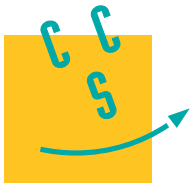


Compilation de problèmes de concours

Révisions des écrits 2024-2025

CENTRALE PC2 2016
MINES PC1 2019
CENTRALE PC2 2021
MINES PSI2 2021
MINES PC1 2022

PC* Pasteur



Vers une nouvelle définition du kelvin

L'actuelle définition de l'unité de température, le kelvin, est fondée sur la valeur du point triple de l'eau, fixé à la température $T_{PT} = 273,16$ K.



Figure 1 Appareil à point triple de l'eau

Pour s'abstraire de la référence à une substance particulière, en l'occurrence l'eau, il serait préférable de relier la définition de l'unité de température à des constantes fondamentales. Ainsi, dans la future définition du système international d'unités, il est envisagé de fixer une valeur numérique exacte de la constante de Boltzmann k_B . Le kelvin serait alors défini par

Le kelvin est l'unité de température thermodynamique ; son amplitude est déterminée en fixant la valeur numérique de la constante de Boltzmann à exactement $1,3806xx \times 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en $\text{s}^{-2} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}^{-1}$, unité du SI égale au $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Le symbole xx désigne les chiffres qui entreront dans le choix de k_B et qui seront fixés par l'incertitude atteinte dans plusieurs expériences en cours de développement. Par conséquent, la mesure d'une température ne portera plus sur T seul, mais sur le produit $k_B T$, lui-même relié au mètre, à la seconde et au kilogramme. Pour que le choix de la valeur exacte de k_B soit pertinent, il est essentiel que les mesures actuelles de k_B soient réalisées à l'aide d'expériences faisant appel à des lois physiques différentes. Ce problème étudie plusieurs méthodes de mesure de cette constante.

La constante des gaz parfaits R est liée à la constante de Boltzmann k_B et à la constante d'Avogadro N_A par $R = N_A k_B$.

Les différentes parties de ce problème sont indépendantes. Une liste de données utiles et un formulaire figurent en fin d'énoncé.

I L'agitation thermique

I.A – L'agitation thermique dans l'atmosphère

I.A.1) On décrit le champ de pression d'une atmosphère isotherme de température T dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$. Le modèle de fluide est celui du gaz parfait ; la masse molaire du gaz est M . À l'altitude nulle $z = 0$, la pression est P_0 , la densité volumique de molécules est N_0 .

a) Établir, à partir de l'équilibre d'un domaine d'atmosphère, l'expression de la pression $P(z)$.

b) En déduire l'expression de la densité volumique $n_v(z) = N_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$ en fonction de l'altitude, où m est la masse d'une molécule. Que représente le terme mgz pour une molécule ?

I.A.2) Déduire de la loi précédente une hauteur caractéristique H de l'atmosphère, en fonction de k_B , T , m et g . Quelle vitesse v_ℓ atteindrait une molécule en chute libre tombant de la hauteur H sans vitesse initiale ?

Comparer v_ℓ à la vitesse quadratique moyenne v_q donnée par $v_q^2 = \frac{3k_B T}{m}$ de cette molécule dans un gaz à la température T .

I.A.3) Les molécules de l'atmosphère gardent une agitation incessante. Pourtant, l'expérience de la vie courante montre qu'une balle qu'on lance finit par s'immobiliser, après éventuellement quelques rebonds.

Y a-t-il vraiment immobilisation absolue de la balle ?

I.B – L'agitation thermique dans un circuit électrique

I.B.1) Dans un métal à la température T , les électrons libres forment un gaz circulant dans le réseau cristallin des cations. Peut-on utiliser la physique non relativiste pour décrire les électrons libres à température ambiante ?

L'agitation thermique des électrons libres est responsable de fluctuations de l'intensité électrique traversant un circuit, appelées bruit thermique. Ainsi, même en l'absence de générateur, il apparaît dans un circuit fermé comportant une résistance, à toute température T non nulle, une intensité $i(t)$ et une tension $u(t)$ fluctuantes. Il s'agit ici d'établir l'expression, appelée formule de NYQUIST, de la valeur efficace de cette tension d'origine thermique.

I.B.2) Soit le circuit formé d'un condensateur de capacité C et d'une bobine idéale d'inductance L (figure 2).

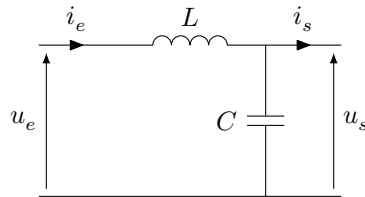


Figure 2 Circuit LC

Établir deux relations indépendantes entre les grandeurs temporelles u_e , u_s , i_e , i_s et leurs dérivées.

I.B.3) Pour étudier les fluctuations de tension et d'intensité liées au bruit thermique d'une résistance, on place à la suite de celle-ci une ligne électrique bifilaire constituée de deux fils parallèles. Cette ligne est repérée par l'axe Ox . On considère dans cette question une portion de ligne de longueur infinitésimale dx et on note respectivement λ et γ les inductance et capacité linéiques de cette ligne (figure 3).

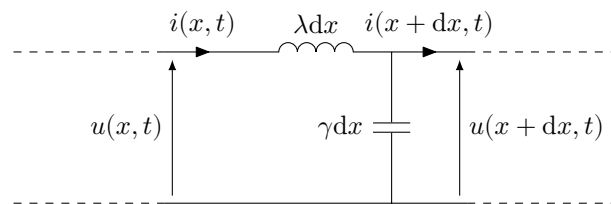


Figure 3 Schéma électrique d'une portion de ligne de longueur dx

- Établir deux équations aux dérivées partielles indépendantes reliant les fonctions $u(x, t)$ et $i(x, t)$, λ et γ .
- En déduire l'équation de propagation pour la seule fonction $u(x, t)$. Donner l'expression de la célérité c_e des ondes en fonction de λ et γ .
- Soient $\underline{u}(x, t) = \underline{U} \exp i(\omega t - kx)$ et $\underline{i}(x, t) = \underline{I} \exp i(\omega t - kx)$ les solutions harmoniques en notation complexe. Établir l'équation de dispersion de la ligne. On appelle résistance caractéristique de la ligne le rapport $R_c = \underline{U}/\underline{I}$. Exprimer λ et γ en fonction de la célérité c_e et de R_c .

I.B.4) La ligne précédente a pour longueur D . Elle est fermée à ses deux extrémités par un court-circuit (figure 4) après avoir été alimentée par un générateur de tension.

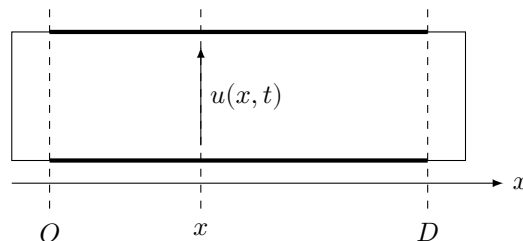


Figure 4 Ligne court-circuitée

- On cherche les solutions $u(x, t)$ pouvant exister sur la ligne fermée sous forme de modes propres

$$u(x, t) = U(x) \cos(\omega t)$$

Établir l'équation différentielle régissant $U(x)$.

Montrer, en précisant les conditions aux limites, que les solutions s'écrivent

$$U(x) = U_{0n} \sin(K_n x)$$

où K_n est proportionnel à un entier n appelé l'ordre du mode et U_{0n} une constante quelconque. En déduire les pulsations ω_n des modes propres en fonction de n , D et c_e .

b) Dans un intervalle de fréquence de largeur Δf , quel est le nombre N de modes propres ? On supposera que Δf est suffisamment grand pour que N soit grand devant 1 ($N \gg 1$).

c) Soit $u_n(x, t)$ le mode propre d'ordre n d'amplitude U_{0n} . Quelle est l'expression de l'intensité $i_n(x, t)$ du mode d'ordre n , en fonction de U_{0n} , n , R_c , D et ω_n ? On prendra l'intensité nulle pour $U_{0n} = 0$.

I.B.5)

a) Donner l'expression de l'énergie $de_n(x, t)$ emmagasinée dans le tronçon de ligne entre les abscisses x et $x + dx$ pour le mode d'ordre n , en fonction de U_{0n} , γ , λ , K_n et ω_n . Exprimer sa moyenne temporelle $\langle de_n \rangle(x)$. Commenter.

b) En déduire l'énergie moyenne $\langle E_n \rangle$ du mode d'ordre n dans la ligne entière en fonction de U_{0n} , R_c , c_e et D .

I.B.6) Les modes propres sont générés par l'agitation thermique dans la résistance branchée à l'entrée de la ligne, qui est ensuite remplacée instantanément par un court-circuit. Le transfert d'énergie entre la résistance et la ligne est réalisé lorsque la résistance caractéristique R_c de la ligne est égale à la résistance R . Dans ce cas, on montre qu'en moyenne, l'énergie du mode d'ordre n est $\langle E_n \rangle = k_B T$.

a) En déduire l'expression du carré de la valeur efficace $u_{\text{eff } n}^2(x)$ de la tension du mode d'ordre n au point x , en fonction de R , D , c_e , k_B et T . Montrer que $u_{\text{eff } n}^2(x) = U_{\text{eff } n}^2 \sin^2(K_n x)$ où $U_{\text{eff } n}$ est une constante, appelée valeur efficace du mode n , qu'on déterminera.

b) Les carrés des valeurs efficaces des différents modes s'ajoutent. En déduire que la valeur efficace U_{eff} correspondant aux modes dont les fréquences sont comprises dans l'intervalle de fréquence de largeur Δf est donnée par la formule de NYQUIST

$$u_{\text{eff}} = \sqrt{4 k_B T R \Delta f}$$

I.B.7) Les modes propres générés par la résistance sont mesurés par une chaîne électronique schématisée ci-dessous (figure 5).

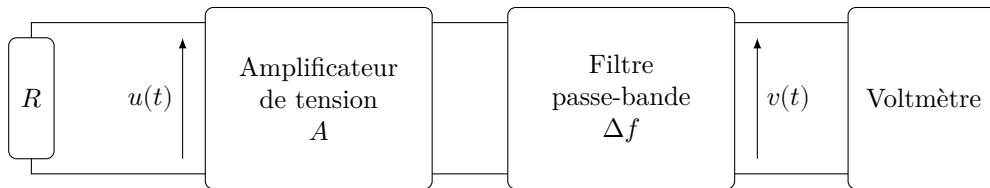


Figure 5 Mesure de la tension efficace de bruit thermique

On trace (figure 6) la valeur efficace v_{eff} mesurée par le voltmètre en fonction de la résistance pour deux valeurs de la bande passante Δf , pour $A = 500$ et $T = 300$ K.

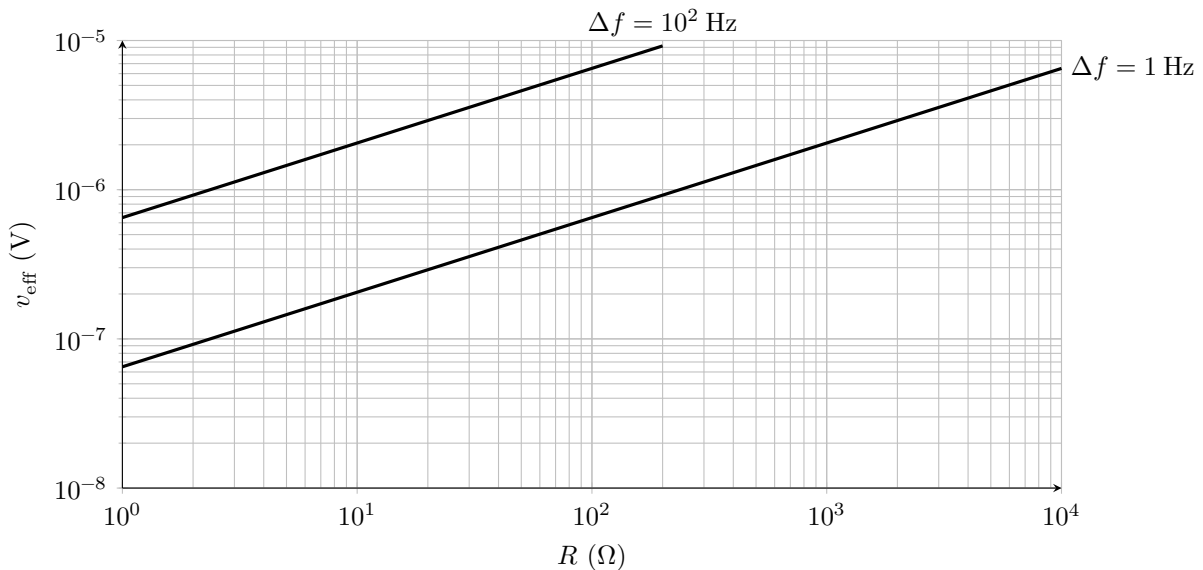


Figure 6 Valeurs efficaces $v_{\text{eff}}(R)$

a) Montrer que ces courbes sont compatibles avec la formule de NYQUIST. En déduire un ordre de grandeur de la constante de Boltzmann.

b) Pourquoi faut-il protéger le montage expérimental par une enceinte métallique ?

Une mesure précise nécessite plusieurs jours d'acquisition. Quels sont alors les facteurs qui peuvent en limiter la précision ?

II Mesure acoustique

La méthode consiste à mesurer la vitesse des ondes acoustiques dans un gaz, l'argon, en utilisant un résonateur sphérique de rayon a . Ces mesures sont effectuées à la température T_{PT} du point triple de l'eau, pour des pressions statiques allant de 0,5 à 7 bar.

II.A – Principe

On considère une onde acoustique plane, se propageant selon l'axe cartésien Ox . Cette onde est décrite par le champ de surpression $\pi(x, t)$, le champ eulérien des vitesses $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{e}_x$ et le champ de masse volumique $\mu(x, t)$. Le milieu de propagation est un fluide caractérisé par sa masse volumique statique μ_0 , sa pression statique P_0 et sa compressibilité isentropique $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$.

II.A.1) À la température $T_{PT} = 273,16\text{K}$, quel est l'ordre de grandeur de la pression P_{lim} en dessous de laquelle un gaz réel peut être décrit par le modèle du gaz parfait ? On considérera que les interactions intermoléculaires ont une portée de l'ordre de 5 nm et qu'un gaz est parfait si les distances moyennes entre molécules sont supérieures à la portée de l'interaction.

II.A.2)

a) Établir, dans le cadre de l'approximation acoustique, l'équation de d'Alembert vérifiée par la surpression $\pi(x, t)$. En déduire l'expression de la célérité c_a des ondes acoustiques en fonction de μ_0 et χ_S .

b) Exprimer la compressibilité isotherme $\chi_T = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T$ d'un gaz parfait.

On montre que $\chi_S = \frac{\chi_T}{\gamma}$, où γ est le coefficient de Laplace. En déduire que

$$c_a^2 = \frac{\gamma \mathcal{N}_A k_B T}{M}$$

où M est la masse molaire du gaz et T la température absolue.

c) Pour un gaz réel, la célérité des ondes acoustiques est donnée, au premier ordre par rapport à la pression P , par

$$c_a^2 = \frac{\gamma \mathcal{N}_A k_B T}{M} (1 + \beta P)$$

où $\beta = 1,3 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$ pour l'argon.

Pour quelles valeurs de la pression la célérité des ondes acoustiques dans l'argon ne s'écarte-t-elle pas de celle d'un gaz parfait de plus de 10^{-6} en valeur relative ?

II.A.3) L'incertitude relative sur k_B doit être au plus égale à 2×10^{-6} . Le tableau ci-dessous donne les valeurs et incertitudes relatives de diverses grandeurs, dont la masse molaire de l'argon (M_{Ar}) et son coefficient de Laplace (γ_{Ar}).

Valeur	Incertainitude relative
$\mathcal{N}_A = 6,022\,140\,86 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	$1,2 \times 10^{-8}$
$M_{\text{Ar}} = 39,947\,85 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$	$1,5 \times 10^{-6}$
$\gamma_{\text{Ar}} = 5/3$	0
$T = T_{PT} = 273,16 \text{ K}$	3×10^{-7}

Déterminer l'expression de l'incertitude relative $\frac{\delta k_B}{k_B}$ en fonction des incertitudes relatives des autres grandeurs.

Quelle est la valeur maximale admissible de l'incertitude relative de la célérité des ondes acoustiques $\frac{\delta c_a}{c_a}$ dans l'argon à la température T_{PT} ?

II.B – L'onde acoustique sphérique

En raison de la forme du résonateur, on étudie les ondes sonores qui possèdent la symétrie sphérique. En particulier, le champ de surpression s'écrit $\pi(r, t)$ et le champ des vitesses $\vec{v}(r, t) = v(r, t) \vec{e}_r$ où r est la coordonnée sphérique radiale et $\vec{e}_r$ le vecteur unitaire associé.

II.B.1) Équation du potentiel

a) Montrer qu'on peut définir un potentiel des vitesses $\phi(r, t)$. Relier une dérivée partielle du potentiel au champ de surpression et à la masse volumique μ_0 , en considérant le potentiel identiquement nul si $\pi(r, t) = 0$ quel que soit le temps t .

b) La surpression obéit à l'équation de d'Alembert généralisée

$$\Delta \pi(r, t) - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2}(r, t) = 0$$

Montrer que le potentiel des vitesses vérifie la même équation.

On cherche des solutions de la forme $\phi(r, t) = f(r) \cos(\omega t)$, appelées modes propres radiaux.

II.B.2) Les ondes sont confinées dans le résonateur (de rayon a).

Quelle en est la conséquence sur l'ensemble des pulsations ω admissibles ?

Les parois du résonateur sont supposées ici indéformables. En déduire une condition aux limites que l'on exprimera sur $f(r)$ ou ses dérivées.

II.B.3) Le vecteur densité de courant énergétique est défini par $\vec{j}_e(r, t) = \pi(r, t) \vec{v}(r, t)$.

Exprimer $\vec{j}_e(r, t)$ en fonction de f , f' , μ_0 et ω .

Interpréter la valeur moyenne $\langle \vec{j}_e \rangle$.

II.B.4) Montrer que la fonction $rf(r)$ vérifie une équation classique dont on donnera les solutions, en posant $k = \frac{\omega}{c_a}$.

L'amplitude des ondes doit être définie en tout point du volume du résonateur ; en déduire l'expression du potentiel $\phi(r, t)$ à une constante multiplicative près.

II.B.5) Donner l'expression de la fréquence de résonance ν_n des modes propres radiaux en fonction de la vitesse du son c_a , du rayon a du résonateur et de la n -ième racine non nulle x_n d'une fonction à préciser.

II.B.6) La précision exigée sur la valeur c_a nécessite des incertitudes sur la mesure du rayon a du résonateur et de la fréquence des modes suffisamment faibles. Les valeurs de ces grandeurs et leurs incertitudes relatives sont tabulées ci-dessous.

Valeur	Incertitude relative
$a = 5,000\,908\,7 \times 10^{-2} \text{ m}$	$1,8 \times 10^{-6}$
$\nu_1 = 4,402\,004\,068 \times 10^3 \text{ Hz}$	5×10^{-10}
$x_1 = 4,493\,409\,457\,91$	2×10^{-11}

En déduire la valeur de la célérité c_a et l'incertitude relative $\frac{\delta c_a}{c_a}$. L'incertitude δc_a est-elle acceptable ?

II.B.7) Calculer la valeur de la constante de Boltzmann k_B déterminée par cette mesure, ainsi que son incertitude relative $\frac{\delta k_B}{k_B}$ et son incertitude absolue δk_B . Combien de chiffres significatifs peut-on fixer par cette mesure ?

III Mesure par spectroscopie laser

La mesure de k_B est réalisée ici par une expérience de spectroscopie laser où une vapeur moléculaire, à l'équilibre thermodynamique, contenue dans une cellule, est en interaction avec une onde laser progressive de fréquence réglable. On enregistre le profil d'absorption autour d'une fréquence de résonance (figure 7).

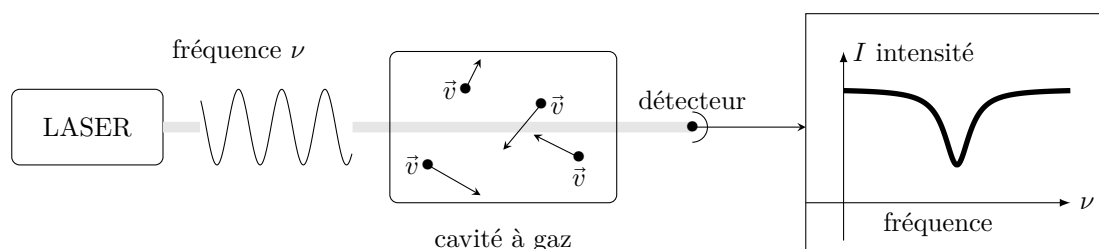


Figure 7 Schéma de principe de la spectroscopie laser

La raie d'absorption moléculaire est élargie par effet Doppler-Fizeau en raison de l'agitation thermique des molécules. La mesure de cette largeur permet d'en déduire une valeur de k_B . La molécule choisie est l'ammoniac NH_3 .

III.A – Conformations de la molécule d'ammoniac

La molécule d'ammoniac $^{14}\text{NH}_3$ se présente sous la forme d'une pyramide symétrique, l'atome d'azote étant à son sommet. Les trois atomes d'hydrogène définissent le plan de référence. La position de l'atome d'azote est repérée par l'abscisse x telle que $|x|$ soit la distance de l'atome au plan de référence Oyz (figure 8).

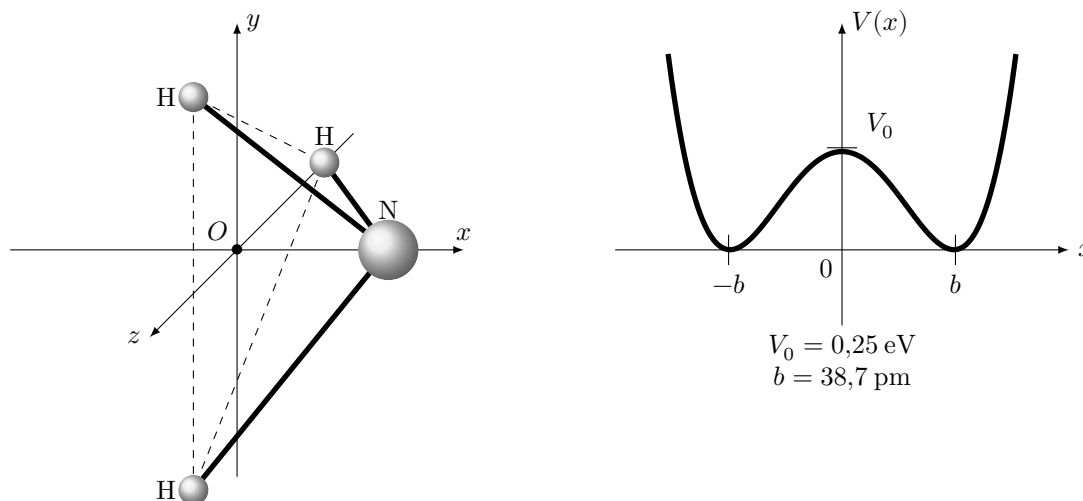


Figure 8 Géométrie et énergie potentielle de la molécule d'ammoniac

III.A.1) Interpréter la forme, la symétrie et les points particuliers de la courbe d'énergie potentielle $V(x)$.

La molécule d'ammoniac peut se trouver dans deux états de conformation, selon que l'atome se trouve du côté $x > 0$ (conformation D, figure 9) ou du côté $x < 0$ (conformation G). Les deux états sont séparés par une barrière de potentiel $V_0 = 0,25 \text{ eV}$. On appelle inversion le passage d'une conformation à l'autre, lorsque l'atome d'azote traverse la barrière d'énergie due aux trois atomes d'hydrogène.

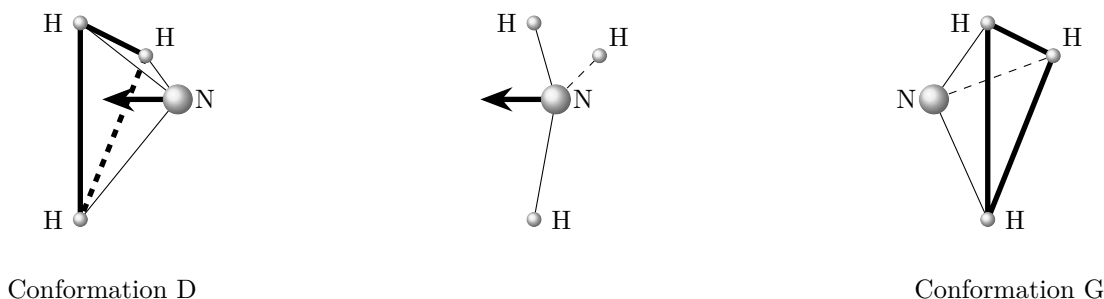


Figure 9 Inversion de la molécule d'ammoniac

III.A.2) L'énergie $k_B T$ est-elle suffisante pour que la molécule puisse s'inverser si la température est celle du point triple de l'eau T_{PT} ?

À partir de quelle température cette inversion peut-elle s'effectuer ? Commenter.

III.B – Inversion quantique de la molécule d'ammoniac

On se propose de montrer que l'inversion de la molécule d'ammoniac est possible du point de vue quantique, indépendamment de la température. La fonction d'onde décrivant le mouvement relatif de l'atome d'azote et des trois atomes d'hydrogène est notée $\psi(x, t)$; elle vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) + V(x)\psi(x, t)$$

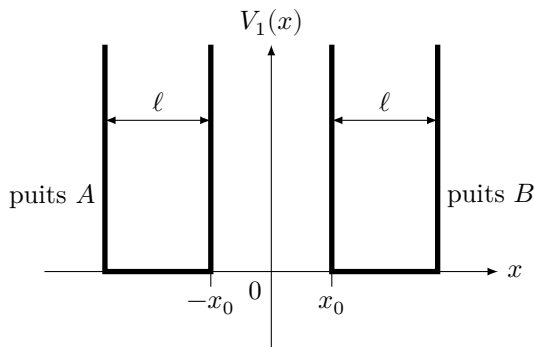
où m est la masse réduite du système composé de l'atome d'azote et des trois atomes d'hydrogène (on prendra $m \approx 2,5 m_H$).

III.B.1) On s'intéresse aux états stationnaires d'énergie E et on pose $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-iEt/\hbar)$.

Montrer que $\varphi(x)$ vérifie l'équation III.1

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 \quad (\text{III.1})$$

On considère dans un premier temps un modèle de potentiel $V_1(x)$ à double puits infini symétrique rectangulaire (figure 10).



$$V_1 = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| < x_0 \\ 0 & \text{si } x_0 \leq |x| \leq x_0 + \ell \\ +\infty & \text{si } x_0 + \ell \leq |x| \end{cases}$$

Figure 10 Profil en double puits infini symétrique rectangulaire

Les fonctions d'onde localisées dans le puits A sont notées $\psi_A(x, t)$, celles localisées dans le puits B, $\psi_B(x, t)$. Les fonctions $\varphi(x)$ associées sont notées respectivement $\varphi_A(x)$ et $\varphi_B(x)$.

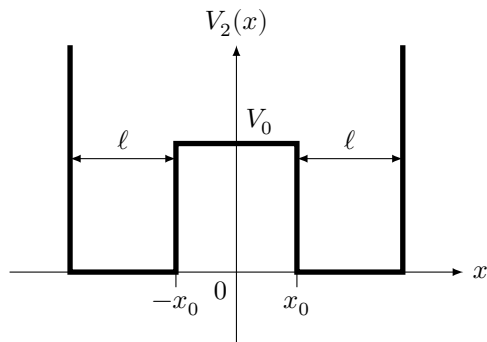
III.B.2)

- Que veut dire qu'une fonction d'onde est localisée sur un domaine ?
- Pourquoi doit-on considérer les fonctions d'onde identiquement nulles pour $|x| < x_0$ et $|x| > x_0 + \ell$? Quelles sont les conditions aux limites de $\varphi_A(x)$ et $\varphi_B(x)$?
- Donner, sous forme intégrale, sans les calculer, les conditions de normalisation pour $\varphi_A(x)$ et $\varphi_B(x)$.

III.B.3)

- Résoudre l'équation III.1 pour le potentiel $V_1(x)$ dans l'intervalle $[-x_0 - \ell, -x_0]$ correspondant au puits A. On donnera les solutions normalisées $\varphi_{A,n}(x)$ indicées par un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et les énergies E_n^A associées.
- Quelles sont, sans calculs, les solutions $\varphi_B(x)$ et les énergies E_n^B ?
- Soit une molécule d'ammoniac dans un état décrit par $\psi_{A,n}(x, t)$ d'énergie E_n^A à un instant t donné. Quelle est la probabilité de trouver l'atome d'azote dans l'intervalle $[x_0, x_0 + \ell]$ à l'instant $t' > t$? Conclure.

On modélise cette fois le profil d'énergie potentielle par un double puits infini rectangulaire à saut fini, $V_2(x)$ (figure 11).



$$V_2 = \begin{cases} V_0 & \text{si } |x| < x_0 \\ 0 & \text{si } x_0 \leq |x| \leq x_0 + \ell \\ +\infty & \text{si } x_0 + \ell \leq |x| \end{cases}$$

Figure 11 Profil en double puits à saut fini

On donne $V_0 = 0,25 \text{ eV}$, $x_0 = 10 \text{ pm}$. On considère $0 \leq E \leq V_0$.

III.B.4) Justifier que dans le domaine $x_0 \leq x \leq x_0 + \ell$, la solution de l'équation III.1 s'écrit

$$\varphi_B(x) = \mathcal{B} \sin(k(x - x_0 - \ell)) \quad \text{avec } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

où $\mathcal{B}$ une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer. En déduire une forme de solution $\varphi_A(x)$ dans le domaine $-x_0 - \ell \leq x \leq -x_0$.

III.B.5) Dans le domaine $-x_0 < x < x_0$, les solutions de l'équation III.1 s'écrivent

$$\varphi_C(x) = C_1 \cosh(Kx) + C_2 \sinh(Kx)$$

où C_1 , C_2 et K sont des constantes.

- Exprimer K en fonction de E , V_0 , m et $\hbar$.

b) Quelles conditions doivent être vérifiées par la fonction d'onde $\psi(x, t)$ en tout point où le potentiel est borné ?

En déduire deux relations entre $\varphi_C(x_0^-)$, $\varphi_B(x_0^+)$, $\frac{d\varphi_C}{dx}(x_0^-)$ et $\frac{d\varphi_B}{dx}(x_0^+)$.

À partir de ces relations qui relient K à k , il est possible de déterminer l'énergie E de l'état stationnaire $\varphi(x)$, selon qu'il est symétrique (ou pair en x , ce qui conduit à $C_2 = 0$) ou antisymétrique (ou impair en x , donc $C_1 = 0$).

III.B.6) La première solution symétrique $\varphi_1^{\text{sym}}(x)$ d'énergie E_1^{sym} et la première solution antisymétrique, impaire en x , $\varphi_1^{\text{anti}}(x)$ d'énergie E_1^{anti} sont représentées figure 12. Dans le cas où les énergies de ces deux états sont très petites devant V_0 , leur différence est

$$\delta E = E_1^{\text{anti}} - E_1^{\text{sym}} = \frac{4\pi^2 \hbar^3}{m\ell^3} \frac{\exp(-2x_0\sqrt{2mV_0}/\hbar)}{\sqrt{2mV_0}}$$

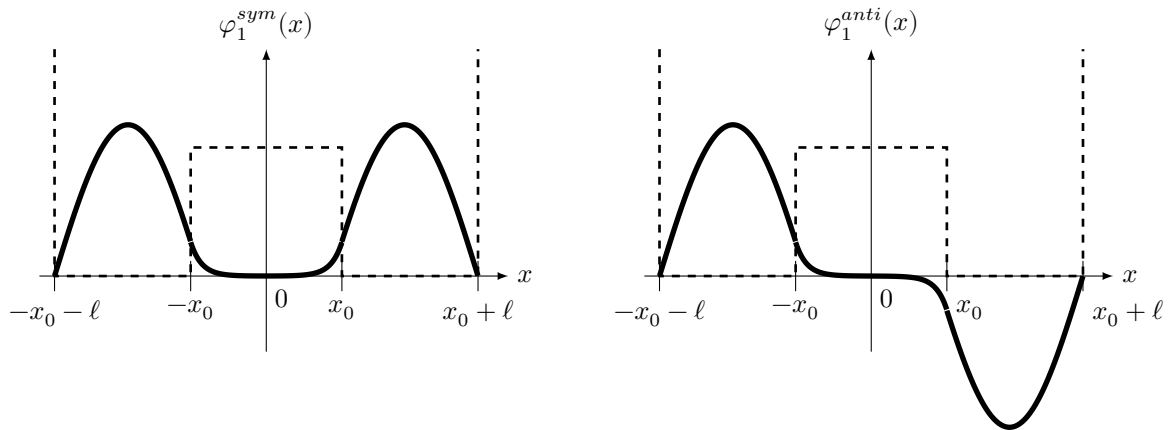


Figure 12 Solutions φ_1^{sym} et φ_1^{anti}

À l'instant $t = 0$, la molécule d'ammoniac est dans une conformation G (figure 13), décrite par la fonction d'onde

$$\psi(x, 0) = \varphi_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1^{\text{sym}}(x) + \varphi_1^{\text{anti}}(x))$$

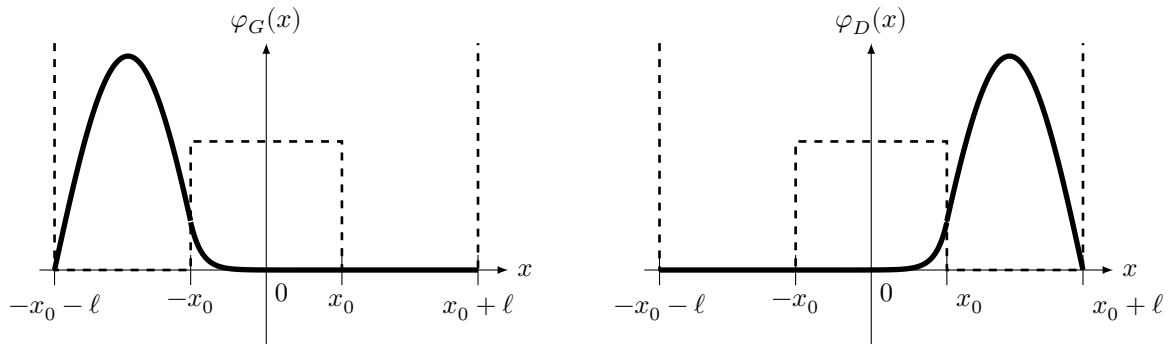


Figure 13 Fonctions φ_G et φ_D

a) Écrire l'expression de la fonction d'onde $\psi(x, t)$ de la molécule d'ammoniac à un instant t quelconque, en fonction de φ_1^{sym} , φ_1^{anti} , des énergies E_1^{anti} et E_1^{sym} et de $\hbar$.

b) Pourquoi deux fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2 telles que $\psi_1 = \psi_2 \exp(i\alpha)$, où $\exp(i\alpha)$ est un nombre complexe de module 1, décrivent-elles le même état physique ?

c) En déduire que la fonction d'onde $\psi(x, t)$ décrit une évolution périodique de l'état de la molécule d'ammoniac, dont on exprimera la période τ en fonction de δE et de $\hbar$. Calculer la fréquence f correspondante si $\delta E = 9,85 \times 10^{-5}$ eV. Dans quel domaine spectral se situe une onde électromagnétique de fréquence f ?

C'est sur cette transition que fonctionna le premier maser construit par C. Townes, J. Gordon et H. Ziegler en 1954.

d) Décrire l'état de la molécule d'ammoniac à l'instant $t = \tau/2$. En quoi ce changement d'état entre les instants $t = 0$ et $t = \tau/2$ permet-il d'illustrer l'effet tunnel ?

e) Quelle est l'influence de la barrière de potentiel V_0 et de la largeur x_0 sur la fréquence d'oscillation f ? Pour l'arsine, de formule AsH_3 , de même structure que NH_3 , la hauteur de la barrière de potentiel est multipliée par six et sa largeur par cinq. Calculer la fréquence f' d'inversion de l'arsine ainsi que la période τ' . Commenter.

III.C – Spectre d'absorption de la molécule d'ammoniac

Un faisceau lumineux monochromatique, dont le champ électrique est donné par $\vec{E}(x, t) = E_0 \vec{e}_y \exp i(\omega t - \underline{k}x)$ en notation complexe, traverse, dans le sens des x croissants, un milieu matériel homogène localement neutre, dont la conductivité électrique est $\gamma > 0$. La célérité de la lumière dans le vide est notée c .

III.C.1) Quelle est l'équation de propagation du champ électrique dans le milieu ? En déduire la relation de dispersion $\underline{k}^2(\omega)$ en fonction de γ , μ_0 , c et ω .

III.C.2)

a) On note $\underline{k} = k_r - ik_i$ où k_r et k_i sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $\underline{k}$. Montrer, sans chercher à expliciter k_i , que $k_i > 0$. Que cela signifie-t-il pour l'onde ?

L'onde traverse une cuve de longueur L contenant le milieu puis se propage à nouveau dans le vide. On admet que les coefficients de transmission en amplitude sont égaux à 1, en entrée et en sortie de cuve.

b) Rappeler la relation liant l'intensité I de l'onde électromagnétique et le vecteur de Poynting $\vec{\pi}$. Montrer que l'intensité de l'onde $I(L)$ après la cuve s'exprime en fonction de l'intensité I_0 avant la cuve selon la loi $I(L) = I_0 \exp(-\alpha L)$. Donner l'expression de α en fonction de k_i .

III.C.3) La transition choisie pour la mesure de l'absorption lumineuse est une raie de l'ammoniac de fréquence $\nu_0 = 2,895\,369\,4 \times 10^{13}$ Hz, fortement absorbante et située dans un domaine d'émission d'un laser à CO_2 . Le spectre d'absorption représente l'intensité lumineuse ayant traversé le milieu, en fonction de la fréquence du rayonnement (figure 14).

a) Quelle longueur d'onde est associée à un rayonnement électromagnétique de fréquence ν_0 ? À quel domaine électromagnétique appartient cette raie ? Exprimer, en eV, l'énergie E_γ d'un photon de cette fréquence.

b) Cette absorption correspond, pour la molécule d'ammoniac, à la transition entre deux états d'énergie E_1 et $E_2 > E_1$. Le niveau E_1 est supposé parfaitement défini alors que le niveau E_2 présente une largeur δE (figure 14). En quoi cette largeur explique-t-elle le spectre d'absorption ? Estimer la valeur de la largeur dite naturelle $\delta\nu$ pour $\delta E = 2,0 \times 10^{-8}$ eV.

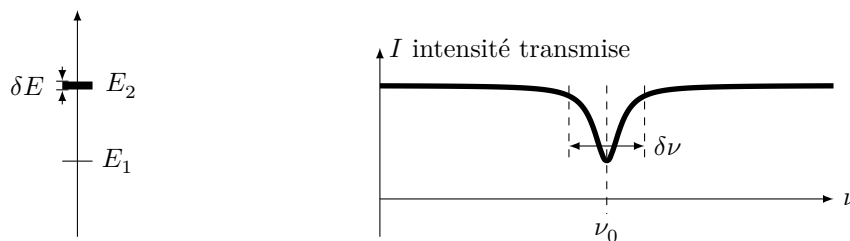


Figure 14 Niveaux d'énergie et spectre d'absorption

III.C.4) Effet Doppler-Fizeau

Le faisceau laser traversant le milieu absorbant possède la fréquence ν dans le référentiel du laboratoire. En raison du mouvement des molécules d'ammoniac, la fréquence perçue par ces molécules n'est plus ν mais une fréquence ν' dépendant de leur vitesse. Soient $\mathcal{R}$ le référentiel du laboratoire, x l'abscisse d'un point M donné selon un axe $(O, \vec{e}_x)$ lié à $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ le référentiel lié à une molécule, en translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$, et x' l'abscisse de M selon l'axe $(O', \vec{e}_x)$ telle que O' coïncide avec O à l'instant $t = 0$ (figure 15).

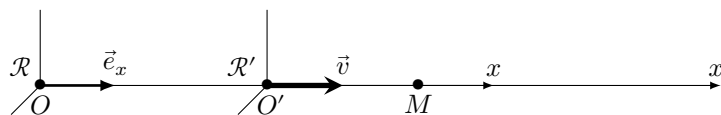


Figure 15 Effet Doppler-Fizeau

La phase ϕ d'une onde est un invariant par changement de référentiel : elle possède la même valeur en un point et à un instant donnés pour deux observateurs placés dans deux référentiels différents.

a) Pour une onde monochromatique de fréquence ν_0 , de célérité c , se propageant dans le sens de $\vec{e}_x$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, écrire l'expression de la phase instantanée ϕ en fonction de ν , x , c et t .

b) Établir l'expression de x' en fonction de x , v_x , et t dans le cadre de la mécanique newtonienne (si $|v_x| \ll c$). En déduire que, si $|v_x| \ll c$, la fréquence ν' de l'onde perçue par un observateur placé dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est donnée par

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v_x}{c} \right) \text{ et que } v_x \simeq c \frac{\nu - \nu'}{\nu'}$$

Donner un exemple d'application de cet effet.

c) Le spectre d'absorption de la figure 14 est celui d'une molécule d'ammoniac au repos dans le laboratoire. Tracer le spectre d'absorption d'une molécule de vitesse $v_x > 0$ telle que $\nu_0 v_x / c > \delta\nu$.

On considère dans la suite que les molécules d'ammoniac au repos absorbent uniquement les rayonnements dont la fréquence se situe dans l'intervalle de largeur $\delta\nu$ autour de la fréquence ν_0 , soit l'intervalle $[\nu_0 - \delta\nu/2, \nu_0 + \delta\nu/2]$. Dans l'ammoniac gazeux à la température T , les molécules de masse m_a sont animées de vitesses aléatoires, dont la répartition suit la loi de Maxwell-Boltzmann. Selon cette loi, la probabilité $dP(v_x)$ que la composante selon $\vec{e}_x$ de la vitesse soit comprise entre v_x et $v_x + dv_x$ est donnée par

$$dP(v_x) = K_0 \exp\left(-\frac{m_a v_x^2}{2k_B T}\right) dv_x$$

où K_0 est une constante de normalisation.

III.C.5) L'ammoniac gazeux est traversé par un faisceau laser de fréquence ν dirigé selon $\vec{e}_x$. Exprimer la probabilité $dP(\nu, \nu_0)$ qu'une molécule perçoive la fréquence ν_0 à $\delta\nu$ près, en fonction de K_0 , m_a , k_B , T , c , ν , $\delta\nu$ et ν_0 . Si n_0 est le nombre de molécules éclairées par le faisceau laser, quel est le nombre δn de molécules pouvant absorber une partie de l'intensité du faisceau ?

III.C.6)

a) Expliquer pourquoi le spectre d'absorption d'une vapeur à la température T diffère de celui d'une molécule au repos dans le référentiel du laboratoire.

b) En se référant aux propriétés de la courbe de Gauss (figure 16), donner l'expression de la largeur $\Delta\nu$ du spectre d'absorption, en fonction de k_B , T , m_a et c .

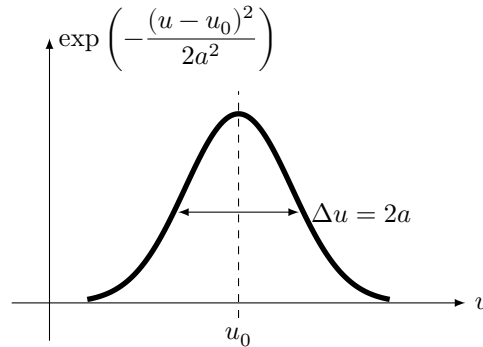


Figure 16 Courbe de Gauss

c) Calculer la largeur $\Delta\nu$ pour $T = 273,16$ K. Comparer à la largeur naturelle $\delta\nu$.

Peut-on négliger cette dernière si l'on exige une précision relative de 10^{-6} sur la valeur de k_B ?

Données numériques

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602\,176\,621 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,022\,140\,86 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,626\,070\,040 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\hbar = h/2\pi = 1,054\,571\,800 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109\,383\,56 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse de l'atome d'hydrogène	$m_H = 1,673\,72 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse molaire de l'ammoniac	$M_{\text{NH}_3} = 17,031 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Température du point triple de l'eau	$T_{PT} = 273,16 \text{ K}$

Formulaire

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \qquad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k$$

Moyenne d'une fonction

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) \, dt$$

Moyenne quadratique (ou valeur efficace)

$$f_{\text{eff}} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$$

Composition des incertitudes

$$\text{Si } f = g^\alpha h^\beta \text{ et } g \text{ et } h \text{ sont indépendants, alors } \quad \frac{\delta f}{f} = \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{\delta g}{g}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2}$$

Laplacien scalaire d'une fonction de la variable radiale sphérique r

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r f(r))}{\partial r^2}$$

Gradient en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Rotationnel en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

Rotationnel du rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

• • • FIN • • •

A2019 – PHYSIQUE II PC



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Physique en arctique

Ce sujet aborde différentes questions relatives aux propriétés physiques particulières aux régions polaires. Les notations, valeurs des constantes fondamentales et les autres données numériques nécessaires à la résolution du problème ainsi qu'un formulaire sont regroupés à la fin de l'énoncé.

Les exemples seront tous traités dans le cas des régions polaires nord (également appelées arctiques ou boréales). Les notations géographiques usuelles sont également rappelées en fin d'énoncé. Les applications numériques comporteront au plus 2 chiffres significatifs.

Les trois parties sont indépendantes.

I. — Pôles géographiques et magnétiques

Les pôles géographiques sont assez proches des pôles magnétiques; dans tout ce qui suit, on pourra confondre les deux axes reliant les pôles opposés de chaque type. La recherche des pôles magnétiques s'est d'abord appuyée sur la mesure du champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique), et en particulier de sa direction. L'intensité croissante du champ géomagnétique à l'approche des pôles contribue enfin à expliquer un phénomène optique spectaculaire : les aurores polaires.

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique $\vec{m}$ de norme constante m , la direction du vecteur $\vec{m}$ étant supposée indiquer le nord.

Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical (Δ) dirigé par le

vecteur $\vec{e}_r$ local et formant un pivot à faible frottement (cf. fig. 1).

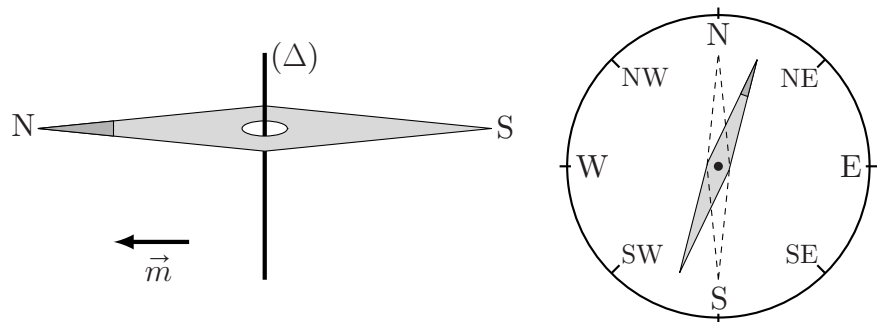


FIGURE 1 – Boussole de navigation

❑ 1 — Pourquoi la boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord ? Cet équilibre est-il stable ?

On note I le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ); légèrement écartée de sa position d'équilibre (cf. fig. 1), l'aiguille aimantée oscille avec une pseudo-période τ_{osc} .

❑ 2 — Montrer que la connaissance de m , τ_{osc} et I permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle ?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé au centre O de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R_T), l'axe (Oz) étant l'axe polaire *géographique* dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord (cf. fig. 5). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques φ (longitude) et $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité B_E .

❑ 3 — Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de μ_0 (perméabilité du vide), M_0 et R_T .

❑ 4 — Préciser le signe de M_0 puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud ?

En un point P de la surface terrestre, on appelle *nord magnétique local* la direction $\vec{e}_N$ du champ géomagnétique $\vec{B}$, projeté dans le plan horizontal, et *déclinaison magnétique* l'angle D formé par $\vec{B}$ avec le nord magnétique local; la déclinaison magnétique est positive si $\vec{B}$ est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

❑ 5 — Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de D ? Calculer $\tan(D)$ en fonction de la latitude λ puis tracer l'allure de la courbe donnant D en fonction de λ pour toutes les valeurs de λ du pôle sud au pôle nord. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles « s'affolent à proximité des pôles »? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud?

II. — La glace de la banquise

L'existence de couverts de glace de grande épaisseur au-dessus des océans polaires est bien sûr une caractéristique remarquable des régions polaires. On étudie ici deux propriétés de ces couverts de glace :

- quelques propriétés mécaniques d'un traîneau glissant sur sa surface (partie II.A) ;
- un modèle simple de croissance de l'épaisseur de la glace en hiver (partie II.B).

II.A. — Un traîneau sur la glace

Un traîneau à chiens est un dispositif de masse totale M (le pilote, ou *musher*, est compris dans cette masse) qui peut glisser sur la surface de la glace avec des coefficients de glissement statique (avant le démarrage) μ_s et dynamique (en mouvement) μ_d .

❑ 6 — Les chiens sont reliés au traîneau par des éléments de corde tendus, de masse négligeable et inextensibles. Montrer qu'un tel élément de corde transmet les tensions et que celles-ci sont colinéaires à la corde.

❑ 7 — Le trajet se fait soit à l'horizontale, soit sur une faible pente ascendante caractérisée par l'angle α avec l'horizontale. Montrer que, dans ce dernier cas, tout se passe comme dans un mouvement horizontal sous réserve de remplacer μ_d par μ'_d , que l'on exprimera.

L'intensité de la force de traction totale F exercée par l'ensemble des chiens dépend de leur vitesse v et on adoptera le modèle $F = F_0 - \beta v$ où F_0 et β sont des constantes positives. On prendra les valeurs $M = 5,0 \times 10^2$ kg, $\alpha = 0$, $\mu_d = 5,0 \times 10^{-2}$ et $\mu_s = 8,0 \times 10^{-2}$.

❑ 8 — Déterminer la valeur minimale de F_0 permettant le démarrage du traîneau.

❑ 9 — La vitesse du traîneau en régime stationnaire est $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, atteinte à 5% près au bout d'un temps $t_1 = 5$ s. Exprimer d'une part β en fonction de M et t_1 et d'autre part F_0 en fonction de β , v_0 , μ_d , M et g . Calculer leurs valeurs respectives.

Toujours à vitesse constante v_0 , le traîneau aborde une courbe à plat qu'on assimilera à un cercle de centre O et de rayon R (cf. fig. 2). Les chiens (modélisés ici en un seul point C) doivent donc tirer vers l'intérieur du cercle.

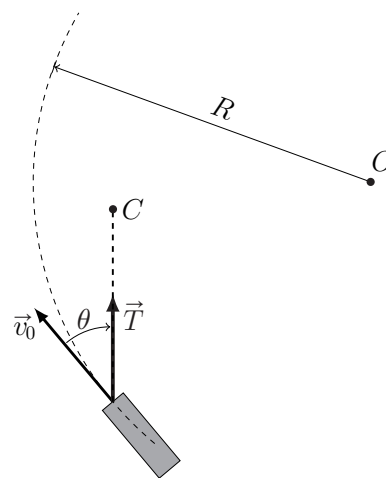


FIGURE 2 — Trajectoire circulaire du traîneau

❑ 10 — Déterminer en fonction des données la tension $\vec{T}$ de la corde et l'angle θ entre la force de traction et la trajectoire.

II.B. — Croissance hivernale de l'épaisseur de glace

Pour étudier la croissance de la couche de glace en hiver, on modélise l'océan sous la banquise en formation de la manière suivante (cf. fig. 3) : en profondeur, la température de l'eau est maintenue constante à $T_1 = 4^\circ\text{C}$ par les courants océaniques. Sur une hauteur constante e sous la banquise, l'eau se refroidit progressivement jusqu'à atteindre $T_0 = 0^\circ\text{C}$ à l'altitude $z = 0$ de formation de la glace (on néglige tout effet de salinité de l'eau). La couche de glace a une épaisseur croissante $z_g(t)$ qu'il s'agit de déterminer ; au-dessus de celle-ci, l'air est à la température constante $T_2 = -40^\circ\text{C}$. On notera λ_e et λ_g les conductivités thermiques et c_e et c_g les capacités thermiques massiques de l'eau liquide et de la glace, ρ_g et l_f la masse volumique et l'enthalpie massique de fusion de la glace ; toutes ces grandeurs sont des constantes.

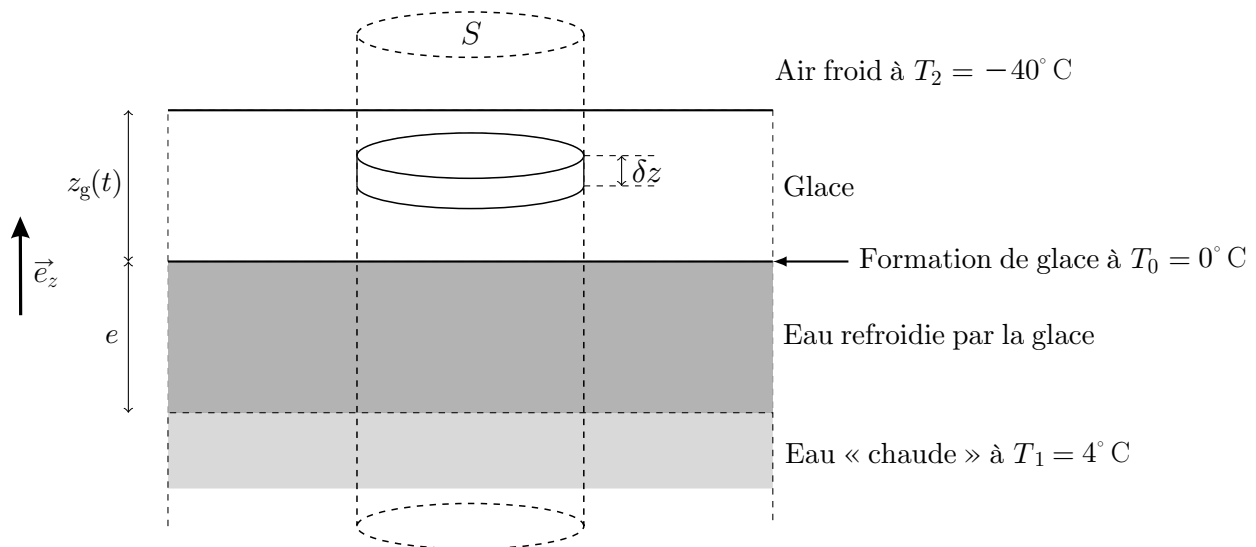


FIGURE 3 – L'océan sous la banquise en formation

L'épaisseur de glace $z_g(t)$ augmente régulièrement du fait de la cristallisation de l'eau refroidie à $T_0 = 0^\circ\text{C}$ à la base de la couche de glace. Toutes les études pourront être faites pour un système défini par un cylindre vertical de surface S unité (cf. fig. 3) au sein duquel les transferts thermiques unidimensionnels sont régis par la loi de Fourier.

- ❑ **11** — Par une étude des échanges thermiques de l'épaisseur δz prise à l'intérieur de la glace, établir une équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T_g(z, t)$ au sein de la glace.
- ❑ **12** — Déterminer une expression donnant l'ordre de grandeur de la durée Δt de la diffusion thermique au sein de la glace sur une hauteur Δz . Quelle durée doit-on attendre afin de pouvoir considérer que, pour des évolutions assez lentes, la température T_g ne dépend pratiquement plus du temps ? Préciser ce que l'on entend par « assez lentes ».

On se place dans ce cas dans toute la suite : dans l'eau comme dans la glace, les répartitions de température seront supposées quasi-statiques.

- ❑ **13** — Définir et exprimer les résistances thermiques R_g et R_e , pour une aire donnée S , des couches de glace et d'eau refroidie sous la glace.

Les transferts thermiques à travers la surface supérieure de la banquise sont décrits par la loi de Newton des transferts pariétaux (radiatifs et convecto-conductifs) : la puissance échangée par unité d'aire de cette surface vérifie $|\mathcal{P}_u| = h|T_s - T_2|$ où T_s est la température au sommet de la couche de glace ; le coefficient $h > 0$ de la loi de Newton est supposé connu et constant.

- ❑ **14** — Exprimer la résistance thermique R_i , pour une aire S , de l'interface entre l'air et la glace.
- ❑ **15** — Montrer que le régime quasi-permanent de croissance de la couche de glace peut être décrit par le schéma électrique équivalent de la figure 4 et préciser l'expression du « courant » Φ du « générateur de courant » en fonction notamment de l_f , ρ_g et de la vitesse de croissance $v_g = \frac{dz_g}{dt}$ de la couche de glace.

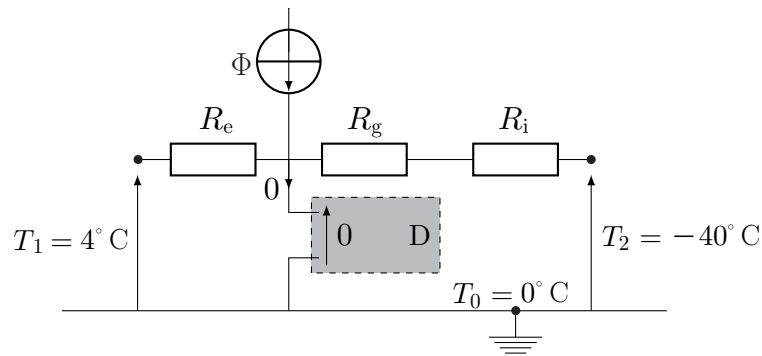


FIGURE 4 – Circuit électrique équivalent à la croissance de la couche de glace

- ❑ **16** — En *électricité*, connaissez-vous un dispositif D permettant d'assurer une différence de potentiel nulle sans appel de courant ? Si oui, comment faut-il le brancher ? En *thermodynamique*, pour quelle raison la différence de température aux bornes de D est-elle maintenue nulle ?
- ❑ **17** — Établir l'équation différentielle vérifiée par $z_g(t)$. On suppose que pour toutes les valeurs de t considérées on a $\frac{e}{\lambda_e} \gg \frac{z_g}{\lambda_g} + \frac{1}{h}$, en déduire la loi d'évolution de l'épaisseur de la couche de glace sous la forme $\tau_g [\ell_g z_g(t) + z_g^2(t)] = \ell_g^2 t$ où l'exprimera les grandeurs τ_g et ℓ_g en fonction des paramètres du modèle. L'instant $t = 0$ correspond au début de la formation de la banquise.
- ❑ **18** — Tracer et commenter l'allure de la courbe donnant z_g en fonction de t . On montrera notamment l'existence de deux régimes successifs.

III. — La spirale d'Ekman

Lors de diverses expéditions en direction du pôle nord, on a pu constater que les navires pris dans les glaces du pack arctique dérivent systématiquement *à droite* de la direction du vent.

On interprète ces résultats par la différence de direction d'écoulement du vent (qui entraîne la surface de l'eau) et de l'eau profonde (qui entraîne les glaces dérivantes du pack) du fait de la rotation propre de la Terre autour de l'axe polaire (on parle ici d'*effet Coriolis*). L'entraînement des couches de plus en plus profondes de l'océan est dû aux effets de viscosité de l'eau.

Ce changement graduel de direction en fonction de la profondeur possède une forme de spirale. Elle prend le nom de l'océanographe suédois Vagn Walfrid Ekman qui l'expliqua dans sa thèse en 1907.

- ❑ **19** — La viscosité de l'eau liquide à basse température (sous les glaces du pack arctique) est-elle, à votre avis, plus ou moins élevée qu'à température ambiante ?

L'étude qui suit est réalisée dans un référentiel terrestre ($Oxyz$) dans lequel (Oz) est vertical ascendant, (Ox) dirigé dans la direction du vent. L'océan occupe toute la région $z < 0$; on le modélise comme un écoulement incompressible, visqueux, de pression P . Le champ de vitesse $\vec{v}$ de cet écoulement est stationnaire horizontal ($v_z = 0$), il ne dépend que de la profondeur ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \vec{0}$), et il est entièrement situé à proximité du pôle nord (latitude $\lambda = \pi/2$). La pression atmosphérique est uniforme et notée P_0 .

□ **20** — Expliciter les forces de pesanteur et des pseudo-forces d'inertie exercées par unité de masse d'eau en fonction de v_x , v_y , g_0 (accélération de la pesanteur polaire) et de T_0 (durée du jour). Que dire des forces d'inertie d'entraînement ?

□ **21** — Écrire l'équation locale qui traduit le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule mésoscopique d'eau (Équation de Navier–Stokes). Montrer que la pression P ne dépend que de z et déterminer son expression.

□ **22** — Montrer que les fonctions $v_x(z)$ et $v_y(z)$ sont reliées par deux équations différentielles couplées du second ordre, que l'on établira et qui feront apparaître un paramètre commun noté δ , homogène à une longueur, que l'on exprimera en fonction de η_e , T_0 et ρ_e .

□ **23** — On note $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ la vitesse de surface de l'eau océanique située en $z = 0$. Déterminer $v_x(z)$ et $v_y(z)$ en supposant que le fond de l'océan correspond à la limite $z \rightarrow -\infty$.

□ **24** — Ces résultats sont-ils compatibles avec l'observation expérimentale suivante : *la vitesse de dérive des navires pris dans la banquise est de l'ordre de 2% de celle du vent avec une dérive de 20° à 40° à droite de ce dernier* ?



Données et formulaire utiles pour l'ensemble du sujet

Données numériques et constantes fondamentales

Champ magnétique terrestre à l'équateur	$B_E = 3,0 \times 10^{-5} \text{ T}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Durée du jour solaire moyen	$T_0 = 24 \text{ h} = 8,6 \times 10^4 \text{ s}$
Intensité du champ de pesanteur	$g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau liquide à 4°C	$\rho_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Rayon terrestre	$R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$
Viscosité dynamique de l'eau liquide à 4°C	$\eta_e = 1,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
Logarithme népérien du nombre 20	$\ln(20) \simeq 3,0$

Données et formules relatives aux dipôles magnétiques

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire $\vec{M}$ placé à l'origine O des coordonnées est donné au point P par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R^2 \vec{M}}{R^5} \quad \text{où } \vec{R} = \overrightarrow{OP} \text{ et } R = \|\vec{R}\|$$

Les interactions d'un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire $\vec{m}$ soumis à un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ sont décrites par l'énergie potentielle $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ et par le couple des actions électromagnétiques $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

Coordonnées sphériques et géographiques

On notera $(Oxyz)$ les axes cartésiens associés à la base orthonormée et directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les coordonnées sphériques d'un point P sont notées (r, θ, φ) avec la base locale associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, cf. fig. 5 à gauche. On note aussi φ (longitude) et λ la latitude d'un point P de la surface terrestre ; le point A est situé sur l'équateur dans le méridien origine ($\varphi = 0$) ; celui-ci passe par l'observatoire de Greenwich G , cf. fig. 5 à droite.

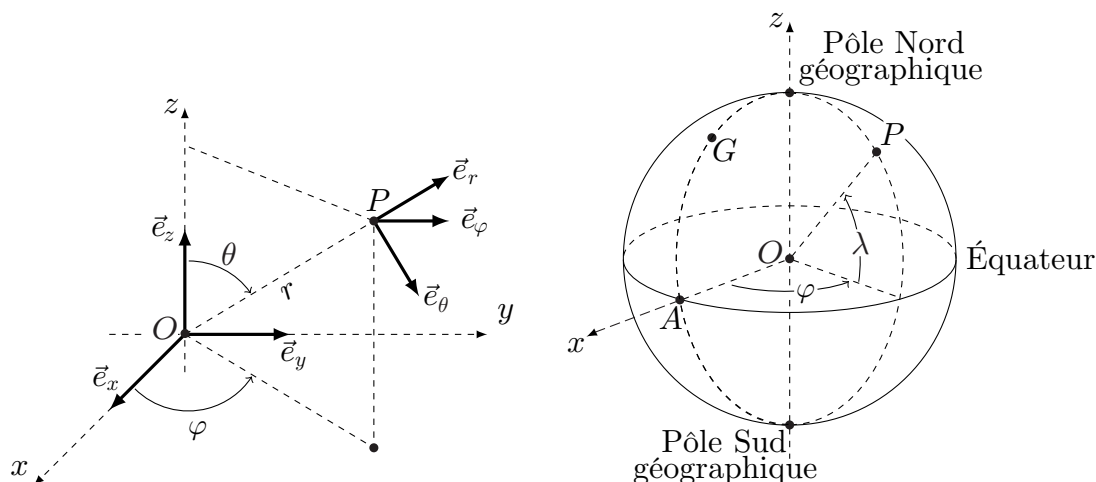
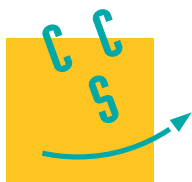


FIGURE 5 – Coordonnées sphériques et géographiques

FIN DE L'ÉPREUVE



Détection de molécules individuelles à température ambiante

Une molécule fluorescente peut être utilisée comme une sonde locale, à l'échelle nanométrique, de son environnement. Des techniques comme la microscopie confocale, la microscopie biphotonique permettent la détection, avec un bon rapport signal sur bruit, de la fluorescence émise par une molécule individuelle appelée fluorophore. Il est ainsi possible d'accéder à une information non moyennée spatialement. L'évolution temporelle du signal permet alors de suivre la dynamique de la molécule étudiée, aussi bien la dynamique interne que les interactions de la molécule avec son environnement.

L'objet de ce sujet est de comprendre comment détecter de façon satisfaisante le signal de fluorescence émis par une seule molécule (partie I), comment exalter le signal (« Raman ») diffusé par une molécule en interaction avec une nanoparticule métallique (partie III). La partie II aborde l'analyse du signal de fluorescence émis par une molécule.

Les fluorophores sont des molécules qui absorbent la lumière dans un certain domaine spectral et réémettent de la lumière par désexcitation radiative dans un autre domaine. Les fluorophores étudiés sont insérés dans un substrat, qui peut être par exemple un polymère ou une matrice dite sol-gel, ou sont simplement des solutés dans un solvant. Le fluorophore est choisi pour être un bon chromophore, c'est-à-dire pour absorber fortement la lumière, et sera caractérisé par un fort coefficient d'extinction molaire à la longueur d'onde du maximum d'absorption $\varepsilon_{\max} \approx 1 \times 10^5 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$ (par comparaison $\varepsilon_{\max} \approx 2 \times 10^3 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$ pour les ions permanganate en solution aqueuse).

Le signal de fluorescence S_f émis par une seule molécule dépend de son taux de fluorescence R_f , de l'ordre de $1 \times 10^8 \text{ photons} \cdot \text{s}^{-1}$ dans des conditions favorables. Le microscope est, lui, caractérisé par son efficacité de détection globale des photons (système optique plus détecteur) η_D dont un ordre de grandeur satisfaisant est de 2 %. Pour obtenir un bon rapport signal sur bruit, il faut exciter convenablement les chromophores, collecter avec une bonne efficacité de détection le signal émis S_f et éliminer de façon importante le signal parasite S_d issu du très grand nombre de molécules du substrat qui seront illuminées en même temps que le chromophore.

Des données et relations utiles sont disponibles en fin d'énoncé.

I Détection du signal de fluorescence de molécules individuelles à température ambiante

Les éléments essentiels du microscope sont : la source de lumière constituée par un faisceau laser adapté, l'objectif de microscope permettant à la fois d'exciter les fluorophores et de collecter la lumière émise, la lame séparatrice ou miroir dichroïque (voir plus loin le sens de ce terme) permettant la séparation entre lumière de fluorescence et lumière diffuse, et un photodétecteur utilisé en mode « comptage de photons » produisant un signal exprimé en nombre de coups.

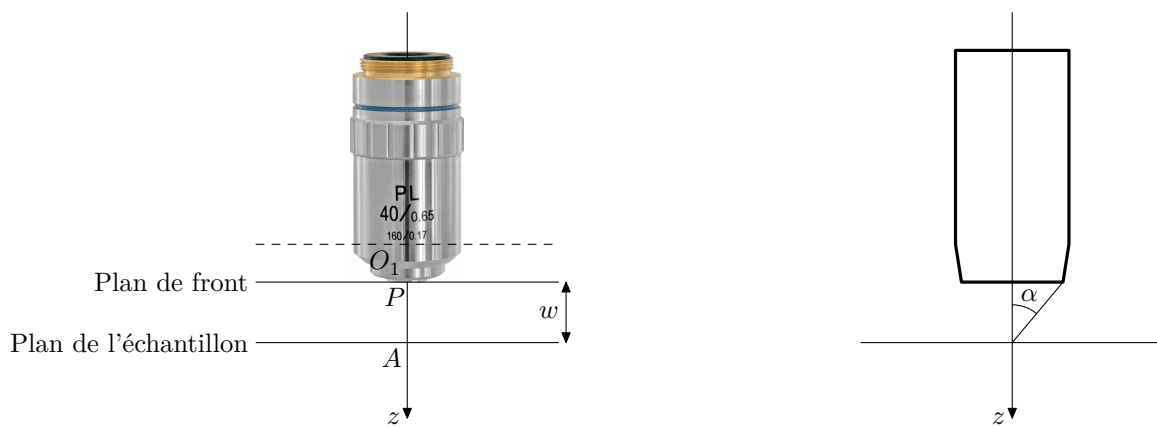
I.A – Objectif de microscope et microscopie classique

L'objectif de microscope est un dispositif optique complexe constitué de plusieurs lentilles optiques. Dans cette sous-partie, on considère un objectif $\times 40$ utilisé dans un microscope classique, donnant d'un objet microscopique une image réelle agrandie renversée ; le grandissement transversal γ vaut donc $\gamma = -40,0$. On modélise l'objectif par une lentille mince convergente, d'axe optique (O_1z) et de centre O_1 .

La figure 1 montre une photographie de cet objectif avec les indications « 40 » pour le grandissement, « 0.65 » pour l'ouverture numérique (ON), « 160 » (mm) pour la longueur de tube Δ , définie ci-après, et « 0.17 » (mm) pour la lamelle couvre-objet. Le plan de front P en avant de la monture de l'objectif est tel que la distance O_1P est égale à 3,5 mm.

En notant α le demi-angle d'ouverture, c'est-à-dire l'angle entre l'axe optique et le rayon le plus écarté de l'axe optique qui entre dans l'objectif, l'ouverture numérique est définie par $ON = n \sin \alpha$, où n est l'indice de réfraction du milieu dans lequel plonge l'objectif ($n = 1,00$ pour l'air).

On utilise cet objectif et un oculaire de distance focale $f'_2 = 20 \text{ mm}$ dans un microscope classique. L'objectif et l'oculaire sont maintenus solidaires par le tube du microscope qui impose la distance F'_1F_2 entre le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire. Cette distance Δ est appelée intervalle optique du microscope ou longueur de tube. Le microscope est utilisé de telle façon que l'œil n'ait pas besoin d'accommoder.



Plan de front et distance frontale $w = PA$

Dans l'air $ON = \sin \alpha$

Figure 1 Objectif de microscope $\times 40$

Par souci de simplicité, pour les calculs, on se placera dans les conditions de Gauss, même si elles sont mal vérifiées en pratique. Un schéma optique du microscope est représenté sur la figure A du document réponse.

Q 1. Où doit se former l'image intermédiaire donnée par l'objectif, pour une observation sans accommodation à travers l'oculaire, de l'image finale ?

Q 2. Sur le schéma de la figure A du document réponse, réaliser la construction géométrique de l'image de l'objet AB par l'ensemble du microscope.

Q 3. Déterminer puis calculer la distance focale équivalente f'_1 de la lentille modélisant l'objectif.

Q 4. Déterminer puis calculer la distance frontale w (distance de travail), c'est-à-dire la distance PA séparant la lame porte-échantillon et le plan de front de l'objectif $\times 40$. Expliquer pourquoi certains objectifs de fort grandissement sont équipés d'un système à ressort qui évite la détérioration de la lentille frontale.

On considère que l'œil est capable d'accommoder pour avoir une vision nette d'un objet situé à une distance minimale $d_m = 25$ cm. L'œil est positionné dans le plan focal image de l'oculaire.

Q 5. Calculez la latitude de mise au point du microscope pour cet objectif, c'est-à-dire la distance dont on peut déplacer l'objectif par rapport à l'objet en conservant une vision nette. De quel système doit être équipé le tube du microscope ?

I.B – Microscope de fluorescence utilisé en configuration confocale pour la réjection du bruit de fond

Le microscope classique est modifié de la façon suivante : on supprime l'oculaire et on positionne un capteur dans le plan de l'image intermédiaire donnée par l'objectif, en le centrant sur l'axe optique. Pour réaliser un « microscope confocal », on introduit également un diaphragme de petite taille (par exemple $10 \mu\text{m}$), lui aussi centré sur l'axe optique, dans le plan du capteur. De cette façon l'ensemble (capteur + diaphragme) permet de réaliser un détecteur quasi-ponctuel.

Q 6. Sur le schéma de la figure B du document réponse, tracer le faisceau de lumière émis par le point B situé dans le plan de l'échantillon mais hors de l'axe optique.

Q 7. Sur le schéma de la figure C, tracer le faisceau de lumière émis par le point C situé sur l'axe optique mais hors du plan de l'échantillon.

Q 8. À quoi sert l'introduction d'un trou de petite taille dans le plan du photodétecteur ?

Q 9. Justifier la nécessité d'un système de balayage (translation de l'échantillon dans son plan) pour réaliser une image de fluorescence.

La figure 2 présente le schéma de principe du microscope confocal de fluorescence utilisé pour la détection de molécules individuelles.

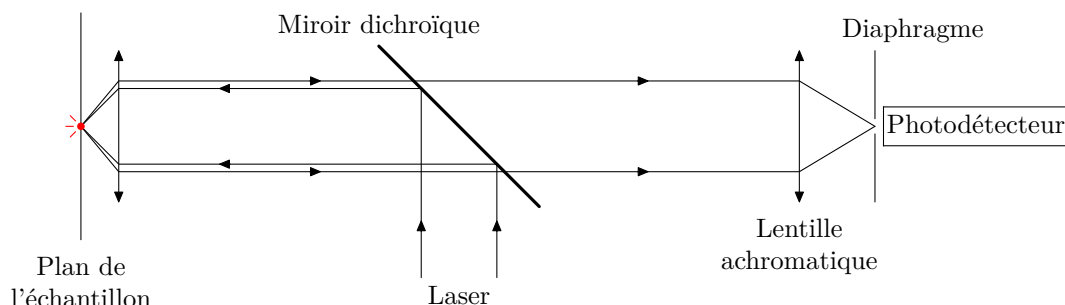


Figure 2 Schéma de principe du microscope confocal

La figure 3 montre des images de fluorescence obtenues avec ce dispositif. Il convient de remarquer que ces images sont le résultat d'un balayage, chaque pixel est associé à une position de l'échantillon et l'énergie lumineuse détectée à cette position, pendant le temps d'exposition choisi, est codée en niveau de gris.

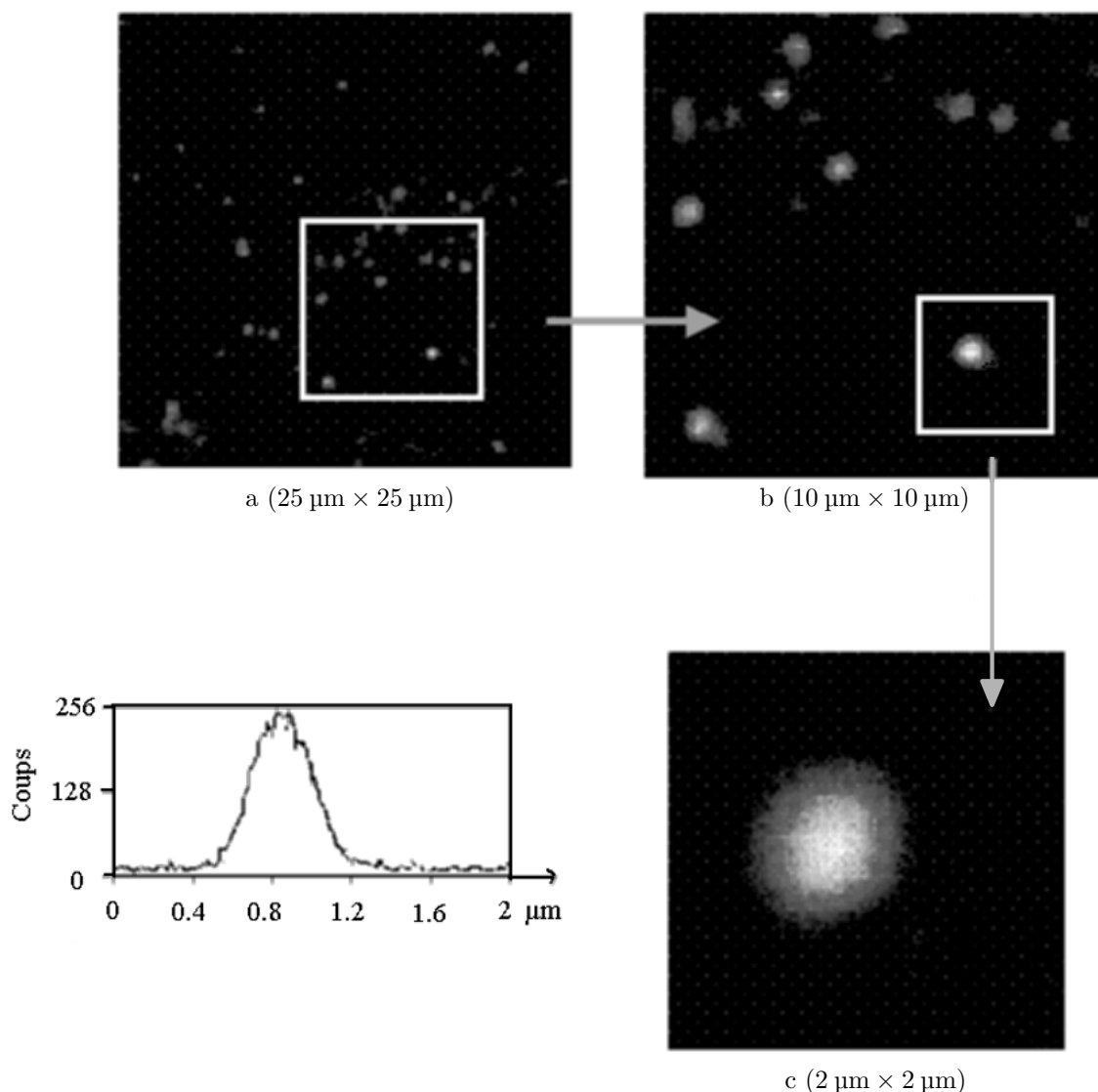


Figure 3 Images de fluorescence de molécules individuelles (256×256 pixels), zooms successifs sur une même zone de l'échantillon (images a, b et c) et profil du nombre de coups détectés sur une ligne de l'image c passant par le centre de la tache image

I.C – Séparation de la lumière de fluorescence de la lumière diffuse

Les fluorophores sont des molécules qui absorbent la lumière dans un certain domaine spectral (excitation) et réémettent de la lumière (désexcitation radiative). La figure 4 donne un premier schéma très simplifié des niveaux d'énergie dans une molécule organique fluorescente.

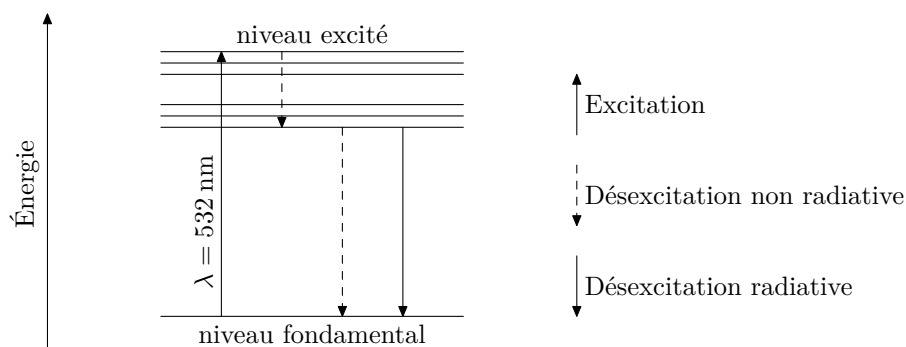


Figure 4 Schéma simplifié des niveaux d'énergie dans une molécule fluorescente

Q 10. D'après le schéma de la figure 4 comparer la longueur d'onde du signal de fluorescence résultant de la désexcitation radiative à celle du laser excitateur ($\lambda = 532\ \text{nm}$).

On utilise un séparateur de faisceau assimilé ici à une lame semi-réfléchissante fine qui joue le rôle d'un miroir plan pour la lumière laser. On parle de *miroir dichroïque*.

Q 11. Expliquer le rôle de la lame semi-réfléchissante et donner l'allure que doit avoir la courbe du coefficient de transmission du miroir en fonction de la longueur d'onde $T(\lambda)$.

I.D – Émission de la lumière de fluorescence par un fluorophore

Afin d'estimer de façon simple le rendement de fluorescence, on adopte une modélisation simplifiée qui néglige le décalage de longueur d'onde entre le laser exciteur et le signal de fluorescence. On considère alors que la molécule peut accéder à trois niveaux d'énergie schématiquement représentés sur la figure 5.

On note k_e le taux d'excitation du niveau 1 (niveau fondamental) au niveau 2 (niveau excité), k_r et k_{nr} les taux de désexcitation radiative et non radiative du niveau 2 vers le niveau 1 et k_T le taux de désexcitation du niveau 3 (appelé niveau triplet) vers le niveau 1. Il existe, à partir du niveau 2, une possibilité pour la molécule de passer dans le niveau 3 avec un taux k_{isc} (« inter-system crossing »).

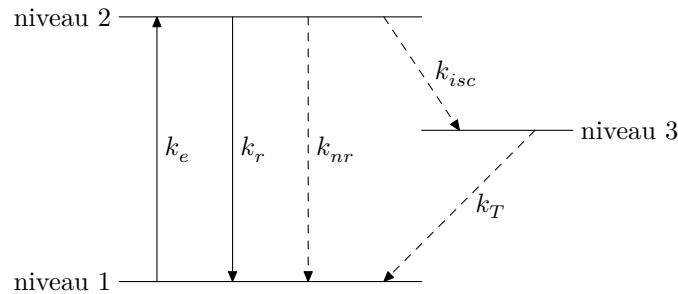


Figure 5 Description des niveaux d'énergie du fluorophore par un système à 3 niveaux

On note P_1 , P_2 et P_3 , les probabilités d'occupation de chaque niveau. Les probabilités P_1 et P_3 obéissent aux équations différentielles

$$\begin{aligned}\frac{dP_1}{dt} &= -k_e P_1 + (k_r + k_{nr}) P_2 + k_T P_3, \\ \frac{dP_3}{dt} &= k_{isc} P_2 - k_T P_3.\end{aligned}$$

Q 12. Déterminer l'équation vérifiée par $\frac{dP_2}{dt}$ en fonction des taux définis précédemment et des probabilités d'occupation des niveaux d'énergie. Les équations du système sont-elles linéairement indépendantes ?

On suppose que le système est fermé, c'est-à-dire que les seuls niveaux accessibles sont les niveaux 1, 2, et 3. Cela permet d'écrire une relation supplémentaire entre les probabilités P_1 , P_2 et P_3 .

Q 13. Écrire cette relation entre les probabilités P_1 , P_2 et P_3 .

En réalité la molécule n'est pas toujours photostable. La fluorescence peut s'arrêter brutalement et définitivement après que la molécule ait été excitée un trop grand nombre de fois. Le système réel n'est donc pas fermé.

Q 14. Comment peut-on observer ce phénomène sur l'image b de la figure 3 ?

Q 15. Déterminer la solution stationnaire P_{2s} pour la probabilité d'occupation du niveau 2 en fonction de k_e , k_r , k_{nr} , k_{isc} et $K = 1 + \frac{k_{isc}}{k_T}$ dans le cas d'un système fermé.

Le taux de fluorescence en régime stationnaire s'écrit $R_f = k_r P_{2s}$.

Q 16. En déduire qu'il existe un taux limite de fluorescence, noté R_f^∞ quand le taux d'excitation k_e devient très grand devant les taux de désexcitation k_r , k_{nr} et k_{isc} . Justifier qualitativement l'existence d'un taux limite.

Q 17. Expliquer pourquoi alors il n'est pas souhaitable d'exciter trop fortement l'échantillon.

Q 18. Calculer la valeur numérique de R_f^∞ dans le cas d'un « bon » chromophore où $K = 10$ avec une durée de vie radiative $\tau_r = 1/k_r = 5$ ns.

On définit le taux d'excitation à saturation k_e^s par $R_f(k_e^s) = \frac{1}{2} R_f^\infty$ et I_s l'intensité à saturation du faisceau laser, correspondant à ce taux d'excitation.

Q 19. Montrer que le taux d'excitation à saturation k_e^s s'écrit $k_e^s = \frac{1}{\phi_f} \frac{k_r}{K}$. Expliciter ϕ_f appelé *rendement quantique de fluorescence* en fonction k_r , k_{nr} et k_{isc} . Réexprimer alors R_f^∞ en fonction ϕ_f et k_e^s .

L'intensité laser à saturation I_s et le taux d'excitation à saturation k_e^s sont reliées par $k_e^s = \frac{I_s \varepsilon_{\max}}{h\nu N_A}$ où ν est la fréquence de l'onde laser, h la constante de Planck, N_A la constante d'Avogadro et $\varepsilon_{\max}$ le coefficient d'extinction molaire.

Q 20. Quelle est la dimension de $\sigma = \varepsilon_{\max}/N_A$? Quel sens concret peut-on donner à la grandeur σ ? Pour les molécules considérées, on a $\varepsilon_{\max} \approx 1 \times 10^5 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$. Commenter l'ordre de grandeur de σ .

Q 21. Déterminer numériquement, en $\text{kW} \cdot \text{cm}^{-2}$ l'intensité à saturation I_s pour $\lambda = 532 \text{ nm}$ la longueur d'onde du laser utilisé, $\phi_f \approx 1$, $K = 10$, $\tau_r = 1/k_r = 5 \text{ ns}$ et $\varepsilon_{\max} \approx 1 \times 10^5 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$. Commenter sachant qu'un laser de type He-Ne tel que ceux utilisés en travaux pratiques émet, en ordre de grandeur, une puissance de 1 mW.

I.E – Excitation laser

Phénoménologiquement, pour des objectifs de grande ouverture numérique, dont le diaphragme d'entrée est légèrement sur-illuminé, une bonne description du faisceau laser d'axe Oz (origine O au point de focalisation) est donnée par une fonction gaussienne-gaussienne en fonction des coordonnées cylindriques r et z

$$I(r, z) = I_0 \exp\left(-2 \frac{z^2}{\omega_z^2}\right) \exp\left(-2 \frac{r^2}{\omega_r^2}\right)$$

où $\omega_r = 0,5 \frac{\lambda}{\sin \theta}$ et $\omega_z = 0,8 \frac{\lambda}{1 - \cos \theta}$ sont des grandeurs dépendant de la longueur d'onde et de l'ouverture numérique $\text{ON} = \sin \theta$.

Q 22. En considérant la molécule fluorescente comme un émetteur ponctuel, évaluer l'ouverture numérique de l'objectif utilisé pour réaliser les images de la figure 3 avec la longueur d'onde laser $\lambda = 532 \text{ nm}$. Pourquoi est-il important d'utiliser un objectif d'ouverture numérique élevée ?

Q 23. Déterminer un ordre de grandeur de la puissance du faisceau laser incident pour obtenir un taux d'excitation à saturation.

Q 24. Déterminer un ordre de grandeur du volume excité en fonction de ω_r et ω_z . Calculer numériquement cet ordre de grandeur.

Pour réaliser un échantillon permettant la détection individuelle de molécules fluorescentes, on réalise un dépôt d'une solution de molécules fluorescentes solvatées, sur une lame porte-échantillon. Le dépôt est réalisé sur un plateau tournant à haute vitesse pour produire des films de 100 nm d'épaisseur.

Q 25. Quel doit être l'ordre de grandeur de la concentration de la solution de molécules fluorescentes pour pouvoir produire des images telles que celles représentées en figure 3 ?

I.F – Rapport signal sur bruit

Le signal étudié est le nombre de photons détectés (ou nombre de « coups »).

Q 26. Exprimer le signal de fluorescence détecté S_f provenant d'un seul fluorophore en fonction de l'efficacité de détection, du taux de fluorescence R_f et de la durée d'acquisition τ_a .

Q 27. Les images de fluorescence ont été obtenues avec un taux d'excitation $k_e = 0,1 k_e^s$ afin de préserver la photo-stabilité de la molécule. Quelle durée τ_i est nécessaire pour obtenir l'image b de la figure 3 ? Le temps de déplacement de l'échantillon sera négligé.

Le signal diffusé par l'ensemble des molécules contenues dans le volume sondé V en fonction de la densité volumique de molécules de la matrice n s'écrit en fonction de l'efficacité de détection, de l'intensité laser I_0 , de la durée d'acquisition τ_a , $S_d = \eta_D \sigma_d n V \frac{I_0 \tau_a}{h\nu}$ où σ_d est une constante appelée section efficace de diffusion. Le bruit généré B est égal à la racine carrée du nombre total de coups détectés $S = S_f + S_d$.

Q 28. Exprimer le rapport signal sur bruit S_f/B en fonction des grandeurs du problème.

Q 29. Expliquer pourquoi le diaphragme permet d'améliorer le rapport signal sur bruit de l'image.

II Analyse de la lumière de fluorescence

On s'intéresse à la détection de chromophores fluorescents (« pérylène orange ») dans un film sol-gel d'épaisseur 50 à 100 nm. La matrice sol-gel dont est constitué le film a une structure poreuse, comprenant une matrice en silice avec des cavités (pores), le plus souvent remplies de solvant et des interconnexions étroites entre pores.

La figure 6 montre le suivi du déplacement d'une molécule de chromophore dans lequel les positions successives de la molécule, représentées par des croix, ont été pointées à intervalles de temps réguliers. On cherche à rendre compte du déplacement par un processus diffusif modélisé par une marche au hasard. Par simplicité, on raisonne sur un problème à une dimension, suivant un axe (Ox). La molécule A , initialement en O , fait des sauts entre des sites fixes d'abscisses $x_n = na$ (positions A_n) distants de a . La durée de chaque saut est notée τ . Les deux sens de déplacement à chaque saut sont équiprobables.

Q 30. Relier la probabilité $p(x_n, t_n)$ pour la particule d'être à l'abscisse x_n à la date $t_n = n\tau$ aux probabilités $p(x_{n-1}, t_{n-1})$ et $p(x_{n+1}, t_{n-1})$.

Q 31. En passant à une probabilité continue $p(x, t)$ définie en tout point et à tout instant, montrer qu'on peut écrire : $p(x_n, t_n) \approx p(x_n, t_{n-1}) + \frac{\partial p}{\partial t} \tau$.

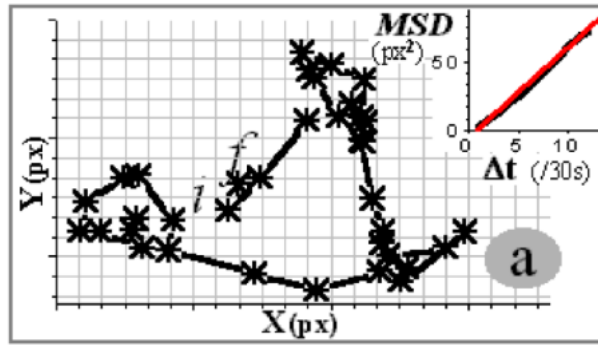


Figure 6 Suivi temporel du déplacement d'une molécule fluorescente dans une matrice sol-gel

- Q 32.** Relier par un développement limité au second ordre $p(x_{n-1}, t_{n-1})$ et $p(x_{n+1}, t_{n-1})$ à $p(x_n, t_{n-1})$.
- Q 33.** Montrer alors que $p(x, t)$ vérifie une équation de diffusion.
- Q 34.** Déterminer le coefficient de diffusion D .
- Q 35.** Exprimer $\langle \overline{OA_N} \rangle$, la moyenne statistique sur un grand nombre de configurations de la quantité vectorielle $\overline{OA_N}$ après N sauts. Commenter.
- Q 36.** Montrer que le déplacement quadratique moyen Δ^2 (noté MSD sur la figure 6), $\Delta^2 = \langle \|\overline{OA_N}\|^2 \rangle$, est proportionnel à la durée Δt correspondant à N sauts.
À deux dimensions on admet que le coefficient de proportionnalité est multiplié par deux. Sur le schéma de la figure 6, est tracé la modélisation de Δ^2 en fonction de la durée Δt .
- Q 37.** Sur la molécule suivie en figure 6, une modélisation linéaire de Δ^2 en fonction de Δt donne pour le coefficient directeur $\beta = 4 \times 10^{-13}$ SI. En déduire la valeur du coefficient de diffusion avec son unité.

III Exaltation du signal par un substrat métallique présentant une rugosité

Dans cette partie, le signal détecté n'est pas un signal de fluorescence mais un autre signal appelé « diffusion Raman », qu'on détecte avec un dispositif optique proche de celui de la partie I. Ceci n'a pas de conséquence sur ce qui est étudié dans cette partie. Dans la diffusion Raman, le champ électrique associé à l'onde lumineuse incidente induit une polarisation des molécules, qui deviennent alors sources d'une onde électromagnétique dite onde diffusée.

Le substrat présente des agrégats de nanoparticules métalliques sur lesquels des molécules se sont fixées (phénomène d'adsorption). Les concentrations utilisées sont telles que statistiquement il y a au plus une molécule adsorbée par agrégat. On constate expérimentalement que certains de ces agrégats permettent d'amplifier le signal Raman diffusé par la molécule de plusieurs ordres de grandeurs et sont pour cette raison appelés « points chauds » du substrat.

Deux contributions possibles à cette amplification sont étudiées dans cette partie :

- l'effet d'antenne lié à l'adsorption d'une molécule par une nanoparticule de dimensions nanométriques ;
- un effet lié à l'excitation collective des électrons de surface (phénomène de « plasmon de surface localisé »).

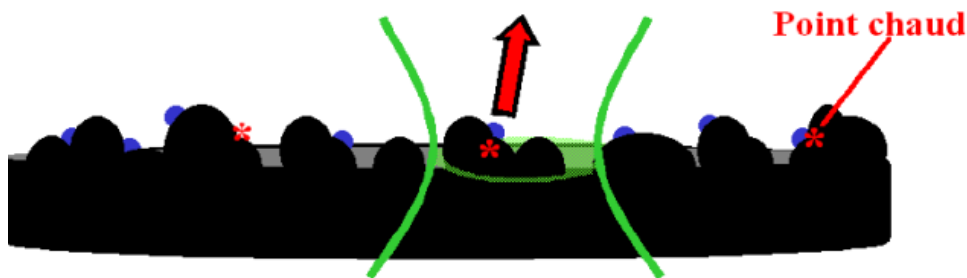


Figure 7 Substrat métallique présentant une rugosité sur lequel sont adsorbées des molécules

III.A – Dipôle induit dans une nanoparticule métallique sphérique de taille 10 nm

L'adsorption de la molécule entraîne une polarisabilité de la nanoparticule sur laquelle elle est adsorbée. Ainsi, sous l'action du champ électrique de l'onde laser, la nanoparticule acquiert un dipôle induit $\vec{p}_1 = \alpha_1 \epsilon_0 \vec{E}$ et la molécule $\vec{p}_2 = \alpha_2 \epsilon_0 \vec{E}$. Le champ électrique $\vec{E}$ est considéré comme uniforme à l'échelle étudiée. On admet que l'amplitude du champ de l'onde diffusée est une fonction croissante de l'amplitude du dipôle induit dans l'entité microscopique.

Q 38. Comment appelle-t-on la grandeur α ? Préciser, en la justifiant, la dimension de α puis donner un ordre de grandeur littéral.

Q 39. Évaluer numériquement l'ordre de grandeur du rapport α_2/α_1 . Conclure sur l'effet d'antenne que représente la nanoparticule pour la molécule.

III.B – Modèle de Drude pour les électrons métalliques de la nanoparticule

Pour rendre compte des propriétés de la nanoparticule, on cherche à exprimer sa conductivité électrique en régime sinusoïdal établi. On utilise la représentation complexe en notant les grandeurs complexes associées aux grandeurs dépendant sinusoïdalement du temps par des lettres soulignées.

On considère la vitesse d'un électron libre du métal $\underline{v}$ induite par un champ électrique oscillant d'amplitude complexe $\underline{E}_0 e^{i\omega t}$ et on néglige la force magnétique exercée sur un électron. Pour modéliser les phénomènes dissipatifs, on introduit une force visqueuse $-(m/\tau)\underline{v}$ où τ est un temps caractéristique du métal.

Q 40. Exprimer le vecteur densité volumique de courant $\underline{j}_e$ en fonction de la densité volumique n d'électrons libres du métal, de la charge de l'électron $-e$ et de sa vitesse $\underline{v}$.

Q 41. Exprimer la conductivité électrique complexe σ en fonction de n , e , ε_0 et ω et de la pulsation

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} \text{ appelée pulsation plasma.}$$

Q 42. Montrer que si la constante τ est « suffisamment » grande, alors la conductivité σ est imaginaire pur. Quelle est alors la valeur moyenne de la puissance cédée par le champ électrique dans le métal ?

Q 43. On définit la constante diélectrique du métal par $\varepsilon = 1 - \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0}$. Exprimer ε en fonction de ω et de la pulsation ω_p , dans le cas où les pertes sont négligeables.

On donne alors l'expression de la polarisabilité de la particule métallique sphérique de rayon a en fonction de la constante diélectrique du métal

$$\alpha = 4\pi a^3 \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right).$$

Q 44. En déduire la condition sur la pulsation du champ pour que la polarisabilité de la particule métallique sphérique devienne très grande.

La pulsation résonante pour une particule d'argent sphérique correspond à une longueur d'onde de 355 nm. Mais lorsque la forme s'allonge et que la particule devient ellipsoïdale, la résonance se dédouble et une des deux résonances (celle correspondant au mouvement d'oscillation électronique suivant le grand axe de l'ellipsoïde) est déplacée vers le rouge. Ainsi à 532 nm pour l'argent, la résonance plasmon correspond à une nanoparticule présentant une excentricité de 4.

Données et formulaire

Relations de conjugaison de Descartes et de Newton pour une lentille mince de distance focale f' , de centre optique O , de foyer objet F , de foyer image F' et expression du grandissement algébrique γ , A et A' étant deux points conjugués appartenant à l'axe optique.

$$\begin{cases} \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \\ \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{F'A'} \overline{FA} = -f'^2 \\ \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \end{cases}$$

Constantes physiques

Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

• • • FIN • • •



Numéro de place

--	--	--	--	--	--

Numéro d'inscription

--	--	--	--	--	--

Nom

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Signature

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Épreuve : Physique 2 PC

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille

--	--	--	--	--	--

Question 2

Sens de propagation de la lumière

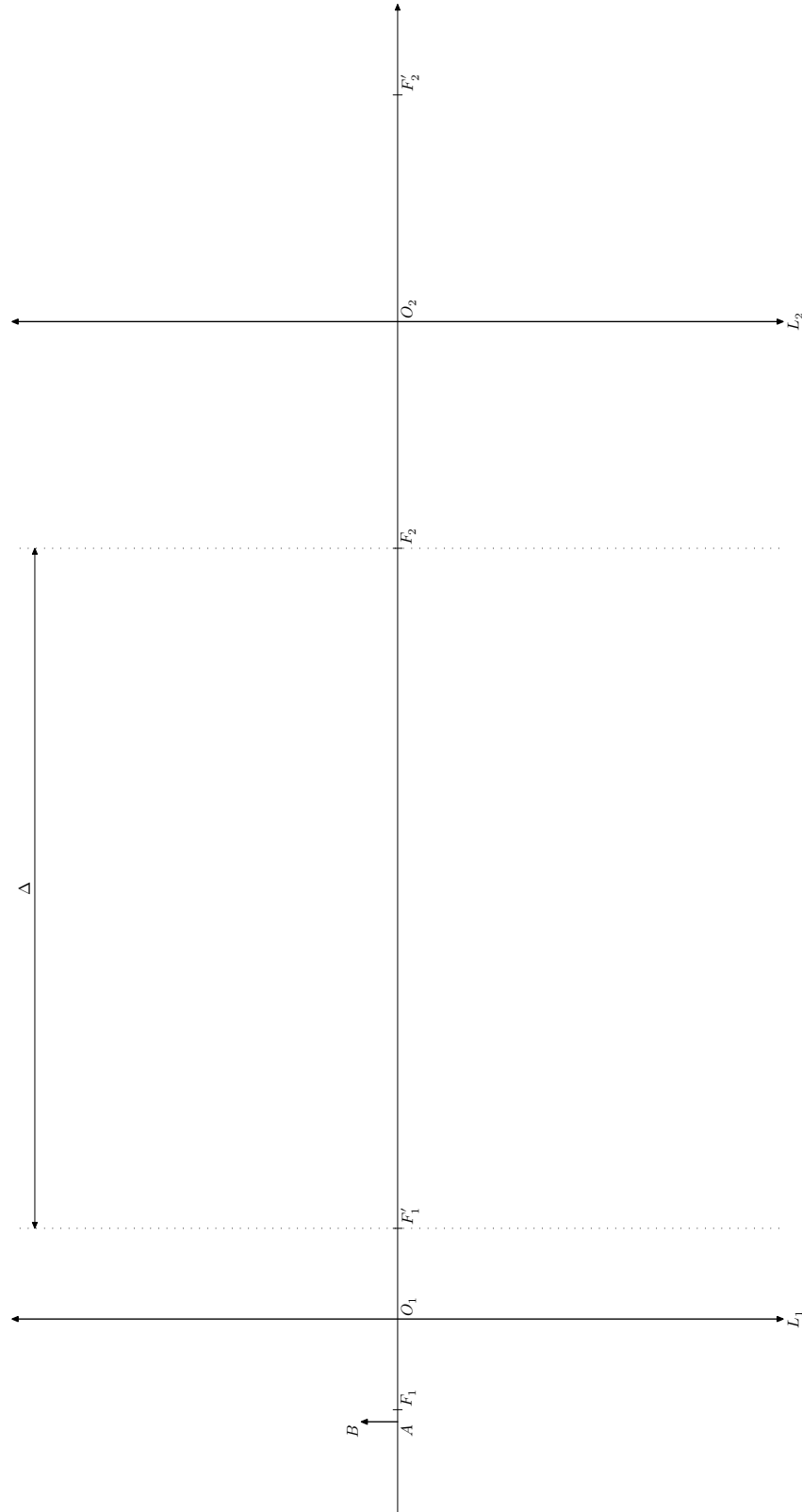


Figure A Schéma optique du microscope

Question 6

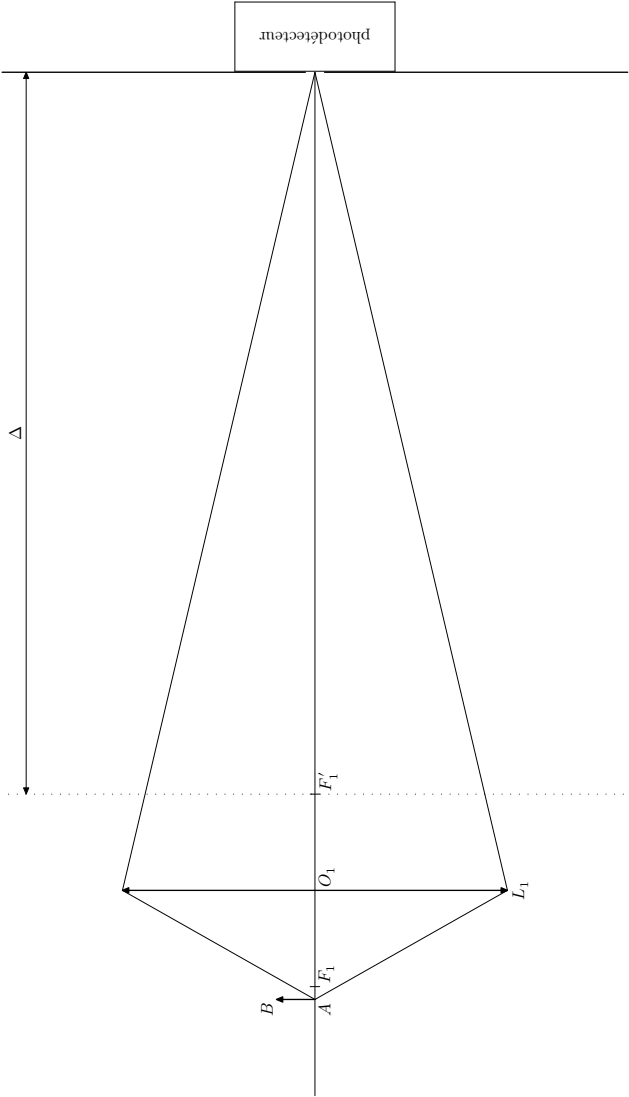


Figure B

Question 7

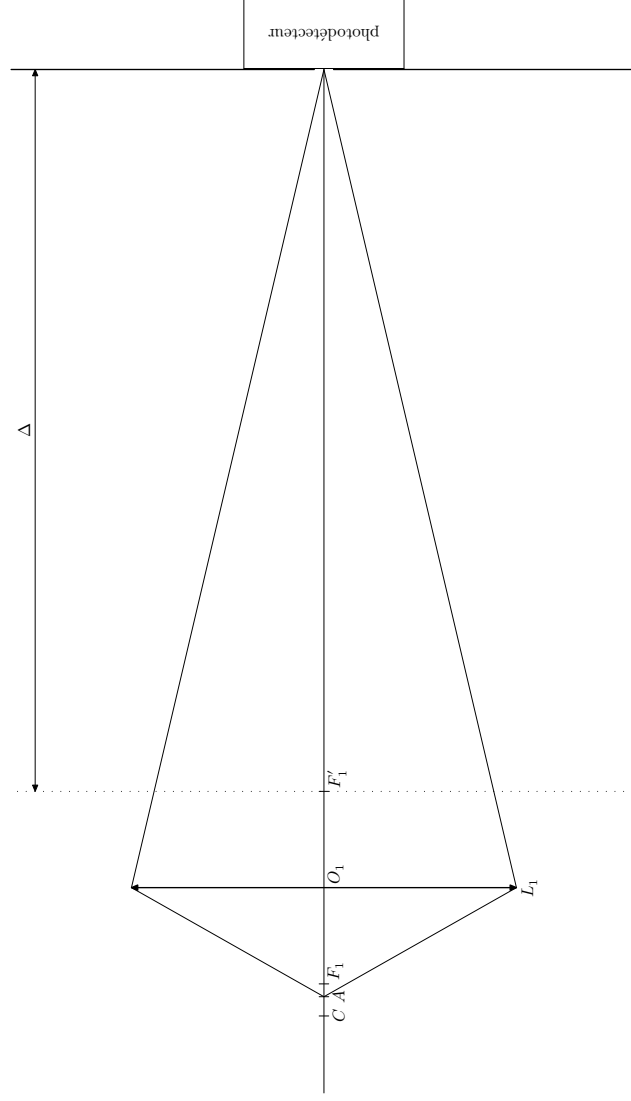


Figure C



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2021

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Vélocimétrie laser Doppler

Alors même que la simulation numérique en mécanique des fluides est de plus en plus performante, le recours à l'expérimentation reste nécessaire, ne serait-ce que pour valider ces simulations.

À cette fin, la détermination de cartes de vitesses au sein d'un écoulement est un outil précieux. Ce sujet s'intéresse à une méthode peu invasive : la vélocimétrie laser Doppler. Le fluide dont on souhaite étudier l'écoulement estensemencé à l'aide de particules le plus souvent solides, qui se déplacent au sein du fluide, idéalement à la même vitesse et sans le perturber. Lors du passage de ces particules à travers un ou plusieurs faisceaux laser, la lumière est diffusée et son analyse permet la détermination de la vitesse de la particule, et donc localement du fluide qui la porte.

On propose en figure 1 une vue d'ensemble du dispositif de mesure à deux faisceaux, sur laquelle on ne représente pas le dispositif destiné à analyser la lumière diffusée par les particules ensemencées dans le fluide.

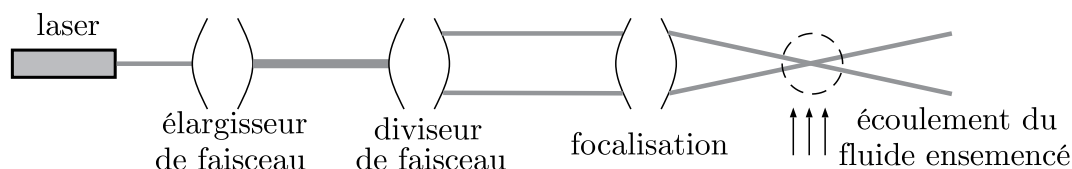


FIGURE 1 – Vue d'ensemble du dispositif.

Ce sujet aborde dans une première partie le principe de la vélocimétrie laser Doppler, puis étudie deux domaines d'application : l'écoulement d'un liquide dans une canalisation puis l'étude d'ondes sonores guidées. Ces parties sont assez largement indépendantes.

Les applications numériques seront données avec 1 seul chiffre significatif. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires $\hat{u}$ ou d'une flèche dans le cas général $\vec{v}$. Les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont notés $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$ et ceux de la base cylindrique d'axe Ox $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_x)$. En fin de sujet sont regroupées des constantes de la physique utiles, ainsi qu'un formulaire d'analyse vectorielle.

I Principe de la vélocimétrie laser

Dans toute cette partie, le fluide en écoulement est supposé transparent. On note c_0 la vitesse de la lumière dans le vide et dans le fluide, assimilé au vide du point de vue des ondes électromagnétiques.

I.A Montage à 1 faisceau

L'effet Doppler décrit le décalage en fréquence d'une onde, observé entre les mesures à l'émission et à la réception, lorsque la distance entre l'émetteur et le récepteur varie au cours du temps. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, supposé galiléen, on fixe un laser et un récepteur lumineux. Le laser à argon utilisé émet une onde plane progressive monochromatique (OPPM) électromagnétique de fréquence f_e et longueur d'onde $\lambda_e = 5,2 \times 10^2$ nm, dirigée selon $\hat{u}_e$ et se propageant à c_0 .

Une particule solide P , supposée ponctuelle et possédant une vitesse $\vec{V}$ dans $\mathcal{R}$, constitue un observateur mobile par rapport à l'émetteur laser fixe. Par effet Doppler, elle perçoit donc une fréquence f_p différente de la fréquence f_e émise.

La figure 2 décrit une période spatiale λ_e de l'OPPM délimitée par deux fronts d'onde Π_1 et Π_2 à l'instant t , et par deux fronts d'ondes Π'_1 et Π'_2 à l'instant $t' = t + \Delta t$ avec $\Delta t = 1/f_p$. P appartient à Π_1 à l'instant t puis à Π'_2 à l'instant t' .

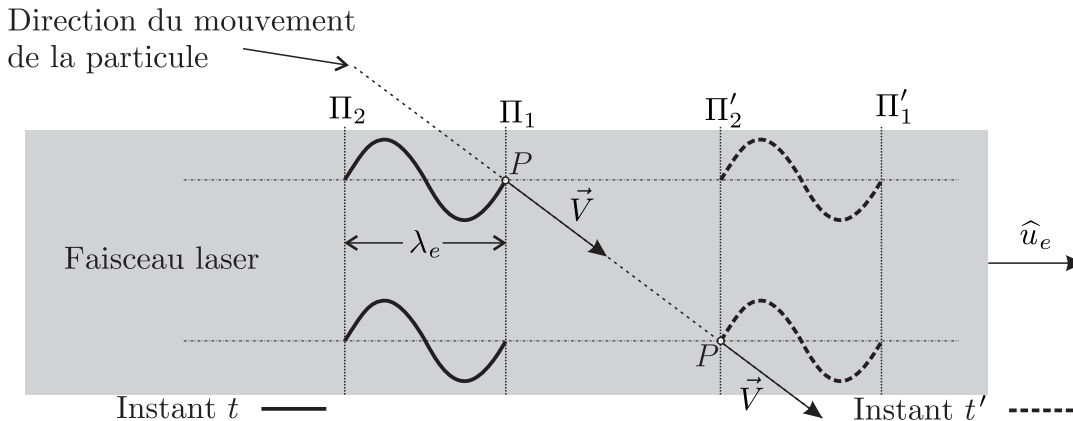


FIGURE 2 – Effet Doppler.

- – 1. En faisant apparaître $\vec{V} \cdot \hat{u}_e$, exprimer la distance parcourue par l'onde pendant Δt en fonction de la distance parcourue par la particule et de λ_e . En déduire la relation

$$f_p = f_e \left(1 - \frac{\hat{u}_e \cdot \vec{V}}{c_0} \right)$$

La particule mobile diffuse à son tour de la lumière vers un photorécepteur fixe, selon la direction de $\hat{u}_d$. Par effet Doppler, ce dernier perçoit une fréquence f_d différente de la fréquence f_p émise.

- – 2. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la particule et en translation par rapport à $\mathcal{R}$, la particule émettrice de lumière est fixe et le récepteur mobile. En le justifiant, adapter le résultat de la question précédente afin de relier f_d et f_p .
- – 3. Pour une vitesse $\|\vec{V}\| \ll c_0$ de l'ordre de 10 cm.s^{-1} , en déduire que :

$$f_d \simeq f_e + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_e) \cdot \vec{V}}{\lambda_e} \quad (1)$$

Pour un laser à argon, que penser de l'écart relatif en fréquence, entre OPPM émise et reçue au niveau du photorécepteur ? On s'appuiera sur une analyse numérique.

I.B Montage à 2 faisceaux

Afin d'améliorer la précision des vitesses mesurées, ainsi que la localisation de celles-ci dans le fluide, on a recours à un dispositif à deux faisceaux laser.

I.B.1 Élargisseur et diviseur de faisceau

L'élargisseur de faisceau, présenté en figure 3-a, transforme un faisceau cylindrique laser de largeur d_0 , en un autre de largeur $d'_0 > d_0$. Le diviseur de faisceau, présenté en figure 3-b, le sépare ensuite en deux faisceaux parallèles de largeur identiques d''_0 qui ne se recouvrent pas et dont les axes sont distants de D .

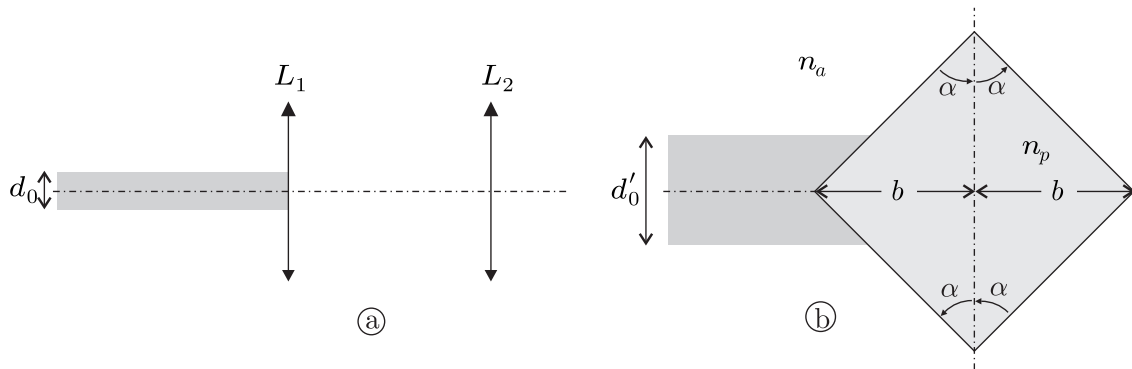


FIGURE 3 – Élargisseur (a) et diviseur de faisceau (b)

- – 4. Reproduire le schéma de l'élargisseur de faisceau de la figure 3–a et positionner les foyers des deux lentilles permettant d'obtenir un faisceau de largeur d'_0 supérieur à d_0 . Exprimer alors d'_0 en fonction de d_0 et des distances focales f'_1 et f'_2 de L_1 et L_2 .

Exprimer l'encombrement de ce dispositif, défini comme sa longueur sur l'axe optique, en fonction de f'_1 , d_0 et d'_0 .

Proposer un dispositif permettant de réduire cet encombrement sans changer d'_0 . On exprimera le nouvel encombrement et on justifiera qu'il est inférieur à celui du premier dispositif.

Le faisceau de largeur d'_0 arrive sur un prisme diviseur de faisceau en verre d'indice n_p dont les caractéristiques géométriques sont précisées sur le schéma de la figure 3–b. On note $2b$ la largeur du prisme et on prendra $\alpha = \pi/4$.

- – 5. Reproduire le schéma et le compléter afin d'expliquer son fonctionnement : on y indiquera d'_0 , d''_0 et D . En justifiant rapidement sa réponse, donner la valeur de d''_0 . Pourquoi parle-t-on de diviseur de faisceau à différence de marche nulle ? Proposer un autre dispositif permettant d'obtenir la division d'un faisceau. Est-il à différence de marche nulle ?
- – 6. À la limite de non recouvrement des faisceaux, déterminer la relation entre b , d'_0 et n_p sous la forme

$$b = \frac{d'_0}{2} \left[\frac{g(n_p)}{g(n_p) - 1} \right]$$

où g est une fonction de n_p que l'on explicitera, sans fonction trigonométrique. En déduire une condition sur b pour que les faisceaux soient effectivement séparés.

I.B.2 Étude de l'onde diffusée

Une lentille convergente focalise les deux faisceaux laser précédents vers une zone de recouvrement où circule le fluide en écoulement. Ces deux faisceaux, notés F_1 et F_2 , sont assimilés à des OPPM d'extension spatiale finie de largeur d , de même intensité et de même fréquence f_e .

Sur la figure 4, on note $\vec{k}_{e1} = k_e \hat{u}_{e1}$ et $\vec{k}_{e2} = k_e \hat{u}_{e2}$ les vecteurs d'onde respectivement associés à F_1 et F_2 ainsi que θ l'angle entre ces deux vecteurs. La lumière diffusée de la particule P vers le récepteur O est portée par le vecteur d'onde commun $\vec{k}_d = k_d \hat{u}_d$.

On s'intéresse alors au passage d'une particule solide d'ensemencement P , de vitesse $\vec{V} = V_x \hat{u}_x + V_y \hat{u}_y + V_z \hat{u}_z$ dans la zone de recouvrement des faisceaux.

Au niveau du récepteur, les champs électriques issus de F_1 et F_2 et diffusés par P s'écrivent :

$$\underline{\vec{E}}_{d1} = \underline{E}_{d1} \hat{u}_x = E_0 e^{2i\pi f_{d1} t} \hat{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}_{d2} = \underline{E}_{d2} \hat{u}_x = E_0 e^{2i\pi f_{d2} t} \hat{u}_x$$

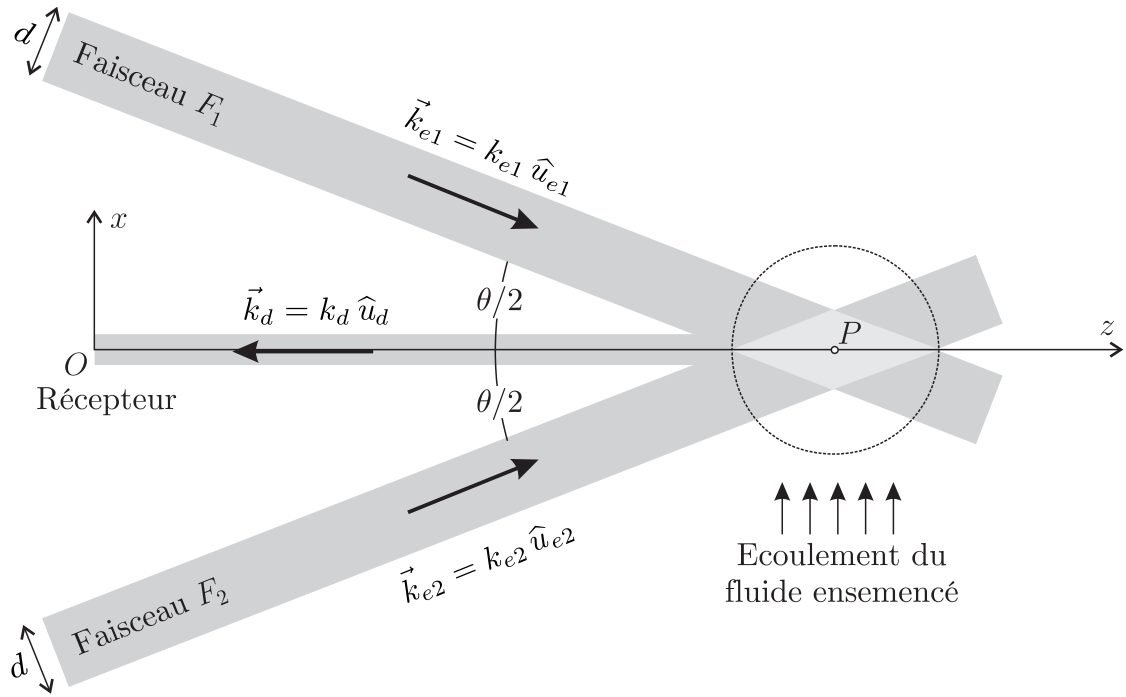


FIGURE 4 – Zone de recouvrement des lasers. Diffusion de lumière par une particule.

- – 7. En utilisant le résultat (1), exprimer $f_{d1} - f_{d2}$ en fonction de λ_e , θ et de l'une des composantes de la vitesse $\vec{V}$.

Le photorécepteur est sensible à $I(t) = K |\underline{E}_{d1} + \underline{E}_{d2}|^2$ où K est une constante positive caractéristique du récepteur.

- – 8. Montrer que le signal reçu s'écrit sous la forme $I(t) = 2\Lambda [1 + \cos(\beta t)]$. On précisera Λ et β en fonction des données. Exprimer la fréquence f_c de clignotement de cette lumière diffusée en fonction de λ_e , θ et l'une des composantes de $\vec{V}$.
- – 9. La valeur de la composante de la vitesse particulière intervenant dans le résultat de la question précédente est de 10 cm.s^{-1} ; calculer numériquement la valeur de f_c obtenue avec deux faisceaux issus d'un laser à argon faisant un angle de $3,6^\circ$ entre eux. Justifier l'utilisation de deux faisceaux lasers en termes de précision de la mesure et de localisation de la particule.

I.B.3 Cellule de Bragg

- – 10. Le photorécepteur utilisé possède un temps de réponse de $\tau = 4,4 \times 10^{-9} \text{ s}$ et l'angle θ entre les faisceaux vaut $3,6^\circ$. Pour le laser à argon, déterminer littéralement puis numériquement la plage $[-V_{\max}, +V_{\max}]$ de vitesses détectables par le système.
- – 11. Pourquoi ne peut-on mesurer qu'une seule composante de $\vec{V}$ avec ce dispositif? Proposer une solution permettant d'accéder simultanément aux trois composantes du vecteur vitesse de la particule.
- – 12. Pourquoi ne peut-on pas faire la différence entre une valeur positive et une valeur négative de la composante mesurée?

Avant d'atteindre la zone de recouvrement, on place une cellule de Bragg sur le trajet du faisceau F_1 uniquement. Il s'agit d'un milieu transparent parcouru par une OPPM acoustique de fréquence f_B .

En traversant cette cellule qui se comporte comme un réseau, F_1 donne naissance à différents faisceaux, déviés par rapport au faisceau incident. Parmi eux, seul celui d'ordre 1, de fréquence $f_e + f_B$, croise F_2 , inchangé à la fréquence f_e , dans la zone de recouvrement.

- – 13. Déterminer la nouvelle expression f'_c de la fréquence de clignotement, en fonction de f_B , λ_e , θ et d'une des composantes de $\vec{V}$. Dans les mêmes conditions que la question 10, exprimer et calculer la fréquence f_B optimale, c'est-à-dire celle permettant la mesure d'une des composantes de $\vec{V}$ (et de son signe) dans l'intervalle $[-V_{\max}/2, +V_{\max}/2]$. Analyser votre résultat sachant que la centaine de MHz est réalisable dans certains matériaux.

II Application à la mesure d'un profil de Poiseuille

On étudie l'écoulement stationnaire, de débit volumique Q , d'un liquide incompressible de masse volumique μ et de viscosité dynamique η , dans une conduite horizontale cylindrique de rayon R et de longueur L selon l'axe Ox .

- – 14. Exprimer le nombre de Reynolds de l'écoulement en fonction de grandeurs définies ci-dessus. À quelle condition l'écoulement peut-il être considéré comme laminaire ? On supposera cette hypothèse vérifiée dans la suite.

La conduite est soumise à des pressions P_e en entrée et $P_s = P_e - \Delta P$ en sortie avec $\Delta P > 0$. À l'intérieur, le champ de pression et celui des vitesses s'écrivent sous la forme $P(M,t) = P(x)$ et $\vec{v}(M,t) = v(r,x)\hat{u}_x$ en coordonnées cylindriques. Pour une longueur L de conduite, la force de viscosité qu'exerce le liquide en $r > r_0$ sur le liquide en $r < r_0$, s'écrit $\vec{F} = 2\eta\pi r_0 L \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=r_0} \hat{u}_x$.

- – 15. Justifier que $v(r,x)$ est indépendant de x . Établir une équation différentielle en $v(r)$.
En déduire que le profil des vitesses dans la conduite est de la forme $v(r) = A \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^q \right]$ où q est un entier que l'on déterminera et dans laquelle on précisera l'expression de A en fonction de ΔP , R , L et η .
Déterminer enfin une relation entre Q et A et R .

On réalise une série de mesures de la vitesse axiale du liquide dans une conduite cylindrique de rayon $R = 13$ mm, dans laquelle une solution aqueuse circule.

Pour réaliser ces mesures, la zone de croisement des faisceaux est déplacée le long d'un diamètre de la conduite.

Pour chaque position, une dizaine de mesures est prise et leur moyenne calculée.

On obtient les résultats de la figure 5, pour deux types de solutions :

- La solution 1 est constituée d'eau de viscosité dynamique $\eta_1 = 1,0 \times 10^{-3}$ Pa.s ;
- La solution 2 est un mélange à parts égales d'eau et de sucre de canne de masse volumique $\mu_2 = 1,2 \times 10^3$ kg.m⁻³ et de viscosité dynamique $\eta_2 = 5,5 \times 10^{-3}$ Pa.s

Sur l'axe des abscisses de la figure 5, la distance r est relative à l'axe de la conduite.

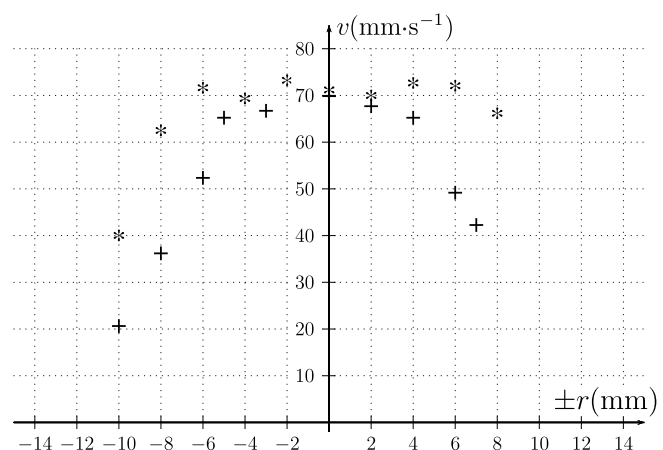


FIGURE 5 – Solution 1 (*) ; solution 2 (+)

- – 16. Lequel de ces deux écoulements correspond le plus à un écoulement laminaire ? Estimer le débit volumique puis en déduire le nombre de Reynolds pour chacune de ces deux expériences. Interpréter les résultats.

III Application à l'étude d'ondes acoustiques

III.A Onde acoustique guidée

Un émetteur produit dans l'air une onde acoustique de fréquence $f = 40 \text{ kHz}$ et de longueur d'onde λ . L'air, de viscosité négligeable, possède une masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$, un coefficient de compressibilité isentropique χ_S et un coefficient de Laplace $\gamma = 1,4$. Au repos, à 20°C , la pression de l'air vaut $P_0 = 1 \text{ bar}$ et sa masse volumique $\mu_0 = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$.

- – 17. Qu'est-ce que l'approximation acoustique ? Donner sans démonstration un système de trois équations locales linéarisées utiles pour un problème unidimensionnel orienté par l'axe Ox . En déduire l'équation d'onde vérifiée par la surpression $p_1(x, t)$.
- – 18. En assimilant l'air à un gaz parfait, montrer que la célérité c du son dépend de la masse molaire du milieu. Calculer numériquement c dans l'air à 20°C .
- – 19. Pour une OPPM, établir l'expression de l'impédance acoustique Z_a . Exprimer l'intensité en décibel I_{dB} en fonction de v_m l'amplitude de la vitesse acoustique, $I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ l'intensité seuil d'audibilité d'un son, et Z_A . Calculer numériquement v_m si $I_{dB} = 120 \text{ dB}$ dans l'air à 20°C . Le vélocimètre à deux lasers étudié précédemment permettrait-il d'accéder à de telles valeurs de v_m ?

On généralise l'équation d'onde vérifiée par la surpression $p_1(M, t)$ à une géométrie quelconque :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(M, t) = c^2 \Delta p_1(M, t)$$

Deux plaques rigides de grandes dimensions sont fixées en $z = 0$ et $z = a$ et représentées en figure 6. Elles imposent comme conditions à la surpression :

$$\left. \frac{\partial p_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial p_1}{\partial z} \right|_{z=a} = 0$$



FIGURE 6 – Modèle plan de guide d'onde acoustique.

- – 20. Justifier que l'on cherche une solution du problème sous la forme $p_1(M, t) = p(z) \cos(\omega t - kx + \phi)$ puis caractériser physiquement une telle onde. On prendra $k > 0$ et $\omega > 0$.
- – 21. Déterminer et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $p(z)$. On montrera que les solutions s'écrivent :

$$p_n(z) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \quad n \in \mathbb{N}$$

Justifier précisément que le mode propre fondamental corresponde à $n = 0$.

- – 22. Trouver la relation de dispersion pour chaque mode propre et montrer l'existence d'une pulsation de coupure $\omega_{c,n}$ à partir de laquelle le mode propre $n > 0$ peut se propager. En déduire la vitesse de phase et la vitesse de groupe, associées à chaque mode propre, en fonction de c , ω et $\omega_{c,n}$. Commenter ces expressions.
- – 23. À quelle condition sur a et la longueur d'onde λ de l'onde libre, le mode fondamental $n = 0$ se propage-t-il seul entre les plaques ? Faire l'application numérique correspondant à cette condition.

Étudions désormais la propagation d'une onde acoustique dans une conduite circulaire de rayon a . On peut utiliser les résultats de la question 22, à condition de considérer une pulsation de coupure $\omega_{c,nm} = \frac{\mu_{nm}c}{a}$. Le paramètre μ_{nm} désigne la valeur de la variable x pour laquelle la fonction de Bessel d'ordre n , $J_n(x)$, admet son $m^{\text{ième}}$ maximum.

ordre n	μ_{n1}	μ_{n2}	μ_{n3}	μ_{n4}
0	0	3,8	7,0	10,2
1	1,8	5,3	8,5	
2	3,1	6,7	10,0	
3	4,2	8,0		
4	5,3	9,3		
5	6,4			
6	7,5			

- – 24. Quels modes propres, caractérisés par un couple d'entiers (n,m) , peuvent se propager dans un tuyau de diamètre $2a = 11$ mm ?
- – 25. Ce tuyau est alimenté par des salves d'une durée de 4 périodes. Les différents modes propres se propageant sous forme de paquets d'ondes, quelle longueur de tuyau faut-il choisir pour pouvoir les résoudre en sortie ?

III.B Production de l'onde acoustique

Pour émettre des ondes acoustiques par salves, l'émetteur doit être alimenté par un générateur de trains de sinusoïdes à 40 kHz.

Considérons tout d'abord le montage de la figure 7 où l'ALI, supposé idéal, est alimenté par des tensions ± 15 V et dont les tensions de saturation sont alors également $\pm V_{sat} = \pm 15$ V.

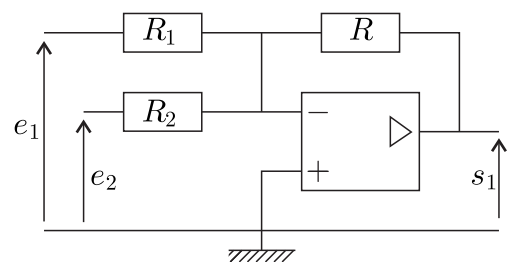


FIGURE 7 – Montage à ALI idéal.

- – 26. Exprimer la tension s_1 en fonction des données du montage. Représenter un montage permettant d'obtenir une tension $s = -s_1$.

On adapte ce montage de la façon suivante :

- $R = R_1 = R_2 = 47$ k Ω ;
- $e_1(t)$: tension sinusoïdale de fréquence $f_1 = 40$ kHz et d'amplitude crête à crête 8 V ;
- $e_2(t)$: tension en créneau de fréquence $f_2 = 5,0$ kHz et d'amplitude crête à crête 12 V ;

- – 27. Tracer l'allure de la courbe $s(t)$ en fonction du temps, sur une durée de 4×10^{-4} s. On précisera les coordonnées des points remarquables.

On modifie l'alimentation de l'ALI, initialement de $\pm 15\text{ V}$, par deux tensions de 0 V et 15 V .

- – 28. Reprendre la question précédente : en quoi l'allure de $s(t)$ est-elle modifiée. L'objectif d'un générateur de salves semble-t-il atteint ?
- – 29. La fiche technique de l'amplificateur opérationnel LM741 utilisé indique une vitesse limite de balayage de $0,5\text{ V}\cdot\mu\text{s}^{-1}$. Pourquoi le signal $s(t)$ sera-t-il déformé ? Comment minimiser les effets de ce défaut sans changer de composant ?

III.C Ensemencement

Pour mesurer la vitesse de l'air, due à la présence d'une onde acoustique, on y insémine des particules solides en suspension qui diffusent la lumière. La vitesse mesurée par effet Doppler n'est donc pas directement la vitesse v_f du fluide étudié, mais la vitesse v_p des particules d'ensemencement utilisées comme traceurs.

Au cours de son mouvement, une particule sphérique de masse volumique $\mu_p = 1,0 \times 10^3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ n'est soumise qu'à la force de frottement visqueux $-3\pi d_p \eta_f (v_p - v_f)$ où $d_p = 1,0\text{ }\mu\text{m}$ désigne le diamètre de la particule et $\eta_f = 1,8 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ la viscosité dynamique de l'air à 20°C .

- – 30. Justifier l'expression de cette force par le calcul d'un nombre adimensionné.
- – 31. En régime harmonique de fréquence f , exprimer le rapport des vitesses complexes v_p/v_f en fonction de f et d'une fréquence f_0 à définir en fonction des données. Calculer $\overline{f_0}$ numériquement.
- – 32. Dans quel intervalle fréquentiel faut-il travailler ? À la fréquence f de l'émetteur, quelle erreur relative est commise sur la mesure de l'amplitude de v_f ? Quelle fréquence maximale faut-il choisir pour commettre une erreur relative inférieure à 1% ? Conclure sur l'intérêt de ces particules pour étudier des infrasons, des sons audibles ou des ultrasons.

Données numériques

- vitesse de la lumière dans le vide : $c_0 = 3,0 \times 10^8\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
- constante des gaz parfaits : $R = 8,3\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Opérateurs vectoriels

Expressions des opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques (r, θ, x) pour un champ scalaire $U(r, \theta, x)$ et un champ vectoriel $\vec{A} = A_r(r, \theta, x)\hat{u}_r + A_\theta(r, \theta, x)\hat{u}_\theta + A_x(r, \theta, x) :$

$$\vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial x}\hat{u}_x \quad \Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$\text{rot}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_x}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial x}\right)\hat{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial r}\right)\hat{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{u}_x$$

$$\Delta\vec{A} = \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2}\left(A_r + 2\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\right]\hat{u}_r + \left[\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(A_\theta - 2\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\right]\hat{u}_\theta + [\Delta A_x]\hat{u}_x$$

FIN DE L'ÉPREUVE



ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France. Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.



Mesures optiques de propriétés mécaniques

Ce sujet comporte deux parties indépendantes présentant des méthodes de mesures fines utilisant divers dispositifs optiques. La partie **I** décrit une structure courante de l'univers, les étoiles binaires, avant de présenter une méthode interférométrique pour mesurer leur écart angulaire. La partie **II** s'intéresse à la structure fine des raies d'émission de l'atome d'hydrogène et à leur mesure interférométrique. Les deux méthodes optiques présentées ici ont en commun leur premier auteur, le physicien américain ALBERT MICHELSON.

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les données nécessaires, accompagnées d'un formulaire utile à la simplification des relations trigonométriques, sont regroupées en fin d'énoncé.

I Les étoiles binaires et leur mesure

Cette partie comporte deux problèmes **I.A** et **I.B**, qui sont totalement indépendants.

En astronomie, on parle d'étoile double pour une paire d'étoiles qui apparaissent comme proches l'une de l'autre dans le ciel lorsqu'on les observe depuis la Terre. Dans certains cas il s'agit d'un système binaire d'étoiles en orbite mutuelle : elles tournent toutes les deux autour de leur barycentre commun sous la seule action des forces gravitationnelles. Dans d'autres cas, leur alignement est simplement fortuit et ce cas ne nous concerne pas dans ce qui suit.

I.A Structure gravitationnelle d'une étoile binaire

I.A.1 Un premier modèle très simple

On étudie le système formé de deux étoiles assimilées à deux points matériels A et B , de même masse M , toutes les deux en orbite circulaire de rayon r autour de leur barycentre commun O , lui-même immobile dans le référentiel galiléen d'étude $(Oxyz)$ (figure 1). On note $\mathcal{G}$ la constante de la gravitation universelle.

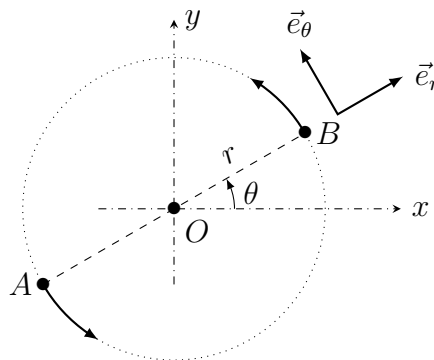


FIGURE 1 – Étoile binaire symétrique en mouvement circulaire

- – 1. Exprimer les forces $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_A$ exercées au sein du système en fonction notamment de M et r .

Donner l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$ associée à ces forces.

- – 2. Exprimer la période T_1 du mouvement des deux composantes de l'étoile binaire en fonction de r , M et $\mathcal{G}$.

Application Numérique : Le système est formé de deux étoiles de même masse que le Soleil, distantes l'une de l'autre de la même distance que la distance moyenne Terre–Soleil (dite *unité astronomique* UA). Calculer la valeur de la période T_1 associée que l'on exprimera en années terrestres.

- – 3. Exprimer, en fonction de $\mathcal{G}$, M et r , l'énergie mécanique totale du système. Commenter brièvement le signe de l'expression obtenue.

I.A.2 Généralisation partielle du modèle

On étudie maintenant, relativement au référentiel galiléen (Ωxyz) , le mouvement du système binaire formé de deux étoiles ponctuelles A et B de masses $m_A \geq m_B$. On notera $\vec{R} = \overrightarrow{AB}$ leur position relative et $R = \|\vec{R}\|$. Le vecteur $\vec{R}$ est *a priori* variable (figure 2) ; le barycentre des deux étoiles, noté G , est donc aussi mobile.

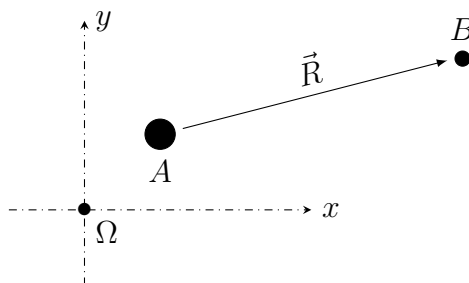


FIGURE 2 – Étoile binaire quelconque en mouvement arbitraire.

- – 4. Exprimer en fonction de m_A , m_B , $\mathcal{G}$ et $\vec{R}$ les forces $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_A$ exercées sur les deux étoiles. Ces forces dépendent-elles du référentiel d'étude ?
- – 5. Montrer que le référentiel $(Gxyz)$ est également galiléen. *Toute la suite de l'étude sera menée relativement à ce nouveau référentiel.*
- – 6. Établir les relations $\overrightarrow{GB} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{R}$ et $\overrightarrow{GA} = -\frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{R}$.

En déduire la relation $\frac{d^2}{dt^2} \vec{R} = -K \frac{\vec{R}}{R^n}$ et expliciter les constantes K et n .

- – 7. Si l'étoile binaire forme un système lié, justifier que son mouvement est périodique et déterminer l'expression de la période T_2 du mouvement en fonction notamment des deux masses et d'une longueur que l'on précisera.

I.B Mesure de l'écartement angulaire des étoiles doubles

Lorsque les deux étoiles sont très proches, elles peuvent être difficiles à distinguer. L'étude menée ici sera faite dans le domaine visible et on prendra pour longueur d'onde $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$ d'un éclairage supposé ici monochromatique, avec un télescope constitué d'un miroir parabolique (dont on admettra qu'il est équivalent à une lentille mince, unique et convergente) de distance focale $f' = 33 \text{ m}$ et de diamètre d'ouverture $d = 5 \text{ m}$. On rappelle l'expression $\sin \theta \sim \lambda_0/d$ reliant l'échelle angulaire du phénomène de diffraction et la taille caractéristique de l'ouverture diffractante.

- – 8. En déduire la valeur du pouvoir séparateur (ou résolution angulaire) du télescope utilisé. Montrer qu'un système binaire formé de deux étoiles distantes d'une unité astronomique ne peut pas être séparé s'il est, par rapport à l'observateur, distant de $L > L_{\max}$. Déterminer la valeur de $L_{\max}$ en années-lumière.

Lorsque la distance à laquelle se trouve le système double est trop élevée pour pouvoir en offrir une image bien séparée, on peut utiliser un dispositif interférométrique comme celui installé en 1920 par MICHELSON et PEASE devant le télescope américain *Hooker* (figure 3).

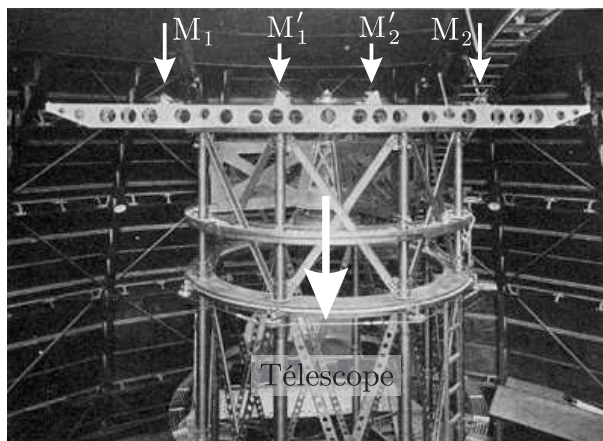


FIGURE 3 – Le dispositif interférométrique réel.

Le schéma décrivant le dispositif est proposé figure 4. On y remarquera que l'axe du télescope y est représenté horizontal pour plus de lisibilité et que ce dernier a été remplacé par une lentille équivalente.

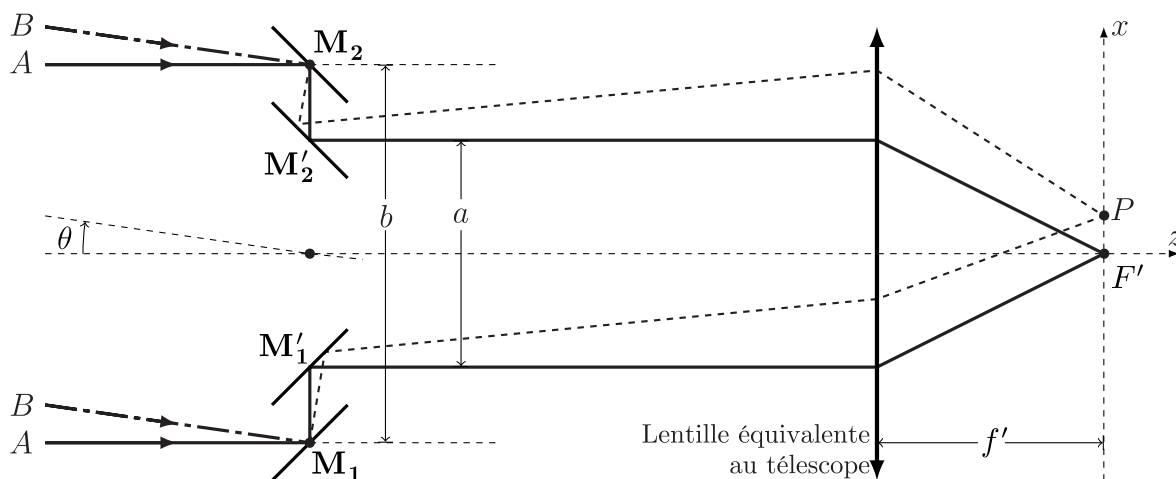


FIGURE 4 – Le schéma équivalent au dispositif interférentiel.

Le faisceau parallèle issu de l'étoile A parvient dans la direction de l'axe optique sur le système, avant d'être réfléchi et diffracté par les miroirs M_1 et M_2 . Les miroirs auxiliaires M'_1 et M'_2 renvoient ces faisceaux vers le télescope avant de converger dans son plan focal image, au point F' pour le faisceau non diffracté et en d'autres points P pour le faisceau diffracté.

- – 9. Rappeler l'énoncé du théorème de MALUS (ou de MALUS et DUPIN). En déduire l'expression de la différence de marche $\delta_A = (AM_1P) - (AM_2P)$ en fonction de la géométrie du dispositif et d'une coordonnée cartésienne de P .
Application Numérique : On donne $a = 2,50$ m. Calculer et commenter l'interfrange i .

- – 10. Exprimer l'intensité lumineuse (ou éclairement) $I_A(P)$ observée au point P en fonction de λ_0 , a , f' , x et de I_{0A} qui désigne l'intensité totale issue de A et parvenant sur l'un des miroirs M_1 ou M_2 .

On prend en compte maintenant la lumière provenant de l'étoile B , à la même longueur d'onde λ_0 mais décalée d'un angle θ . On note I_{0B} l'intensité totale issue de B . Sur la figure 4 ci-dessus on supposera $\theta > 0$.

- – 11. Les sources A et B sont-elles cohérentes entre elles ?
Calculer $\delta_B = (BM_1P) - (BM_2P)$ en fonction de δ_A , θ et b .
- – 12. Exprimer l'intensité lumineuse totale $I(P)$ en utilisant la formule géométrique affirmée en annexe pour l'exprimer sous la forme :

$$I(P) = K \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{x - x_0}{\Delta x} \right) V(\theta) \right]$$

dans laquelle on explicitera uniquement les constantes K et Δx ainsi que la fonction $V(\theta)$ en fonction des données du problème.

- – 13. Quelles sont les significations physiques de x_0 et Δx ? Expliquez comment l'étude des franges permet de mesurer l'écartement angulaire des deux composantes d'une étoile double à l'instant de l'observation. Comment, à votre avis, peut-on ainsi distinguer un vrai système binaire d'une étoile double par alignement fortuit ?
- – 14. Quelle valeur faut-il donner à la largeur commune ℓ des miroirs auxiliaires M'_1 et M'_2 pour pouvoir observer en tout au moins une dizaine de franges de part et d'autre de la frange centrale ?

II La raie rouge de l'hydrogène

Cette partie comporte deux problèmes II.A et II.B qui sont très largement indépendants.

II.A Les raies d'émission de l'atome d'hydrogène

II.A.1 Le modèle de Bohr et les raies de Balmer

En 1913, le physicien danois NIELS BOHR propose un modèle semi-classique permettant d'estimer l'énergie de l'électron (masse m_e , charge $-e$) au sein de l'atome formé d'un proton (charge $+e$ fixe à l'origine O des coordonnées). Dans un modèle classique et non relativiste, la seule force prise en compte est la force d'attraction électrique entre les deux charges. On notera ε_0 la permittivité diélectrique du vide.

- – 15. Montrer que dans ce modèle le mouvement de l'électron est plan. On notera r la distance de l'électron à O , $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$ et σ l'amplitude du moment cinétique de l'électron.
- – 16. Établir l'équation de conservation $\frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{cte}$ et exprimer l'énergie potentielle effective $U_{\text{eff}}(r)$ en fonction de e , ε_0 , m_e et σ .
- – 17. Quelle est la signification physique d'un minimum de l'énergie potentielle effective ? En déduire le rayon r et l'énergie E d'une trajectoire circulaire en fonction de σ , m_e , ε_0 et e .

La raie rouge de l'hydrogène correspond à un rayonnement visible ($\lambda_0 = 656 \text{ nm}$) émis lors de la désexcitation de l'électron depuis la trajectoire circulaire de niveau $\sigma = 3\hbar$ vers le niveau $\sigma = 2\hbar$ où $\hbar = h/2\pi$, h étant la constante de Planck.

- – 18. Expliciter l'écart ΔE d'énergie entre ces deux niveaux puis λ_0 en fonction de h , c (célérité de la lumière dans le vide), e , m_e et ε_0 .

II.A.2 Une correction relativiste

L'expression établie ci-dessus constitue une première approximation qui doit être corrigée si on veut rendre compte des valeurs exactes des longueurs d'onde d'émission par une lampe à vapeur d'hydrogène atomique. Une de ces corrections est de nature relativiste. Nous allons seulement en chercher un ordre de grandeur.

- – 19. On appelle *constante de structure fine* la grandeur $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{2\epsilon_0\hbar c}$. Préciser sa dimension puis estimer son ordre de grandeur.

Dans le cadre relativiste, l'énergie mécanique totale d'une particule de masse m et de vitesse v a pour expression :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- – 20. Exprimer le développement limité de E à l'ordre 4 en v/c sous la forme $E = E_0 + \kappa v^2 + \mu v^4 + o(v^4/c^4)$ en précisant les expressions de κ et μ .
Proposer une interprétation simple des deux premiers termes E_0 et κv^2 .
- – 21. La correction relativiste à l'énergie ΔE d'une transition entre niveaux d'énergie s'écrit sous la forme $\frac{\Delta E_{\text{relat}} - \Delta E}{\Delta E} \sim \alpha^p$. Dédurre de ce qui précède l'entier p puis conclure, numériquement.

II.B Spectrométrie interférentielle

II.B.1 La méthode de Michelson

L'appareil utilisé est constitué (voir la figure 5) d'une lame séparatrice S semi-réfléchissante et d'une lame dite compensatrice C , parallèle à la précédente, de même épaisseur et de même indice optique. Ces deux lames sont toutes deux parallèles au plan (Ouz) où l'axe (Ou) est la première bissectrice des axes (Oy) et (Ox) qui sont orthogonaux aux miroirs plans M_f (fixe) et M_m (mobile le long de (Ox) à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$).

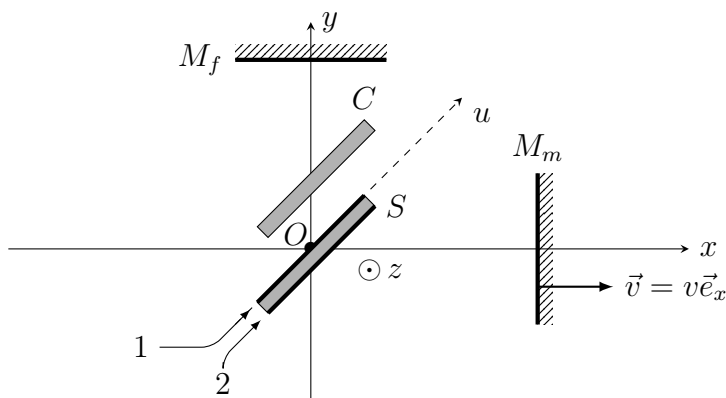


FIGURE 5 – L'interféromètre de Michelson

- – 22. Expliquez, au moyen d'un schéma, le rôle de la lame (C) . Précisez en particulier, dans le cas de la figure 5, si la face réfléchissante de la lame (S) est la face supérieure (1) ou la face inférieure (2).
- – 23. L'appareil est éclairé par une source de lumière étendue. Quelle est la nature des franges ? Où peut-on les observer ?

- – 24. On utilise une source monochromatique de longueur d'onde λ_0 . On choisit l'instant $t = 0$ au moment du contact optique et on note I_0 l'intensité lumineuse totale en sortie de l'appareil sur l'axe (Oy) lorsqu'un des deux miroirs est obstrué. Exprimer, en fonction de I_0 , λ_0 , v et t , l'intensité $I(t)$ observée sur cet axe lorsque les deux miroirs sont éclairés.

En 1892, MICHELSON installe, au bureau international des poids et mesures (BIPM) de Sèvres, un interféromètre identique à celui décrit ci-dessus pour rechercher parmi les lampes spectrales connues (hydrogène, cadmium, etc.), celle qui présenterait la meilleure monochromaticité et établir ainsi un étalon de longueur optique.

II.B.2 La mesure de la structure fine de la raie rouge

On éclaire maintenant l'appareil décrit ci-dessus au moyen d'une source bichromatique émettant deux raies de longueurs d'onde voisines, de longueurs d'onde $\lambda_1 = \lambda_0$ et $\lambda_2 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ et d'intensités I_1 et $I_2 < I_1$.

- – 25. En admettant que $|\Delta\lambda| \ll \lambda_0$, montrer que l'expression du contraste des franges s'écrit de la manière suivante :

$$C(t) = \sqrt{1 - \frac{4I_1I_2}{(I_1 + I_2)^2} \sin^2 \left(2\pi vt \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right)},$$

puis calculer les contrastes maximal et minimal en fonction de I_2 et I_1 .

- – 26. Réalisant la mesure du spectre de cette raie, MICHELSON a observé, en déplaçant le miroir mobile d'une longueur $\Delta x = 8,5 \text{ mm}$ depuis le contact optique, une diminution progressive du contraste qui atteint alors sa valeur minimale $C_{\min} \simeq 15\%$. En déduire I_2/I_1 puis la valeur de $\Delta\lambda/\lambda_0$ puis commenter l'ordre de grandeur obtenu au regard des développements mécaniques qui précèdent.

La structure fine ainsi observée n'a pu être expliquée qu'avec le développement ultérieur de la mécanique quantique pour le calcul du spectre détaillé des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Données numériques

Année-lumière	$1 \text{ AL} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Distance Terre-Soleil (unité astronomique)	$d = 1 \text{ UA} = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du Soleil	$M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365,25 \text{ j} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

$$\sqrt{2} \simeq 1,41, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71$$

Formulaire

Pour tous $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 = a \cos \left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \varphi \right] ,$$

avec respectivement :

$$a = (a_1 + a_2) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} \quad \text{et} \quad m = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2} ,$$

tandis que $\varphi \in \mathbb{R}$ est donné par :

$$\tan \varphi = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \tan \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} .$$

FIN DE L'ÉPREUVE