho g L D}{2} B^2 \end{aligned}$$

car $\rho_c = \frac{\rho}{2}$ et $\omega_0^2 = \frac{8g}{\pi D}$.

Remarque : on peut écrire directement que l'énergie cinétique du flotteur est $E_c = \frac{1}{2}m\dot{u}^2$, avec $m = \rho_c L \pi \frac{D^2}{4}$, et que son énergie potentielle associée au terme de rappel dans l'équation du mouvement est : $E_p = \frac{1}{2}LD\rho g u^2$.

L'énergie perdue par le flotteur est rayonnée dans les ondes de surface (une onde de chaque côté) :

$$\frac{dE_m}{dt} = -2\phi_p.$$

D'où :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}DL\rho g B^2 \right) = -2 \times \frac{1}{4}\rho g LcA^2,$$

avec $A = \frac{\pi D}{\lambda} B$.

Tous calculs faits, on obtient l'équation demandée :

$$\boxed{\dot{B} + \frac{1}{\tau}B = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2\lambda^2}{\pi^2 c D}.$$

24. Les oscillations du flotteur sont donc de la forme :

$$u(t) = B(0)e^{-t/\tau} \cos(\omega_0 t).$$

Par analogie avec la forme des oscillations pseudo-périodiques d'un oscillateur amorti, on en dé-

duit : $\boxed{Q = \omega_0 \tau = \frac{4cT}{\pi D}}.$

25. L'application numérique donne :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{4 \times 1,4 \times 0,5}{\pi \times 0,15} \\ &\simeq \frac{2,8}{0,5} \\ &\simeq 6 \end{aligned}$$

L'ordre de grandeur est correct mais la valeur semble un peu trop élevée pour correspondre à la figure 2 où on ne voit que 2 ou 3 oscillations avant l'équilibre.

Il y a peut être d'autres causes d'amortissement, par exemple les effets de bord aux extrémités : la largeur du canal est à peine plus grande que le cylindre, l'eau s'écoule entre les deux sur une petite épaisseur où les effets de la viscosité peuvent jouer.

Une autre explication possible est la suivante : à la question 23, nous n'avons tenu compte que du flux d'énergie potentielle. Or l'énergie de l'onde comporte aussi un terme d'énergie cinétique. Comme dans tous les exemples sans dispersion étudiés en cours, l'énergie de l'onde est équi-répartie en moyenne entre les deux formes, donc le flux d'énergie est en fait le double de celui que nous avons utilisé. La constante de temps τ est donc deux fois plus faible, tout comme le facteur de qualité. On obtient $Q \simeq 3$, ce qui est beaucoup plus satisfaisant ! *Merci à Nicolas Schlosser de nous avoir suggéré cette explication.*

2 Ondes internes

26. La poussée d'Archimède se met sous la forme :

$$\vec{\Pi}_a = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \rho(y) g d\tau_M \vec{u}_y \quad \text{où } \mathcal{V} \text{ est le volume du cylindre.}$$

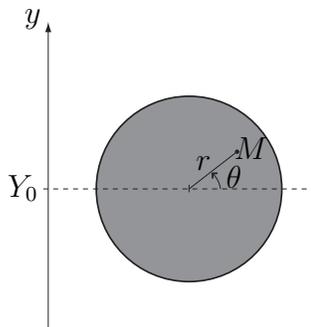


FIGURE 6 – Calcul de la poussée d'Archimède.

$$\vec{\Pi}_a \cdot \vec{u}_y = Lg \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho(y) dr r d\theta,$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho(y) &= \rho_0(0) - \bar{\rho} \frac{y}{\ell} \\ &= \rho_0(0) - \frac{\bar{\rho}}{\ell} (Y_0 + r \cos \theta) \\ &= \rho(Y_0) + \frac{\bar{\rho}}{\ell} r \cos \theta \end{aligned}$$

Le terme en $r \cos \theta$ donne une contribution nulle sur l'ensemble du cylindre. Il reste :

$$\vec{\Pi}_a \cdot \vec{u}_y = \rho(Y_0) Lg \pi \frac{D^2}{4} = \rho(Y_0) Vg,$$

où V est le volume du cylindre.

À l'équilibre, comme au début du problème, $\rho_c Vg = \rho(Y_0) Vg$, donc $\rho(Y_0) = \rho_c$. On en déduit :

$$\boxed{Y_0 = \frac{\ell}{\bar{\rho}} (\rho_0(0) - \rho_c)}.$$

Remarque : on peut utiliser un argument plus qualitatif. En effet, $\rho(y)$ est affine, donc la masse d'eau correspondant au volume du cylindre est égale à $\rho(Y_0)V$ car si on prend deux volumes élémentaires dans le cylindre symétriques par rapport au plan (Gxy) , les masses élémentaires correspondantes sont décalées symétriquement par rapport à la masse élémentaire située en G .

Pour l'étude des petites oscillations, on procède comme à la question 4. L'équation du mouvement du cylindre est :

$$\begin{aligned} \rho_c V \frac{d^2 u}{dt^2} &= -\rho_c g V + \rho(Y_0 + u) V g \\ &= \underbrace{-\rho_c g V + \rho(Y_0) g V}_{=0} - \frac{\bar{\rho}}{\ell} u V g. \end{aligned}$$

On en déduit l'équation vérifiée par u :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \Omega_0^2 u = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{\bar{\rho} g}{\rho_c \ell}}.$$

27. Si $Y_0 = \frac{H}{2}$, $\bar{\rho} = \rho(Y_0)$ car $\rho(y)$ étant une fonction affine, sa moyenne est atteinte en $H/2$, donc : $\bar{\rho} = \rho_c$ et $\Omega_0^2 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

28. $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Or $\ell \simeq 10^7$ m donc : $T_0 \simeq 2\pi \times 10^3$ s soit : $T_0 \simeq 6 \times 10^3$ s \simeq 1 heure et 40 minutes.

29. $k_x = 2k_y$ donc la direction de propagation \vec{u} fait l'angle θ avec l'axe des x tel que $\tan \theta = 0,5$. La figure 7 traduit la situation envisagée ici.

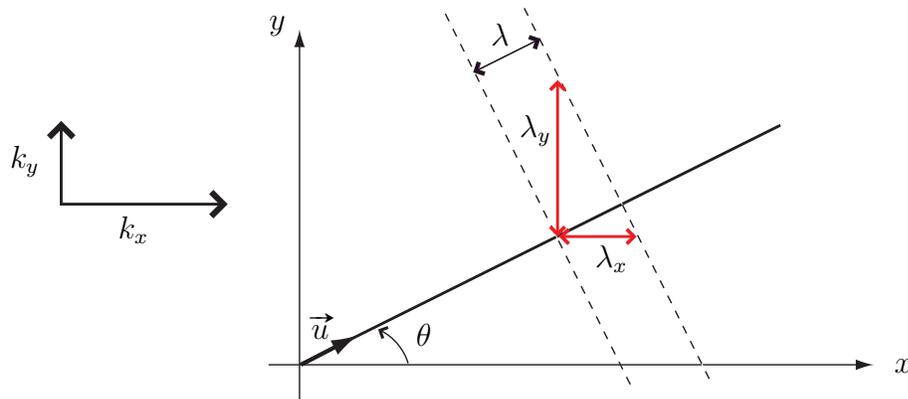


FIGURE 7 – Cas $k_x = 2k_y$.

Pour représenter λ_x et λ_y , on commence par représenter deux plans d'ondes (en tiretés) distants de λ (ils sont orthogonaux à la direction de propagation \vec{u}), puis on dessine les traits rouges (Cf. figure 7). Puisque $k_x = 2k_y$, $\lambda_x = \frac{1}{2}\lambda_y$ car $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ de manière générale.

30. L'équation (1) traduit l'incompressibilité de l'écoulement : $\text{div}(\delta\vec{v}) = 0$.

L'équation (2) est l'équation locale de conservation de la masse linéarisée. Cette équation s'écrit de manière générale : $\text{div}(\rho\delta\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. Sa linéarisation donne l'équation (2).

Les équations (3) et (4) sont les projections sur (Ox) et (Oy) respectivement de l'équation d'Euler linéarisée. L'équation d'Euler non linéarisée s'écrit ici :

$$\rho \left(\frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} + (\delta\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\delta\vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho\vec{g}.$$

Le terme d'accélération convective n'apparaît pas dans les équations (3) et (4) car d'ordre 2 et les termes au repos s'éliminent car $\overrightarrow{\text{grad}}P_0(y) = \rho_0(y)\vec{g}$.

31. En termes d'ondes planes, les équations (1) à (4) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 (1) & : -ik_x \delta v_x - ik_y \delta v_y = 0 \\
 (2) & : i\omega \delta \rho - \frac{\bar{\rho}}{\ell} \delta v_y = 0 \\
 (3) & : \bar{\rho} i\omega \delta v_x = ik_x \delta P \\
 (4) & : \bar{\rho} i\omega \delta v_y = ik_y \delta P - g \delta \rho
 \end{aligned}$$

32. On obtient un système de 4 équations à 4 inconnues, homogène. Mais 4 inconnues, c'est trop! On va commencer par procéder par élimination pour limiter le nombre d'inconnues. On garde l'équation (1), on exprime $\delta \rho$ en fonction de δv_y grâce à l'équation (2), δP en fonction de δv_x grâce à l'équation (3) et on reporte dans l'équation (4). On se ramène donc à un système 2x2 :

$$\begin{aligned}
 k_x \delta v_x + k_y \delta v_y & = 0 \\
 -i\omega \bar{\rho} \frac{k_y}{k_x} \delta v_x + \left(i\omega \bar{\rho} + \frac{g \bar{\rho}}{i\omega \ell} \right) \delta v_y & = 0
 \end{aligned}$$

Ce système en $(\delta v_x, \delta v_y)$ n'a de solution différente de $(0, 0)$ que si son déterminant est nul donc si et seulement si :

$$\begin{aligned}
 k_x \left(i\omega \bar{\rho} + \frac{g \bar{\rho}}{i\omega \ell} \right) + i\omega \bar{\rho} \frac{k_y^2}{k_x} & = 0 \\
 \Leftrightarrow k_x \left(\omega - \frac{g}{\ell \omega} \right) + \omega \frac{k_y^2}{k_x} & = 0 \\
 \Leftrightarrow \left(k_x^2 + k_y^2 \right) \omega^2 - k_x^2 \frac{g}{\ell} & = 0.
 \end{aligned}$$

C'est bien de la forme : $\omega^2 \left(k_x^2 + k_y^2 \right) = \alpha^2 k_x^2$ avec $\alpha = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

33. $k_x = \cos \theta \times k$ (Cf.figure 8) d'où $k_x^2 = \cos^2 \theta \times k^2 = \cos^2 \theta (k_x^2 + k_y^2)$.

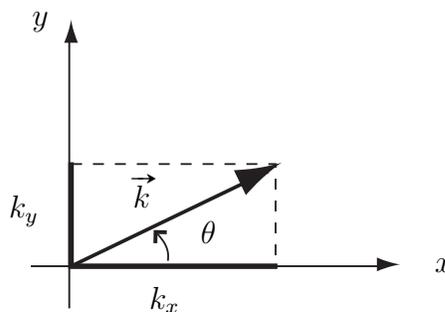


FIGURE 8 – Direction de propagation.

La relation de dispersion s'écrit donc : $\cos^2 \theta = \frac{\omega^2}{\alpha^2}$, ou encore : $\cos \theta = \epsilon \frac{\omega}{\alpha}$, avec $\epsilon = \pm 1$.

34. Cette relation de dispersion ne fait intervenir que la direction de propagation de l'onde. La norme de \vec{k} peut prendre n'importe quelle valeur. La longueur d'onde peut être quelconque, seule la direction de propagation est fixée par la pulsation ω .

Par ailleurs, $\omega \leq \alpha$, α apparaît comme une pulsation de coupure haute.

35. Par définition : $\vec{V}_\phi = \frac{\omega}{k} \vec{u} = \frac{\omega}{k^2} \vec{k}$. En remplaçant ω par $\epsilon\alpha \cos\theta = \epsilon\alpha \frac{k_x}{k}$, on obtient l'expression de la vitesse de phase en fonction de k_x et k_y :

$$\vec{V}_\phi = \epsilon \frac{\alpha k_x}{(k_x^2 + k_y^2)^{3/2}} (k_x \vec{u}_x + k_y \vec{u}_y).$$

36. La vitesse de groupe est : $\vec{V}_g = \frac{\partial\omega}{\partial k_x} \vec{u}_x + \frac{\partial\omega}{\partial k_y} \vec{u}_y$, avec $\omega = \epsilon \frac{\alpha k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$.

Tous calculs faits, on obtient :

$$\vec{V}_g = \epsilon \frac{\alpha k_y}{(k_x^2 + k_y^2)^{3/2}} (k_y \vec{u}_x - k_x \vec{u}_y).$$

37. D'après les expressions précédentes : $\vec{V}_\phi \cdot \vec{V}_g = 0$: les vitesses de phase et de groupe sont bien orthogonales.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \vec{V}_\phi \cdot \vec{u}_x &= \epsilon\alpha \frac{k_x^2}{(k_x^2 + k_y^2)^{3/2}} \\ \vec{V}_g \cdot \vec{u}_x &= \epsilon\alpha \frac{k_y^2}{(k_x^2 + k_y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Les composantes des vitesses de phase et de groupe selon l'axe (Ox) sont bien de même signe.

Enfin, l'équation (1) s'écrit : $k_x \delta v_x + k_y \delta v_y = 0$, soit $\vec{k} \cdot \delta \vec{v} = 0$. La vitesse $\delta \vec{v}$ est orthogonale au vecteur d'onde \vec{k} .

38. \vec{V}_ϕ et \vec{V}_g ont des projections sur (Oy) de signe opposé.

De plus : $\vec{V}_\phi \cdot \vec{u}_x = 4 \times \vec{V}_g \cdot \vec{u}_x$.

Enfin, $\delta \vec{v}$ est orthogonale au vecteur d'onde \vec{k} donc à la vitesse de phase, elle est donc parallèle à la vitesse de groupe.

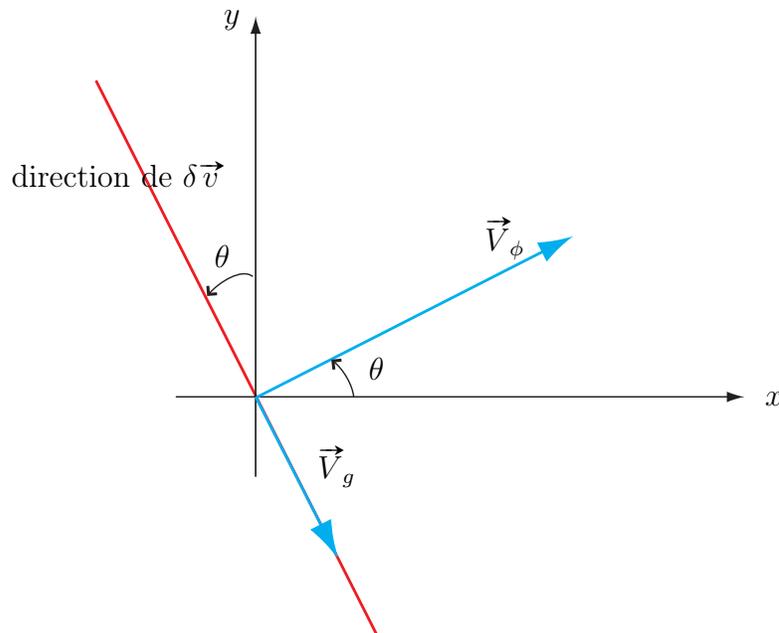


FIGURE 9 – Vitesse de phase, vitesse de groupe et direction de la vitesse du fluide.

39. Sur la figure 5 de l'énoncé, on observe bien des extrema du champ représenté dans deux directions opposées. Comme les rayons sont donnés par les directions de la vitesse de groupe, on voit donc une croix avec quatre branches, chacune faisant un angle θ avec la direction (Oy).

On observe que pour une même direction, dans la partie $y > 0$ la zone est rouge (maximum) et dans la partie $y < 0$ elle est bleue (mimimum), ce qui traduit un déphasage de π selon que k_y est positif ou négatif. Le champ représenté ne peut pas être décrit par une unique onde plane, sinon ce changement de couleur traduisant ce déphasage de π n'existerait pas.

40. Il s'agit de mesurer sur la figure 10 l'angle β entre les deux directions marquées. On mesure

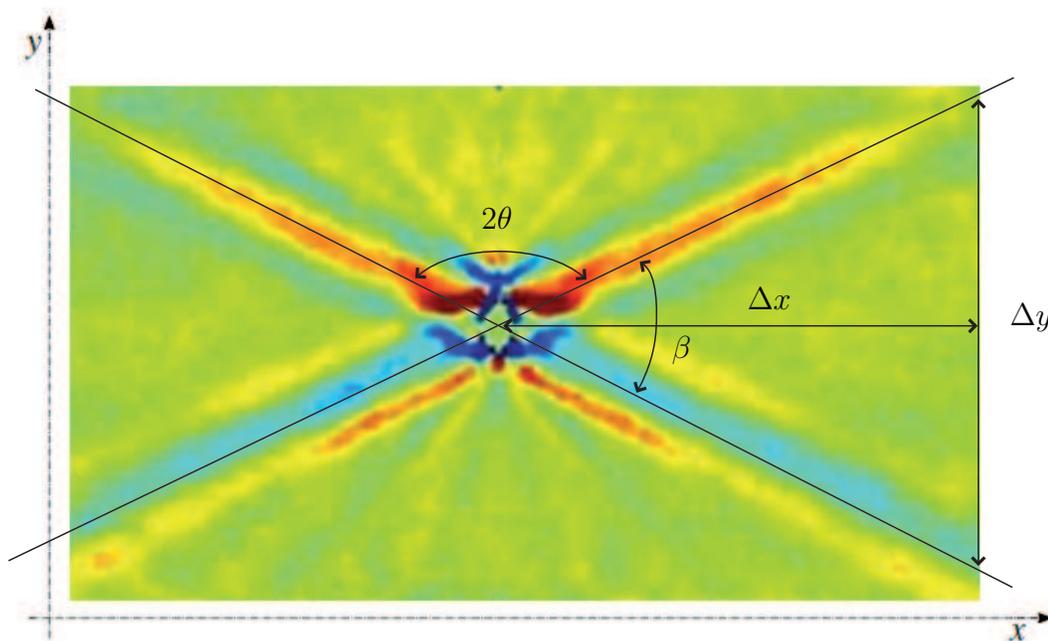


FIGURE 10 – Mesure de la pulsation excitatrice.

$\Delta x = 58$ mm et $\Delta y = 55$ mm donc $\tan \beta = \frac{55}{58} \simeq 1$, soit : $\beta \simeq \frac{\pi}{4}$.

Quel est le lien entre θ et β ? Puisque les directions repérées sont celles des rayons, elles indiquent la vitesse de groupe. Donc $2\theta = \pi - \beta$, soit : $\theta \simeq \frac{3\pi}{8}$.

On cherche à calculer $\cos \theta$: $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(\cos(2\theta) + 1) \simeq \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)$. D'où : $\cos^2 \theta \simeq 0,15$ puis $\cos \theta \simeq 0,4$.

Par ailleurs, $\alpha = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{10}{12}} \simeq 0,9$ rad.s⁻¹. D'après la relation de dispersion de la question 32, on en déduit : $\omega = \alpha \cos \theta \simeq 0,36$ rad.s⁻¹, ce qui correspond à une fréquence de l'ordre de 6×10^{-2} Hz.

Remarque : pour estimer sans calculatrice la valeur numérique de $\sqrt{\frac{10}{12}}$, on peut écrire : $\sqrt{\frac{10}{12}} = \sqrt{\frac{10}{10+2}} = \sqrt{\frac{1}{1+0,2}}$ et utiliser un développement limité de cette expression au premier ordre en considérant que $0,2 \ll 1$. On obtient : $\sqrt{\frac{10}{12}} \simeq 1 - \frac{0,2}{2} = 0,9$.

41. Les équations étant linéaires (car linéarisées!), les ondes réfléchi et incidente ont même pulsation donc font le même angle (au signe près) avec l'horizontale.

\vec{k}_r a une composante positive selon (Oy) et négative selon (Ox) . Pour l'onde incidente $\epsilon = +1$ dans l'équation de dispersion et pour l'onde réfléchi $\epsilon = -1$. Donc la vitesse de groupe de l'onde réfléchi est dirigée vers le bas d'après l'expression obtenue à la question 36.

On obtient alors la figure 11.

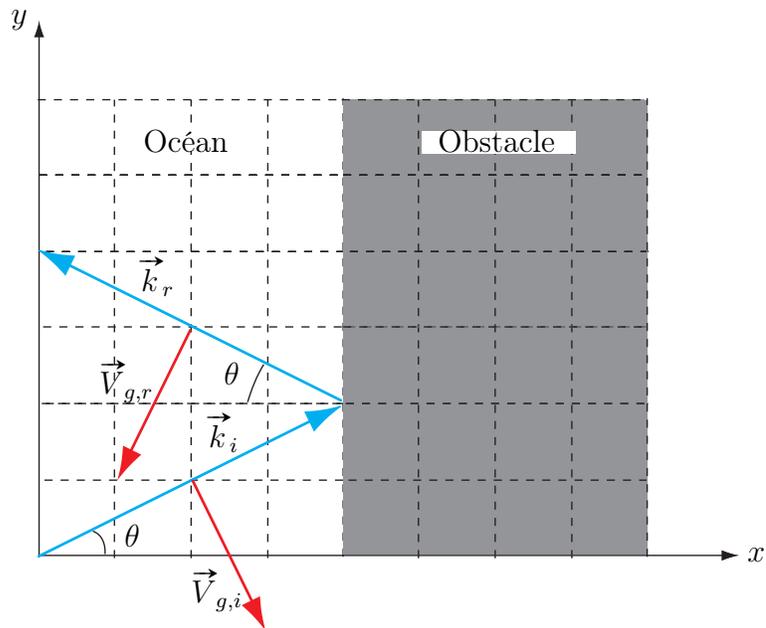


FIGURE 11 – Réflexion sur un obstacle vertical.

42. Pour l'obstacle oblique, la situation est représentée sur la figure 12.

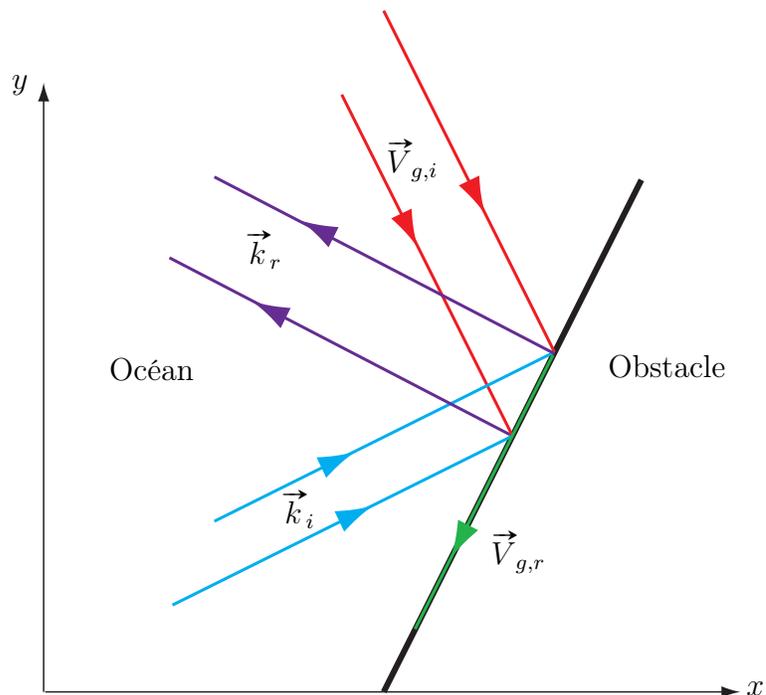


FIGURE 12 – Réflexion sur un obstacle oblique.

L'angle θ est indépendant de la direction de l'obstacle, il ne dépend que de la pulsation ω . On se trouve ici dans un cas critique où les rayons réfléchis sont parallèles à l'obstacle.

Si la largeur du faisceau réfléchi tend vers zéro, la conservation de l'énergie impose à l'amplitude de l'onde de tendre vers l'infini ! Dans ce cas, le cadre de l'étude est à revoir puisque le modèle linéaire n'est plus valable. Des non-linéarités apparaissent, l'énergie de l'onde est dissipée par frottements, la viscosité joue alors un rôle non négligeable.

Voir l'article de Louis Gostiaux et Thierry Dauxois : Propagation et réflexion d'ondes internes dans l'océan : le mystère de l'angle critique, paru dans le BUP (Vol.98 - Novembre 2004)

Corrigé proposé par XAVIER DUCROS & MARIE-NOËLLE SANZ

I - Le dispositif expérimental.

1. Il s'agit de l'effet Doppler-Fizeau. $\nu_{\text{perçue}} = \nu_{\text{laser}} \left(1 - \frac{v}{c}\right)$ où v est la vitesse *longitudinale* relative de l'atome par rapport à la source laser, et algébrique ($v > 0$ correspondant à un éloignement).
2. Il faut comprendre (ce n'est pas dit explicitement) que les photons sont absorbés *frontalement* par les atomes qu'ils rencontrent. On se place dans le référentiel du laboratoire. Un photon a une quantité de mouvement de norme $\frac{h}{\lambda}$. Si on note $v_i = 720 \text{ m s}^{-1}$ la vitesse initiale des atomes et $v_f = 40 \text{ m s}^{-1}$ leur vitesse finale, alors la variation de quantité de mouvement d'un atome de sodium vaut $\frac{M}{N_A}(v_f - v_i)$ et donc le nombre N de photons nécessaire pour ralentir un atome de sodium est tel que $\frac{M}{N_A}(v_i - v_f) = N \frac{h}{\lambda}$.

$$\text{On a donc au final } N = \frac{M(v_i - v_f)\lambda}{N_A h}.$$

On passe sous silence le fait que, évidemment, un atome qui a absorbé un photon se retrouve dans un état excité et doit se désexciter en réémettant un photon – dans une direction aléatoire – avant de pouvoir en absorber un autre.

A.N. il faut déterminer l'ordre de grandeur de λ . Si on prend $\lambda = 600 \text{ nm}$, alors on a $N = 2 \times 10^4$ photons.

3. Lorsque le piège magnétique a une profondeur (en terme de potentiel, plus précisément d'énergie potentielle) donnée, seuls les atomes ayant une énergie cinétique supérieure à la profondeur du puits sont susceptibles de quitter ce puits.
4. Si on enlève de la population des atomes piégés tous ceux dont l'énergie cinétique est supérieure à une certaine valeur, il ne reste que ceux dont l'énergie cinétique est inférieure à cette valeur ; l'énergie cinétique moyenne diminue donc, le gaz se refroidit.
5. Le texte n'est pas précis sur la grandeur attendue : vitesse quadratique moyenne, moyenne des normes des vitesses ? mais il ne demande qu'un ordre de grandeur ; nous prendrons la vitesse quadratique moyenne u .

$$\frac{1}{2} \frac{M}{N_A} u^2 = \frac{3}{2} k_B T$$
 avec $T = 500 \text{ nK}$ d'où $u = \sqrt{\frac{3k_B T N_A}{M}} \simeq 2 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$.
6. Pour éviter toute collision d'un atome de gaz résiduel avec les atomes piégés : le nuage d'atomes de sodium serait détruit par une collision.
7. $\Delta E = \hbar\omega = h\nu$ (relation de Planck-Einstein).

II - Étude de l'analogie mécanique.

8. On peut sans doute écrire $E_3 - E_1 = \hbar\omega_1 = 2,1 \text{ eV}$ et $E_3 - E_2 = \hbar\omega_2 = 2,1 - 7,4 \times 10^{-6} \text{ eV}$. On voit que l'écart relatif entre ω_1 et ω_2 est de l'ordre de 4×10^{-6} , ce qui justifie l'approximation. Nous noterons $k = k_1 = k_2 = m\omega_1^2 = m\omega_2^2$.
- 9.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -(k - K)x_1 - K(x_1 - x_2) - m\gamma_1\dot{x}_1 + F(t) \\ m\ddot{x}_2 = -(k - K)x_2 + K(x_1 - x_2) - m\gamma_2\dot{x}_2 \end{cases}$$

qui se simplifie en

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + Kx_2 - m\gamma_1\dot{x}_1 + F(t) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 + Kx_1 - m\gamma_2\dot{x}_2 \end{cases}$$

10. Nous allons utiliser une notation complexe en $e^{+i\omega t}$. En régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω , on aura donc :

$$\begin{cases} -m\omega^2 \underline{x}_1 = -k\underline{x}_1 + K\underline{x}_2 - i\omega m\gamma_1 \underline{x}_1 + \underline{F} \\ -m\omega^2 \underline{x}_2 = -k\underline{x}_2 + K\underline{x}_1 - i\omega m\gamma_2 \underline{x}_2 \end{cases}$$

11. On suppose dans cette question que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. On a alors

$$\begin{cases} -m\omega^2 \underline{x}_1 = -k\underline{x}_1 + K\underline{x}_2 + \underline{F} \\ -m\omega^2 \underline{x}_2 = -k\underline{x}_2 + K\underline{x}_1 \end{cases}$$

Posons $S(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et $D(t) = x_1(t) - x_2(t)$. Le système précédent se réécrit alors sous la forme découplée

$$\begin{cases} (k - K - m\omega^2)\underline{S} = \underline{F} \\ (k + K - m\omega^2)\underline{D} = \underline{F} \end{cases}$$

Et donc $\underline{S} = \frac{\underline{F}}{m(\omega_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)}$ et $\underline{D} = \frac{\underline{F}}{m(\omega_1^2 + \Omega^2 - \omega^2)}$

On voit apparaître les deux pulsations de résonance (les amplitudes d'oscillation tendent alors vers l'infini) :

$$\begin{cases} \omega_-^2 = \omega_1^2 - \Omega^2 \\ \omega_+^2 = \omega_1^2 + \Omega^2 \end{cases}$$

Si $\Omega \ll \omega_1$ (situation de couplage faible), alors, comme $\omega_+^2 - \omega_-^2 = 2\Omega^2$, on a donc $(\omega_+ - \omega_-)(\omega_+ + \omega_-) = 2\Omega^2$. En remplaçant $\omega_+ + \omega_-$ par la valeur approchée $2\omega_1$ on aboutit à $\Omega_r = \omega_+ - \omega_- \simeq \frac{\Omega^2}{\omega_1}$, ou bien encore $\Omega^2 = \omega_1 \Omega_r$.

12. On a maintenant seulement $\gamma_2 = 0$.

Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} -m\omega^2 \underline{x}_1 = -k\underline{x}_1 + K\underline{x}_2 - i\omega m\gamma_1 \underline{x}_1 + \underline{F} \\ -m\omega^2 \underline{x}_2 = -k\underline{x}_2 + K\underline{x}_1 \end{cases}$$

Avec $k = m\omega_1^2$, $K = m\Omega^2 = m\omega_1 \Omega_r$, et $\omega = \omega_1 + \delta\omega$, on parvient à :

$$\begin{cases} -\delta\omega(2\omega_1 + \delta\omega)\underline{x}_1 = \omega_1 \Omega_r \underline{x}_2 - i(\omega_1 + \delta\omega)\gamma_1 \underline{x}_1 + \frac{\underline{F}}{m} \\ -\delta\omega(2\omega_1 + \delta\omega)\underline{x}_2 = \omega_1 \Omega_r \underline{x}_1 \end{cases}$$

13. Si $\omega_1 \gg |\delta\omega|$ (on n'utilise rien d'autre), alors ce système peut se simplifier comme suit :

$$\begin{cases} -2\delta\omega \omega_1 \underline{x}_1 = \omega_1 \Omega_r \underline{x}_2 - i\omega_1 \gamma_1 \underline{x}_1 + \frac{\underline{F}}{m} \\ -2\delta\omega \omega_1 \underline{x}_2 = \omega_1 \Omega_r \underline{x}_1 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} -2\delta\omega \underline{x}_1 = \Omega_r \underline{x}_2 - i\gamma_1 \underline{x}_1 + \frac{\underline{F}}{m\omega_1} \\ -2\delta\omega \underline{x}_2 = \Omega_r \underline{x}_1 \end{cases}$$

14. Si on note $P(t)$ la puissance fournie par la force extérieure $F(t)$, alors $P(t) = F(t)\dot{x}_1(t)$.

D'où, avec la convention choisie en $e^{+i\omega t}$, $\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ \underline{F}^* e^{-i\omega t} i \omega \underline{x}_1 e^{+i\omega t} \}$. \underline{F} est réelle donc $\underline{F}^* = \underline{F}$ (notée F par l'énoncé) et donc $\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} F \omega \Re(i \underline{x}_1) = -\frac{1}{2} F \omega \Im(\underline{x}_1)$. Comme ω est très proche de ω_1 on a $\langle P(t) \rangle \simeq -\frac{1}{2} F \omega_1 \Im(\underline{x}_1)$.

(Avec une convention en $e^{-i\omega t}$, on aurait obtenu le signe opposé).

La résolution du système de la question précédente n'est pas très compliquée (elle semble n'être demandée qu'à la question 17, mais en fait on en a besoin dans un cas particulier dès la question 15 ; autant faire la résolution générale tout de suite). Elle mène en particulier à

$$\underline{x}_1 = \frac{\underline{F}}{m\omega_1 \left(\frac{\Omega_r^2}{2\delta\omega} - 2\delta\omega + i\gamma_1 \right)}$$

On a donc, dans le cas où \underline{F} est réelle (on n'a nulle part eu besoin de positive), $\langle P(t) \rangle = \frac{F^2 \gamma_1}{2m \left[\left(\frac{\Omega_r^2}{2\delta\omega} - 2\delta\omega \right)^2 + \gamma_1^2 \right]}$

15. La figure 2a concerne un cas sans couplage : c'est-à-dire que $K = 0$, $\Omega = \Omega_r = 0$. On a donc $\langle P(t) \rangle = \frac{F^2}{2m\gamma_1 \left[1 + 4 \left(\frac{\delta\omega}{\gamma_1} \right)^2 \right]}$. On a bien une courbe telle que celle fournie en figure 2a :

une fonction paire de $\delta\omega$, maximale en $\delta\omega = 0$, qui tend vers 0 lorsque $|\delta\omega| \rightarrow \infty$.

La hauteur moitié est atteinte pour $4(\delta\omega)^2 = \gamma_1^2$, donc pour $\delta\omega = \pm \frac{\gamma_1}{2}$. La largeur de la courbe à mi-hauteur est donc de γ_1 .

16. Dans le cas où $\delta\omega = 0$ (c'est-à-dire $\omega = \omega_1$) et $\Omega_r \neq 0$ (c'est-à-dire $\omega \neq 0$ et $K \neq 0$), on a $\langle P(t) \rangle = 0$, $\underline{x}_1 = 0$, $\underline{x}_2 = -\frac{F}{m\omega_1 \Omega_r}$ (attention à ne pas déduire de la deuxième équation du 13. que $\underline{x}_2 = 0$: ne pas oublier que $\delta\omega = 0$). La masse 1 est immobile ; en conséquence la force $F(t)$ fournit une puissance nulle au système. La masse 2 a un mouvement sinusoïdal forcé à la pulsation ω_1 ; comme la masse 2 n'est soumise à aucun amortissement, il n'y a pas d'incompatibilité avec le fait que la force $F(t)$ fournit une puissance nulle. Il s'agit d'un phénomène d'anti-résonance (hors-programme).

17. Déjà fait à la question 14. : $\underline{x}_1 = \frac{\underline{F}}{m\omega_1 \left(\frac{\Omega_r^2}{2\delta\omega} - 2\delta\omega + i\gamma_1 \right)}$.

18. Si $|\delta\omega| \ll \Omega_r$, on a l'expression simplifiée $\underline{x}_1 = \frac{\underline{F}}{m\omega_1 \left(\frac{\Omega_r^2}{2\delta\omega} + i\gamma_1 \right)}$.

19. Toujours pour $|\delta\omega| \ll \Omega_r$, on a $\langle P(t) \rangle = \frac{F^2 \gamma_1}{2m \left[\left(\frac{\Omega_r^2}{2\delta\omega} \right)^2 + \gamma_1^2 \right]}$. On a donc un équivalent au

voisinage de 0 : $\langle P(t) \rangle \sim \frac{2F^2 \gamma_1}{m\Omega_r^4} (\delta\omega)^2$ soit une forme parabolique qui passe par l'origine, à peu près observable sur les figures 2b et 2c (et la parabole est d'autant plus "ouverte" que le couplage est fort).

Quand $|\delta\omega|$ devient très grand (mais attention il faut continuer à respecter $|\delta\omega| \ll \omega_1$ sinon on sort du cadre de l'étude), il nous faut reprendre l'expression complète $\underline{x}_1 =$

$\frac{F}{m\omega_1 \left(\frac{\Omega_r^2}{2\delta\omega} - 2\delta\omega + i\gamma_1 \right)}$: $\underline{x_1}$ tend vers 0 et donc $\langle P(t) \rangle$ aussi.

Un équivalent pour $\delta\omega$ "très grand" est alors $\underline{x_1} \sim \frac{F}{m\omega_1(-2\delta\omega + i\gamma_1)}$ et donc $\langle P(t) \rangle \sim \frac{F^2\gamma_1}{8m(\delta\omega)^2}$.

En égalant les deux expressions d'équivalents de $\langle P(t) \rangle$ on trouve $(\delta\omega)^4 = \frac{\Omega_r^4}{16}$ d'où les valeurs approximatives des abscisses des "bords" du creux : $\delta\omega = \pm \frac{\Omega_r}{2}$. Donc l'ordre de grandeur de la largeur du creux central est Ω_r ; on constate bien (figures 2b et 2c) qu'elle augmente lorsque le couplage augmente.

III- Transparence induite.

20. $\omega_1 = \frac{2\pi c}{\lambda} \simeq 3 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$.
21. Les conditions de la question 13, c'est $\omega_1 \gg \gamma_1$ (vérifié, rapport 5×10^7), et $\omega_1 \gg \Omega_r$ (vérifié, rapport 3×10^8), et enfin $\omega_1 \gg |\delta\omega|$: il faut donc pour la suite se limiter à $|\delta\omega| \ll 3 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$; il suffit de regarder la figure 3 pour vérifier que l'on se situe bien dans ce cadre.
22. De la ligne 128 du texte on déduit que Ω^2 est proportionnel à l'intensité lumineuse du laser de couplage. Or $\Omega_r = \frac{\Omega^2}{\omega_1}$. Donc Ω_r est proportionnel à l'intensité du laser de couplage.
23. $k = n \frac{\omega}{c}$
24. Lignes 136–137 : "la lumière dont la fréquence correspond très précisément à la transition de l'état 1 vers l'état 3" : il s'agit de la pulsation ω_1 , donc on a $\delta\omega = 0$ rigoureusement. Comme par ailleurs $\Omega_r \neq 0$, on se situe dans le cas de la question 16 : on a vu que $\underline{x_1} = 0$, mais aussi et surtout que $\langle P(t) \rangle = 0$: le milieu est bien transparent (on peut aussi invoquer le fait que l'indice, qui vaut 1, est réel). On a par ailleurs un indice $n(\omega_1) = 1$ (à l'effet Stark près), ce qui est conforme aux lignes 134–135. À cette fréquence précise, la lumière se propage à travers le nuage atomique comme dans le vide, mais attention, ce n'est pas vrai aux fréquences voisines (lignes 138–139).
25. $\Omega_r \simeq 1 \times 10^7 \text{ rad s}^{-1} = 10 \times 10^6 \text{ rad s}^{-1}$; dans la partie centrale de la figure 3, la condition $|\delta\omega| \ll \Omega_r$ peut être considérée comme vérifiée, et on peut utiliser les résultats des questions 18 et 19. On peut assimiler l'intervalle de pulsation pour lequel le gaz d'atomes est transparent à la lumière avec le creux central des figures 2 b et c (transparence = propagation de l'onde sans atténuation, donc sans perte de puissance). On trouve alors une largeur de l'ordre de Ω_r , ce qui ne colle pas tout à fait avec la figure 3a : on observe une largeur environ 3 fois plus petite que cela (mais cela provient sans doute du calcul très grossier réalisé à la question 19 pour la largeur du creux central). Et dans ce cas, la largeur de cet intervalle est proportionnelle à l'intensité lumineuse du laser de couplage.

IV - Lumière ralentie.

26. $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}$ donc $v_\phi(\omega_1) = c$.

27. Si on note $k_r(\omega)$ la partie réelle de $k(\omega)$, alors on a $k_r(\omega) = n_r(\omega)\frac{\omega}{c}$, d'où $\frac{dk_r}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(\omega \frac{dn_r}{d\omega} + n_r(\omega) \right)$ et finalement $v_g(\omega) = \frac{d\omega}{dk_r} = \frac{c}{\omega \frac{dn_r}{d\omega} + n_r(\omega)}$.

28. La figure 3b représente justement $n_r(\omega)$ en fonction de ω (plus précisément de $\delta\omega = \omega - \omega_1$). Sur tout l'intervalle des pulsations représenté par cette figure, ω et $n_r(\omega)$ varient très peu. Par contre, $\frac{dn_r}{d\omega}$ varie fortement. La vitesse de groupe sera donc la plus faible (et donc l'impulsion de lumière le plus ralentie) lorsque $\frac{dn_r}{d\omega}$ est positif et le plus grand possible : soit d'après la figure 3b pour $\delta\omega$ allant de $-4 \times 10^6 \text{ rad s}^{-1}$ à $4 \times 10^6 \text{ rad s}^{-1}$.

29. On reprend le résultat de la question 17 (ou même 18) au voisinage de 0 : $x_1 = \frac{F}{m\omega_1 \left(\frac{\Omega_r^2}{2\delta\omega} + i\gamma_1 \right)} \simeq$

$$\frac{2F\delta\omega}{m\omega_1\Omega_r^2}$$

Alors $n(\omega) = 1 + \frac{2C\delta\omega}{m\omega_1\Omega_r^2} = n_r(\omega)$.

Donc $n_r(\omega) = 1 + \frac{2C(\omega - \omega_1)}{m\omega_1\Omega_r^2}$, et $\frac{dn_r}{d\omega} = \frac{2C}{m\omega_1\Omega_r^2}$.

Au final on a donc $v_g(\omega_1) = \frac{c}{1 + \frac{2C}{m\Omega_r^2}}$.

30. D'après la figure 4, le nuage d'atomes occasionne un retard d'environ 7 μs , pour une longueur de 229 μm . Soit une vitesse de groupe environ égale à $3 \times 10^1 \text{ m s}^{-1}$.

31. C'est environ égal à $\frac{c}{10^7}$, donc on peut très valablement simplifier l'expression de la vitesse

de groupe obtenue à la question 29 (le 1 au dénominateur est négligeable) : $v_g(\omega_1) \simeq \frac{m\Omega_r^2}{2C}c$.

Comme Ω_r est proportionnelle à l'intensité du laser de couplage, la vitesse de groupe est proportionnelle au carré de l'intensité du laser de couplage.

32. Augmenter ainsi l'intensité du laser de couplage a donc l'inconvénient de moins ralentir la vitesse de groupe de l'impulsion lumineuse. L'avantage c'est que l'intervalle de pulsations ralenties est plus large?

X-ENS PSI 2020

Autour de la modulation acousto-optique

Corrigé proposé par Nicolas Choimet, PSI*, Eiffel Bordeaux

nicolas.choimet@live.fr

I. Génération d'ondes acoustiques

I.A. Etude fréquentielle de l'émetteur ultrasonore

1. Il s'agit de la courbe de gain d'un filtre passe-bande présentant une résonance aiguë.

On mesure sur la courbe $\begin{cases} f_p = 39,9 \text{ kHz} \\ \Delta f = 1,5 \text{ kHz} \end{cases}$ (à -3 dB, $\frac{u_{s,m}}{u_0} = \frac{0,35}{\sqrt{2}} \approx 0,25$). On en déduit le facteur de qualité $Q = \frac{f_p}{\Delta f} \approx 40 \times \frac{2}{3} \approx 27$.

2. La gamme des fréquences audibles par l'oreille humaine est [20 Hz, 20 kHz]. La fréquence de résonance de l'émetteur est supérieure à 20 kHz : il s'agit bien d'ultrasons.

I.B. Etude de la propagation des ondes acoustiques

3. C'est une question de cours ! On obtient (cf cours) :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad} p \\ \rho_0 \text{div} \vec{v} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \\ \mu = \rho_0 \chi_s p \end{cases}$$

4. De nouveau une question de cours (le résultat étant donné !). L'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\Delta p - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

avec $c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$.

5. Le décalage temporel entre les débuts des deux trains d'onde vaut $\Delta t = 500 \mu\text{s}$. On en déduit la célérité des ondes acoustiques : $c_a = \frac{d}{\Delta t} = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La valeur théorique est donnée par $c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} = \frac{1}{\sqrt{1,2 \times 7,10^{-6}}} = \frac{1000}{\sqrt{8,4}} \approx 1000 \times 0,345 = 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les deux valeurs sont très voisines.

I.C. Propagation d'ondes acoustiques dans un cristal

6. Considérons l'atome numéro n et appliquons-lui la 2^{de} loi de Newton en projection sur l'axe (Ox) :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = K(a + u_{n+1} - u_n - a) - K(a + u_n - u_{n-1} - a)$$

soit :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = K(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

7. Dans l'approximation continue,

$$u_{n\pm 1}(t) = u(x_n \pm a, t) \approx u_n(t) \pm a \frac{\partial u}{\partial x}(x_n, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_n, t)$$

On en déduit :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On obtient bien une équation de d'Alembert, avec la célérité $c_s = a \sqrt{\frac{K}{m}}$.

8. On revient à la chaîne discrète et on cherche des solutions de la forme

$$u_n(t) = u_0 \exp i(qna - \omega t)$$

On injecte cette solution dans l'équation de couplage établie à la question 6 :

$$-m\omega^2 = K(\exp(ika) + \exp(-ika) - 2) = -2K(1 - \cos(ka)) = -4K \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

On en déduit :

$$\omega^2 = \frac{4K}{m} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

soit :

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{K}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

9. La condition aux limites périodique s'écrit $u_{N+1}(t) = u_1(t)$, soit : $\exp i(qNa) = 1$. Par conséquent, $qNa \equiv 0[2\pi]$, soit :

$$q = p \frac{2\pi}{Na}, p \in \mathbb{Z}^*$$

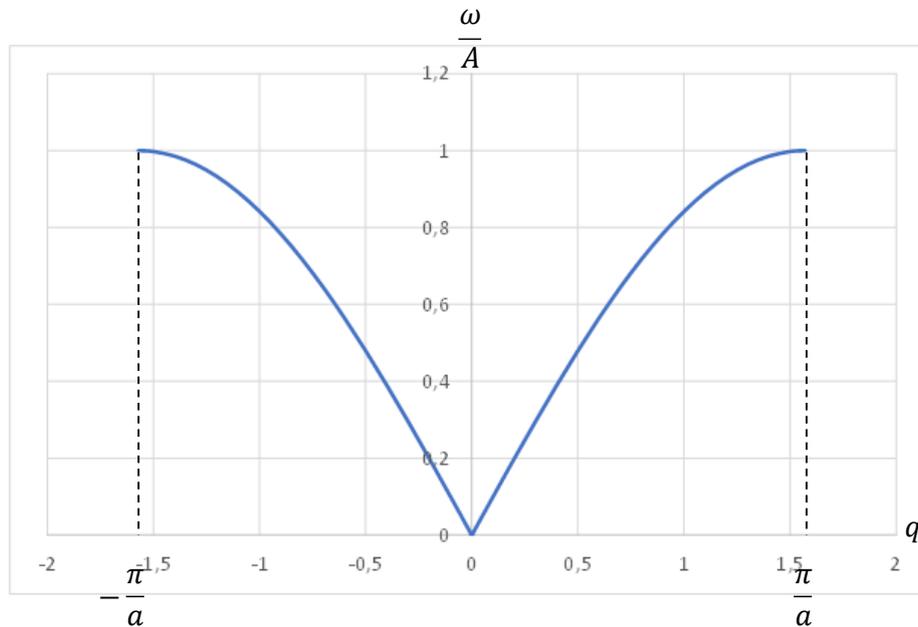
NB : il faut ici considérer les valeurs positives et négatives de q puisqu'elles correspondent à des solutions physiquement différentes (propagation vers les x croissants ou vers les x décroissants). En revanche, $q = 0$ n'a pas de sens physique (erreur d'énoncé ?).

10. La solution de nombre d'onde $q' = q + h \frac{2\pi}{a}$ s'écrit :

$$u_{n,q'}(t) = u_0 \exp i(q'na - \omega t) = u_0 \exp i(qna - \omega t) \exp(ihn2\pi) = u_0 \exp i(qna - \omega t) = u_n(t)$$

Les deux solutions de nombres d'onde q et q' sont donc identiques. Il suffit donc d'envisager toutes les valeurs de q comprises dans un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{a}$. On peut donc se restreindre à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$ appelé première zone de Brillouin.

11.



12. Pour $\frac{qa}{2} \ll 1$, soit $q \ll \frac{2}{a}$, $\omega \approx a \sqrt{\frac{K}{m}} |q|$. Cette condition peut être réécrite en termes de longueur d'onde : comme $q = \frac{2\pi}{\lambda}$, la condition de linéarisation de la relation de dispersion s'écrit aussi $a \ll \frac{\lambda}{\pi}$. En ordre de grandeur, c'est la même condition que celle de l'approximation continue. Dans ces conditions :

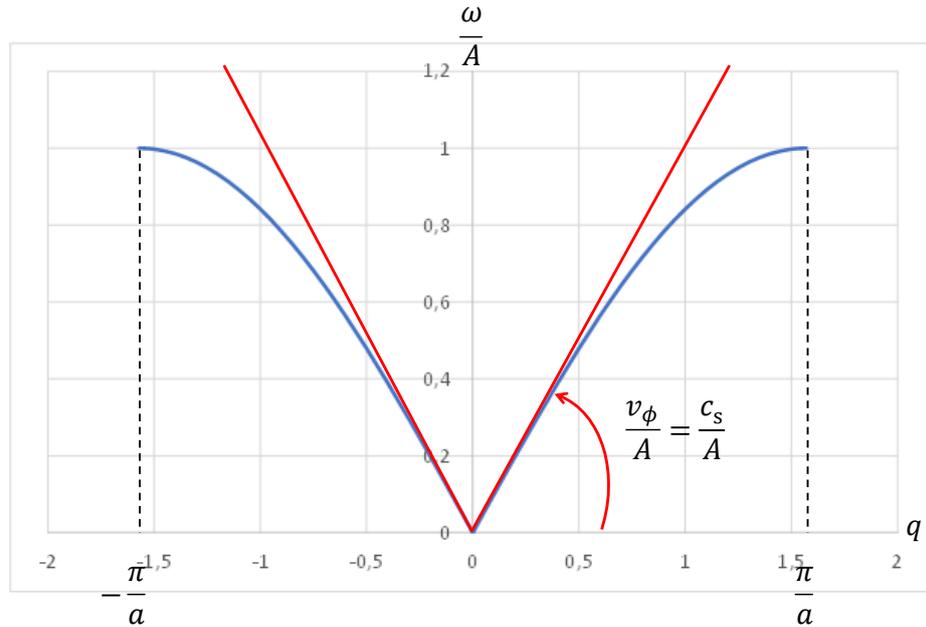
$$\omega \approx \pm a \sqrt{\frac{K}{m}} q$$

Le facteur de proportionnalité n'est autre que la vitesse de phase de l'onde (positive ou négative, selon son sens de propagation) :

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{q} = \pm a \sqrt{\frac{K}{m}}$$

On retrouve d'ailleurs la célérité $c_s = a \sqrt{\frac{K}{m}}$ trouvée à la question 7. C'est cohérent.

La vitesse de phase dans la zone centrale de la première zone de Brillouin est la pente locale de la courbe $\omega(q)$:



13. Le photon est la particule associée à la propagation d'une onde électromagnétique, dont la relation de dispersion dans le vide est également linéaire : $\omega = ck$.

II. Fonctionnement d'un transducteur piézoélectrique

II.A. Modèle électromécanique de la piézoélectricité

14. L'équation locale de Maxwell-Gauss $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ est équivalente au théorème de Gauss (question de cours) $\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$.
15. Le vecteur $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ vérifie l'équation locale $\text{div} \vec{D} = \epsilon_0 \text{div} \vec{E} + \text{div} \vec{P} = \rho - \rho_{\text{liée}}$. Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{D} = \rho_{\text{libre}} \\ \oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = Q_{\text{libre}}^{\text{int}} \end{array} \right.$$

NB : le vecteur \vec{D} joue en électrostatique un rôle analogue à celui de \vec{H} en magnétostatique. La polarisation \vec{P} est l'équivalent de l'aimantation \vec{M} .

- 16.a. Dans chacune des zones I, II et III, il n'y a aucune charge libre volumique : dans les régions I et III, c'est évident car on est dans le vide ; dans la région II, on est dans l'isolant qui ne contient que des charges liées. Donc $\text{div} \vec{D} = 0$ dans chacune des trois zones.

D'autre part, nous sommes en présence d'un problème à 1 dimension, invariant par translation parallèlement aux axes (Oy) et (Oz). Dans un tel problème, on sait (cf cours) que $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$. Comme $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, \vec{D} a les mêmes propriétés de symétrie que \vec{E} (\vec{P} aussi d'ailleurs) : c'est un vrai vecteur. Par conséquent : $\vec{D} = D(x)\vec{u}_x$.

On en conclut que $\frac{dD}{dx} = 0$ dans chacune des trois zones. Par conséquent,

$$\begin{cases} \vec{D}(x < 0) = D_I \vec{u}_x \\ \vec{D}(0 < x < L) = D_{II} \vec{u}_x \\ \vec{D}(x > L) = D_{III} \vec{u}_x \end{cases}$$

NB : les trois constantes sont *a priori* différentes car les deux armatures portent des charges *surfaiques*. \vec{D} n'est donc pas une fonction continue.

- 16.b.** Le plan $x = \frac{L}{2}$ est un plan d'antisymétrie pour la distribution de charges libres. C'est donc aussi un plan d'antisymétrie pour le vecteur \vec{D} . On en déduit que $D_I = D_{III}$.

Ce résultat peut aussi être montré par le théorème de Gauss. Considérons une surface de Gauss cylindrique, de section S , de génératrices parallèles à \vec{u}_x , englobant complètement le système \mathcal{S} . Le théorème de Gauss donne :

$$D_{III} \times S - D_I \times S = Q - Q = 0$$

Pour montrer que $D_I = D_{III} = 0$, je ne vois pas d'autre argument que de dire que ses lignes de champ sont totalement confinées entre les armatures, du fait de l'absence d'effets de bords.

NB : on pourrait aussi considérer (mais je ne pense pas que ce soit la démarche attendue par l'énoncé) que \vec{D} est créé uniquement par les deux armatures de charges Q et $-Q$ puisqu'il n'est relié qu'aux charges libres. Il est donc créé par deux plans infinis uniformément chargés : $\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$ avec

$$\begin{cases} \vec{D}_1(x < 0) = \frac{Q}{2S} \vec{u}_x \\ \vec{D}_1(x > 0) = -\frac{Q}{2S} \vec{u}_x \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \vec{D}_2(x < L) = -\frac{Q}{2S} \vec{u}_x \\ \vec{D}_2(x > L) = \frac{Q}{2S} \vec{u}_x \end{cases}.$$

On en déduit :
$$\begin{cases} \vec{D}(x < 0) = \vec{0} \\ \vec{D}(0 < x < L) = -\frac{Q}{S} \vec{u}_x \\ \vec{D}(x > L) = \vec{0} \end{cases}$$

- 16.c.** Sachant que \vec{D} est nul en dehors du système, considérons une surface de Gauss de même géométrie qu'à la question précédente, mais n'englobant que l'armature de droite, portant la charge Q . Le théorème de Gauss donne : $D_{III} \times S - D_{II} \times S = Q$ soit :

$$\vec{D}(0 < x < L) = -\frac{Q}{S} \vec{u}_x$$

- 16.d.** Etant donné que l'isolant est linéaire, $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$. Donc $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$. On en déduit donc :

$$\vec{E}(0 < x < L) = -\frac{Q}{\epsilon_0\epsilon_r S} \vec{u}_x$$

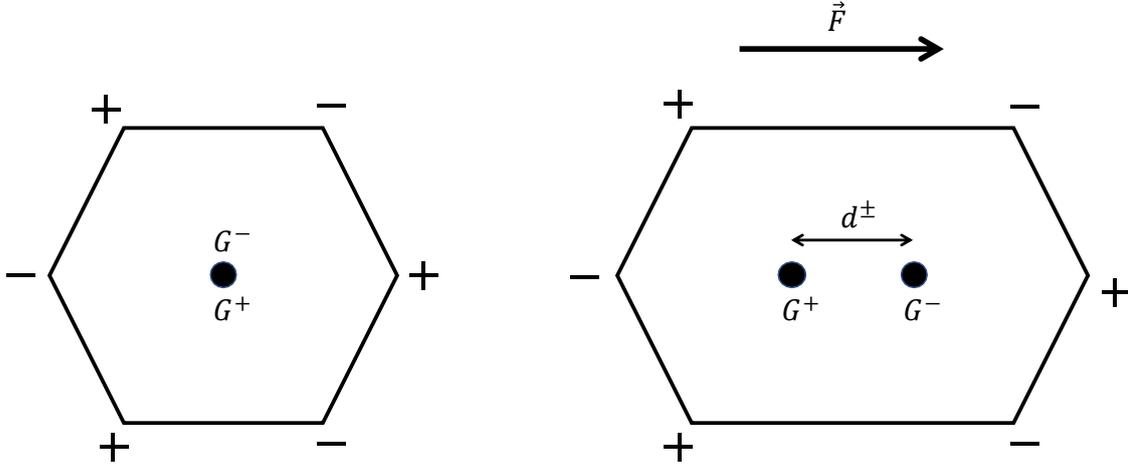
Par définition du potentiel électrostatique, la tension $U = V(L) - V(0)$ est donnée par

$$U = -\int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{r} = -EL = \frac{Q}{\epsilon_0\epsilon_r S} L$$

On en déduit la capacité C du condensateur :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{L}$$

17. Le moment dipolaire vaut $p_{\text{hex}} = 3ed^\pm$ puisque chaque barycentre porte la charge $3e$.



18. Etant donné que $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} + \epsilon_0\epsilon_r\frac{\gamma\xi}{L}\vec{u}_x$, $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\left(\vec{E} + \frac{\gamma\xi}{L}\vec{u}_x\right)$. Or, \vec{D} (qui ne dépend que des charges libres) est toujours donné par $\vec{D}(0 < x < L) = -\frac{Q}{S}\vec{u}_x$. On en déduit donc :

$$\vec{E}(0 < x < L) = -\left(\frac{Q}{\epsilon_0\epsilon_r S} + \frac{\gamma\xi}{L}\right)\vec{u}_x$$

Par définition du potentiel électrostatique, la tension $U = V(L) - V(0)$ est donnée par

$$U = -\int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{r} = -EL = \frac{Q}{\epsilon_0\epsilon_r S}L + \gamma\xi = \frac{Q}{C} + \gamma\xi$$

19. Le principe de l'action et de la réaction donne la force de rappel subie par l'armature mobile :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -\vec{F} = -(\gamma Q + k\xi)\vec{u}_x$$

La 2^{nde} loi de Newton appliquée l'armature mobile et projetée sur \vec{u}_x donne :

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\alpha \frac{d\xi}{dt} - (\gamma Q + k\xi)$$

soit :

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} + \alpha \frac{d\xi}{dt} + k\xi + \gamma Q = 0$$

20. L'équation (11) donne $Q = C(U - \gamma\xi)$. On en déduit :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{d\xi}{dt} + \frac{k - \gamma^2 C}{m} \xi = -\frac{\gamma C}{m} U$$

En régime sinusoïdal forcé, on obtient la fonction de transfert :

$$\underline{H}_{\text{elm}}(i\omega) = \frac{-\frac{\gamma C}{m}}{\frac{k - \gamma^2 C}{m} - \omega^2 + i \frac{\alpha}{m} \omega}$$

On identifie facilement $\omega_0 = \sqrt{\frac{k - \gamma^2 C}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q_{\text{elm}}} = \frac{\alpha}{m}$ donc $Q_{\text{elm}} = \frac{\sqrt{m(k - \gamma^2 C)}}{\alpha}$. Par conséquent,

$$\underline{H}_{\text{elm}}(i\omega) = \frac{-\frac{\gamma C}{m\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i \frac{\omega}{\omega_0 Q_{\text{elm}}}}$$

Donc : $H_0 = -\frac{\gamma C}{m\omega_0^2} = -\frac{\gamma C}{k - \gamma^2 C}$.

21. Le module de la fonction de transfert s'écrit donc :

$$|\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega) = \frac{|H_0|}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q_{\text{elm}}^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

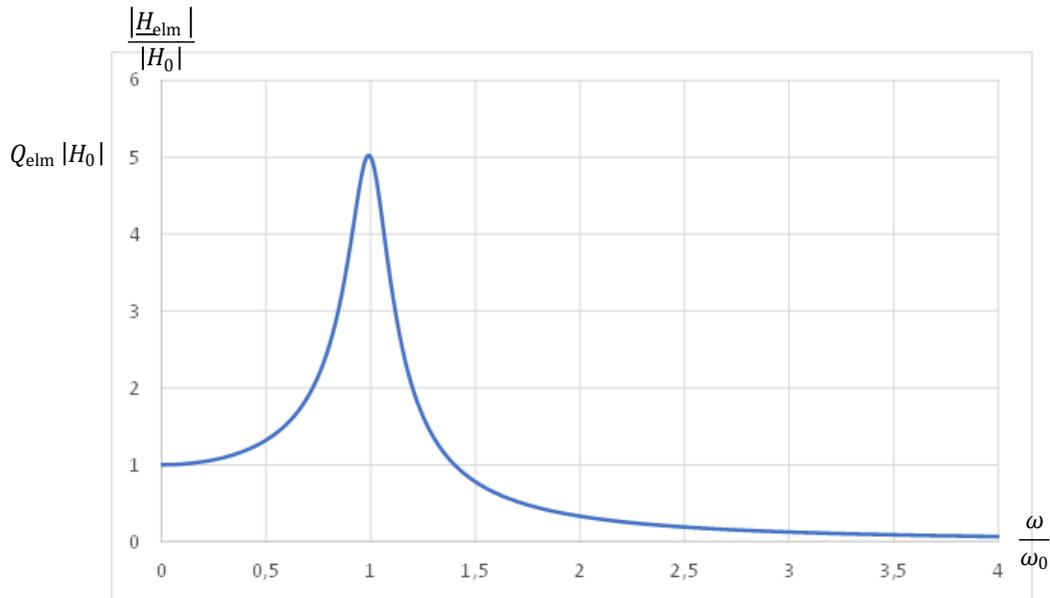
La réponse du système est maximale si $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q_{\text{elm}}^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ est minimal. Posons donc $X = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ et cherchons à minimiser la fonction $f(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q_{\text{elm}}^2}$. Sa dérivée s'écrit : $f'(X) = 2X - 2 + \frac{1}{Q_{\text{elm}}^2}$. Elle s'annule pour $X = 1 - \frac{1}{2Q_{\text{elm}}^2}$. Cette valeur n'est définie positive que si $Q_{\text{elm}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas, $X_m = 1 - \frac{1}{2Q_{\text{elm}}^2}$ ce qui donne :

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_{\text{elm}}^2}}$$

22. Pour $Q_{\text{elm}} \gg 1$, $\omega_m \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q_{\text{elm}}^2}\right) \approx \omega_0$. Le comportement asymptotique de $|\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega)$ est donné par :

$$\begin{cases} |\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega \ll \omega_0) \approx |H_0| \\ |\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega \gg \omega_0) \approx |H_0| \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \end{cases}$$

A la résonance, $|\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega_0) = Q_{\text{elm}} |H_0|$. Voici la courbe des variations de $|\underline{H}_{\text{elm}}|(\omega)$, tracée pour $Q_{\text{elm}} = 5$, pour plus de lisibilité :



23. La courbe expérimentale est en fait un « zoom » sur le domaine de fréquences entourant la résonance. On a donc localement un comportement passe-bande, alors que la fonction de transfert complète est passe-bas.

Le facteur de qualité expérimental valant $Q = 27, \frac{1}{2Q^2} \approx 7 \cdot 10^{-4}$. L'approximation réalisée à la question 22 est donc excellente.

II.B. Modèle électrocinétique d'un transducteur piézoélectrique

24. L'impédance Z_{AB} vérifie :

$$\frac{1}{Z_{AB}} = iC_0\omega + \frac{1}{R_m + iL_m\omega + \frac{1}{iC_m\omega}} = iC_0\omega + \frac{iC_m\omega}{1 + iR_mC_m\omega - L_mC_m\omega^2}$$

En factorisant par $iC_0\omega$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{AB}} &= iC_0\omega \left(1 + \frac{C_m}{C_0(1 + iR_mC_m\omega - L_mC_m\omega^2)} \right) \\ &= iC_0\omega \left(\frac{iR_mC_mC_0\omega + C_0 + C_m - L_mC_mC_0\omega^2}{iR_mC_mC_0\omega + C_0 - L_mC_mC_0\omega^2} \right) \end{aligned}$$

En divisant numérateur et dénominateur par $iR_mC_mC_0\omega$, on obtient :

$$\frac{1}{Z_{AB}} = iC_0\omega \frac{1 + i \left(\frac{L_m\omega}{R_m} - \frac{C_0 + C_m}{R_mC_mC_0\omega} \right)}{1 + i \left(\frac{L_m\omega}{R_m} - \frac{1}{R_mC_m\omega} \right)}$$

On en déduit :

$$Z_{AB} = \frac{1}{iC_0\omega} \frac{1 + iQ_r \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)}{1 + iQ_a \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}} \\ Q_r = \frac{1}{R_m} \sqrt{\frac{L_m}{C_m}} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \omega_a = \sqrt{\frac{C_0 + C_m}{L_m C_m C_0}} = \omega_r \sqrt{1 + \frac{C_m}{C_0}} \\ Q_a = \frac{1}{R_m} \sqrt{\frac{L_m (C_0 + C_m)}{C_m C_0}} = Q_r \sqrt{1 + \frac{C_m}{C_0}} \end{cases}.$$

On en déduit :

$$|Z_{AB}| = \frac{1}{C_0\omega} \sqrt{\frac{1 + Q_r^2 \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)^2}{1 + Q_a^2 \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)^2}}$$

25. Le numérateur est minimum (et vaut 1) pour $\omega = \omega_r$; le dénominateur est minimum (et vaut 1) pour $\omega = \omega_a$.

On en déduit (pour peu que les pulsations ω_r et ω_a soient assez écartées et que les facteurs de qualité Q_r et Q_a soient assez grands) que $|Z_{AB}|(\omega_r)$ est un minimum de $|Z_{AB}|$ tandis que $|Z_{AB}|(\omega_a)$ est un maximum de $|Z_{AB}|$.

26. Si l'amplitude la tension est fixée, l'amplitude du courant (et donc la puissance fournie au transducteur) est maximale pour $\omega = \omega_r$ et minimale pour $\omega = \omega_a$. On a donc une résonance concernant l'émission sonore pour $\omega = \omega_r$ et une antirésonance pour $\omega = \omega_a$.

II.C. Lien entre le modèle électromécanique et le circuit équivalent

27. Les équation (11) (sous la forme $\gamma\xi = U - \frac{Q}{C}$) et (13) donnent :

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dU}{dt} + \frac{k}{m} U(t) = \frac{1}{C} \left(\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dQ}{dt} + \left(\frac{k - \gamma^2 C}{m} \right) Q \right)$$

En passant en notation complexe, on obtient :

$$\frac{\underline{U}}{\underline{Q}} = \frac{1}{C} \frac{\frac{k - \gamma^2 C}{m} + i \frac{\alpha}{m} \omega - \omega^2}{\frac{k}{m} + i \frac{\alpha}{m} \omega - \omega^2}$$

On en déduit l'impédance $Z_S = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}}{i\omega\underline{Q}}$:

$$Z_S = \frac{1}{iC\omega} \frac{1 + i \left(\frac{m}{\alpha} \omega - \frac{k - \gamma^2 C}{\alpha\omega} \right)}{1 + i \left(\frac{m}{\alpha} \omega - \frac{k}{\alpha\omega} \right)}$$

qui est bien de la forme de l'équation (15).

28. On avait trouvé à la question 24 l'expression :

$$Z_{AB} = \frac{1}{iC_0\omega} \frac{1 + i\left(\frac{L_m\omega}{R_m} - \frac{1}{R_m C_m \omega}\right)}{1 + i\left(\frac{L_m\omega}{R_m} - \frac{C_0 + C_m}{R_m C_m C_0 \omega}\right)}$$

En comparant Z_{AB} et Z_S terme à terme, on en déduit :

$$\begin{cases} C_0 = C \\ \frac{L_m}{R_m} = \frac{m}{\alpha} \\ \frac{1}{R_m C_m} = \frac{k - \gamma^2 C}{\alpha} \\ \frac{C_0 + C_m}{R_m C_m C_0} = \frac{k}{\alpha} \end{cases}$$

Les deux dernières équations fournissent $C_m = C_0 \frac{\gamma^2 C}{k - \gamma^2 C} = \frac{\gamma^2 C^2}{k - \gamma^2 C}$. On déduit des deux équations « du milieu » et de l'expression de C_m : $L_m = \frac{m}{\gamma^2 C^2}$. Enfin, on obtient : $R_m = \frac{\alpha}{m} L_m = \frac{\alpha}{\gamma^2 C^2}$. Finalement, cela donne :

$$\begin{cases} C_0 = C \\ R_m = \frac{\alpha}{\gamma^2 C^2} \\ L_m = \frac{m}{\gamma^2 C^2} \\ C_m = \frac{\gamma^2 C^2}{k - \gamma^2 C} \end{cases}$$

29. Le seul élément qui consomme de la puissance moyenne (et donc, qui dissipe de l'énergie) est la résistance R_m . Celle-ci est proportionnelle au coefficient α intervenant dans l'expression de la force de frottement, seule force dissipative, du modèle électromécanique. C'est donc parfaitement cohérent.

III. Analyseur spectral

III.A. Interaction entre un champ électromagnétique et les phonons

30. La relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans le vide s'écrit : $k = \frac{\omega}{c}$.
31. On écrit la conservation de l'énergie : $\hbar\omega + \hbar\Omega = \hbar\omega'$. Par conséquent :

$$\omega' = \omega + \Omega$$

32. Un laser de longueur d'onde $\lambda = 600$ nm est de couleur rouge.

Les relations de dispersion des photons et du phonon s'écrivent $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, $\lambda' = \frac{2\pi c}{\omega'}$ et $\Lambda = \frac{2\pi c_s}{\Omega}$. Par conséquent, $\frac{1}{\Lambda} = \frac{c}{c_s} \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda \lambda'} = \frac{c}{c_s} \frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda - \Delta\lambda)}$. Pour mesurer Λ , il faut donc mesurer $\Delta\lambda = \lambda - \lambda'$.

Puisque $\lambda = \frac{c}{f}$ et $\lambda' = \frac{c}{f'} = \frac{c}{f+F}$, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = c \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f+F} \right) = \frac{cF}{f(f+F)}$. Or, $F = 200$ MHz et $f = \frac{c}{\lambda} = 5 \cdot 10^{14}$ Hz. On en déduit :

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' \approx \frac{cF}{f^2} = \frac{3 \cdot 10^8 \times 2 \cdot 10^8}{25 \cdot 10^{28}} \approx 0,2 \text{ pm}$$

Cette variation de longueur d'onde est très en-dessous de la limite de résolution d'un spectromètre optique et n'est donc pas décelable par cette technique.

33. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit $\hbar\vec{k}_i + \hbar\vec{q} = \hbar\vec{k}_f$ soit : $\vec{k}_i + \vec{q} = \vec{k}_f$. En projetant sur la direction de propagation du photon incident et sur la direction de propagation du phonon, on obtient respectivement :

$$\begin{cases} k_f \cos \theta = k_i \\ k_f \sin \theta = q \end{cases}$$

34. D'après la question 32, on sait que $k_f = \frac{2\pi}{\lambda'} \approx \frac{2\pi}{\lambda}$. D'autre part, $q = \frac{\Omega}{c_s} = \frac{2\pi F}{c_s}$. On en déduit :

$$\sin \theta = \frac{\lambda F}{c_s} \approx 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

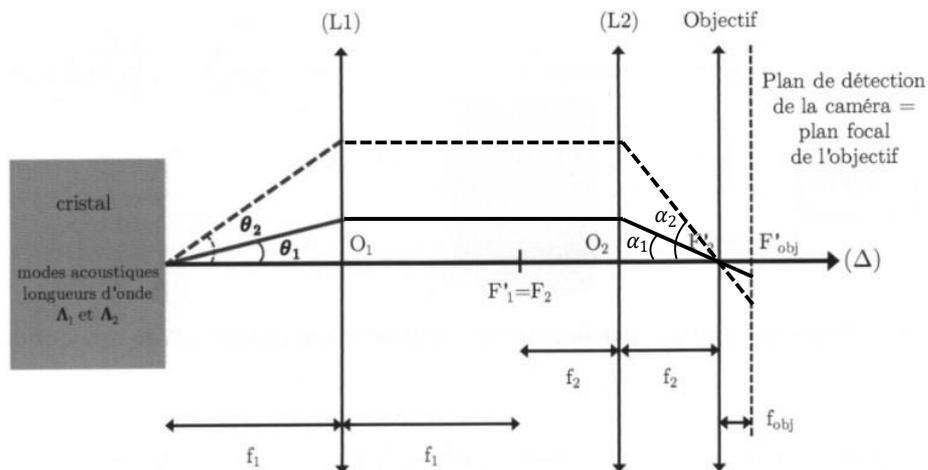
35. Vu la valeur de $\sin \theta$, il est donc légitime d'écrire :

$$\theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda F}{c_s} = \frac{\lambda}{\Lambda}$$

On reconnaît la formule donnant l'angle de diffraction d'un faisceau lumineux de longueur d'onde λ par un motif de taille Λ .

III.B. Montage optique

- 36.



37. On voit que le schéma précédent que $f_1 \tan \theta_1 = f_2 \tan \alpha_1$. Or, $\tan \alpha_1 = \frac{F'_{obj} c_1}{f_{obj}}$. On en déduit :

$$F'_{\text{obj}} C_1 = f_{\text{obj}} \frac{f_1}{f_2} \tan \theta_1 \approx f_{\text{obj}} \frac{f_1}{f_2} \theta_1$$

38. D'après le résultat obtenu à la question 37, la résolution angulaire du montage est fixée par la taille d'un pixel :

$$\Delta\theta = \frac{f_2 d_{\text{pixel}}}{f_1 f_{\text{obj}}}$$

Or, on sait que $\Lambda = \frac{\lambda}{\theta}$. En différentiant cette relation, on obtient : $\Delta\Lambda \approx \frac{\lambda}{\theta^2} \Delta\theta$. Or, $\theta_0 = \frac{\lambda}{\Lambda_0}$.

Par conséquent :

$$\Delta\Lambda = \frac{\Lambda_0^2}{\lambda} \Delta\theta$$

Numériquement, on trouve $\Delta\theta = 2,4 \cdot 10^{-3}$ rad, $\Lambda_0 = \frac{c_s}{F} = 50$ μm et $\Delta\Lambda = 0,1$ μm .

Pour augmenter la résolution, il faut diminuer la valeur de $\Delta\theta$ et donc diminuer f_2 et augmenter f_1 .

39. Le faisceau n°1 ne traverse pas le cristal donc $\omega_1 = \omega$. Le faisceau n°2 traverse le cristal donc, d'après la question 31, $\omega_1 = \omega + \Omega$.

40. Les équations de Maxwell étant linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition.

41. Les deux signaux s'écrivent donc : $\begin{cases} s_1(t) = s_0 \cos(\omega t) \\ s_2(t) = s_0 \cos((\omega + \Omega)t) \end{cases}$. Calculons $s_{\text{tot}}^2(t)$:

$$s_{\text{tot}}^2(t) = s_0^2 (\cos^2(\omega t) + \cos^2((\omega + \Omega)t) + 2 \cos(\omega t) \cos((\omega + \Omega)t))$$

Cela se réécrit sous la forme :

$$s_{\text{tot}}^2(t) = s_0^2 (\cos^2(\omega t) + \cos^2((\omega + \Omega)t) + \cos((2\omega + \Omega)t) + \cos(\Omega t))$$

Ici, il y a une erreur d'énoncé : l'intensité lumineuse vaut en réalité

$$I_{\text{lum}}(t) = \langle s_{\text{tot}}^2(t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}}$$

Or, $\tau_{\text{réponse}} = 10$ ps, $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2 \cdot 10^{-15}$ s et $\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{1}{F} = 5$ ns.

Donc $\tau_{\text{réponse}} \gg \frac{2\pi}{\omega} > \frac{2\pi}{\omega + \Omega} > \frac{2\pi}{2\omega + \Omega}$: $\begin{cases} \langle \cos^2(\omega t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}} = \langle \cos^2((\omega + \Omega)t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}} = \frac{1}{2} \\ \langle \cos((2\omega + \Omega)t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}} = 0 \end{cases}$.

Mais $\tau_{\text{réponse}} \ll \frac{2\pi}{\Omega}$. Par conséquent, le capteur est assez rapide pour suivre les variations de $\cos(\Omega t)$: $\langle \cos(\Omega t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}} = \cos(\Omega t)$. On en déduit :

$$I_{\text{lum}}(t) = \langle s_{\text{tot}}^2(t) \rangle_{\tau_{\text{réponse}}} = s_0^2 (1 + \cos(\Omega t))$$

Le signal de sortie de la photodiode étant proportionnel à $I_{\text{lum}}(t)$, il varie sinusoidalement avec une pulsation Ω (à une composante continue près). On peut donc mesurer Ω .

III.C. Traitement du signal obtenu

42. D'après la question précédente, il est évident que $\omega_{\text{alt}} = \Omega$.

Si $u(t) = u_{\text{alt}}(t) = u_{\text{alt},0} \cos(\Omega t)$, le signal de sortie du multiplieur s'écrit :

$$U_m(t) = K u_{\text{alt},0} u_{\text{réf},0} \cos(\Omega t) \cos(\omega_{\text{réf}} t) = \frac{K u_{\text{alt},0} u_{\text{réf},0}}{2} (\cos((\Omega + \omega_{\text{réf}})t) + \cos((\Omega - \omega_{\text{réf}})t))$$

43. Le terme $\cos((\Omega + \omega_{\text{réf}})t)$ a une fréquence comprise entre 400 MHz et 430 MHz, en-dehors de la bande passante de l'oscilloscope (il faudra donc le filtrer). Mais Le terme $\cos((\Omega - \omega_{\text{réf}})t)$ a une fréquence inférieure à 30 MHz, et se situe donc dans la bande passante de l'oscilloscope : il est donc exploitable.
44. Question de cours de base : il s'agit bien sûr d'un filtre RC passe-bas du 1^{er} ordre (tension prise aux bornes de C), de fréquence de coupure $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$. Ce filtre doit atténuer suffisamment le terme fréquence supérieure à 400 MHz, mais laisser passer le terme de fréquence inférieure à 30 MHz. On peut proposer $f_c = 40$ MHz. Dans ce cas, la constante de temps du filtre vaut $RC = \frac{1}{2\pi f_c} \approx 0,4$ ns (ce qui est peu). Un couple de valeurs plausibles serait par exemple $R = 100 \Omega$ et $C = 4$ pF.
45. On peut bien sûr recourir à la FFT de l'oscilloscope.
46. On distingue trois raies de fréquences 1 MHz, 3 MHz et 11 MHz (qui correspondent à $F - f_{\text{réf}}$). Les fréquences des modes acoustiques correspondantes sont donc 201 MHz, 203 MHz et 211 MHz.
47. Dévier la lumière incidente dans une direction donnée, dépendant du phonon ? Mais dans ce cas, il faudrait des phonons plus énergétiques, de fréquence plus élevée...