

# **Correction de la compilation de problèmes de concours**

*Révisions des écrits 2024-2025*

CENTRALE PC2 2016  
MINES PC1 2019  
CENTRALE PC2 2021  
MINES PSI2 2021  
MINES PC1 2022

PC\* Pasteur

# Concours Centrale Supélec 2016, physique 2 PC

Corrigé proposé par Séverine Mensch ([severine@mesnch.fr](mailto:severine@mesnch.fr)) et Philippe Borel ([phiborel@numericable.fr](mailto:phiborel@numericable.fr))

## Vers une nouvelle définition du kelvin

### I L'agitation thermique

#### IA) L'agitation thermique dans l'atmosphère

##### IA1)

a) A partir de l'équation de la statique des fluides projetée sur l'axe vertical ascendant

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

dans l'hypothèse de l'atmosphère gaz parfait

$$PV = nRT \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{m_{tot}}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{PM}{RT}$$

Si l'atmosphère est isotherme,  $T = \text{cste}$  d'où par intégration, avec  $P(z=0) = P_o$

$$P(z) = P_o \exp(-Mgz/RT)$$

b) En considérant une masse moyenne  $m$  par molécule constituant l'atmosphère,

$$M = m N_A \quad \text{et} \quad R = k_B N_A \quad \text{d'où} \quad P(z) = P_o \exp(-mgz/k_B T)$$

d'où  $n_v(z) = \frac{n}{V} N_A = \frac{P}{k_B T} = N_o \exp\left(\frac{-mgz}{k_B T}\right)$  : on retrouve une statistique de Boltzmann,

$$mgz = E_{pp} \quad \text{énergie potentielle de pesanteur,} \quad n_v(z) = N_o \exp\left(\frac{-E_{pp}}{k_B T}\right)$$

IA2) En écrivant  $n_v(z)$  sous la forme  $n_v(z) = N_o \exp\left(\frac{-z}{H}\right)$  on identifie la hauteur

caractéristique de l'atmosphère :  $H = \frac{k_B T}{mg}$

La vitesse limite atteinte en chute libre s'obtient par conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{minit} = mgH = E_{mfin} = \frac{1}{2} m v_l^2 \quad \text{d'où} \quad v_l = \sqrt{2gH} \quad \text{où encore en exprimant H :} \quad v_l = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

on retrouve une expression proche de la vitesse quadratique moyenne atteinte pour un

gaz à la température  $T$  :  $v_q = \sqrt{\frac{2}{3}} v_q$  : ces deux vitesses qui caractérisent l'atmosphère isotherme sont bien du même ordre de grandeur.

**Remarque: Pour l'atmosphère, plutôt diatomique (O<sub>2</sub> 19%, N<sub>2</sub> 80%, autres 1%), les auteurs auraient dû proposer  $v_q^2 = \frac{5k_B T}{m}$**

IA3) Quelques pistes pour cette question :

Le centre de gravité de la balle est immobilisé, mais il reste une agitation thermique, désordonnée, de toutes les particules qui la composent ?

En terme d'énergie localement, cette énergie cinétique des molécules se transforme en énergie potentielle de déformation ?

Autre piste le mouvement des particules est aléatoires, vectoriellement la vitesse du centre de gravité est alors nulle ?

### IB L'agitation thermique dans un circuit électrique

**IB1)** La vitesse d'agitation thermique des électrons dans le métal est donnée en ordre de grandeur par la vitesse quadratique  $v_q = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$  d'où pour  $T \sim 300\text{K}$   $v_q \sim 10^5 \text{ms}^{-1} \ll c$

: ces électrons ne sont pas relativistes !

**IB2)** Les deux relations s'obtiennent à partir des lois de Kirchhoff :

- loi des mailles : 
$$u_e = u_s + L \frac{di_e}{dt}$$

- loi des nœuds : 
$$i_e = i_s + C \frac{du_s}{dt}$$

**IB3)** a) les mêmes relations s'appliquent sur le schéma de la ligne bifilaire proposée :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + \lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad \text{qui donne au premier ordre en } dx : \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

puis  $i(x, t) = i(x + dx, t) + \gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t}$  qui donne au premier ordre en  $dx$  :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

b) l'équation de d'Alembert vérifiée par  $i$  et  $u$  s'obtient alors en découplant les équations et en utilisant le théorème de Schwartz :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right) = -\lambda \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i}{\partial x} \right) = \gamma \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3) \quad \text{avec}$$

$$c_e = \frac{1}{\sqrt{\gamma \lambda}} \quad (4)$$

c) En remplaçant dans l'équation de d'Alembert on obtient l'équation de dispersion pour les ondes planes harmoniques se propageant selon les  $x$  croissants :  $\omega = k c_e$ . La résistance caractéristique s'obtient en remplaçant dans une des équations de couplage,

par exemple dans (1) :  $-ik U = -\lambda (-i\omega) I$  d'où  $R_c = \frac{U}{I} = \lambda \frac{\omega}{k} = \lambda c_e = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$  (5)

Ces relations peuvent être inversées : (5) donne  $\lambda = \frac{R_c}{c_e}$  puis (4)  $\gamma = \frac{1}{\lambda c_e^2} = \frac{1}{R_c c_e}$

**IB4)** a) L'équation vérifiée par  $U(x)$  s'obtient en remplaçant  $u(x, t)$  dans (3) :

$$U''(x) \cos(\omega t) = \frac{1}{c_e^2} (-\omega^2) U(x) \cos(\omega t) \quad \text{d'où} \quad U''(x) + \frac{\omega^2}{c_e^2} U(x) = 0$$

équation d'un oscillateur harmonique. Les conditions aux limites  $U(0) = U(D) = 0$  fixent la forme de la solution : on pose  $K = \frac{\omega}{c_e}$

$$U(0)=0 \text{ impose } U(x)=U_o \sin(Kx)$$

$$U(D)=0 \text{ impose } KD=n\pi \text{ avec } n \text{ entier, d'où } K_n=\frac{n\pi}{D} \text{ et } U(x)=U_{on} \sin(K_n x) :$$

mode propre n, associé à la pulsation  $\omega_n = c_e K_n = \frac{n\pi c_e}{D}$

b) L'intervalle entre deux fréquences propres consécutives est  $\delta f = \frac{\delta \omega}{2\pi} = \frac{c_e}{2D}$  donc si

$$\Delta f \text{ est grand } N = \frac{\Delta f}{\delta f} = \frac{2D \Delta f}{c_e} \text{ (à une unité près, } \ll N)$$

c)  $i_n(x, t)$  est donné par  $u_n(x, t)$  à partir de (1) ou (2) :

$$\frac{\partial i_n(x, t)}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial (U_{on} \sin(K_n x) \cos(\omega_n t))}{\partial t} = \gamma \omega_n U_{on} \sin(K_n x) \sin(\omega_n t)$$

qui s'intègre, avec l'hypothèse  $i_n(x, t)=0$  lorsque  $U_{on}=0$ , sous la forme :

$$i_n(x, t) = \frac{-\gamma \omega_n}{K_n} U_{on} \cos(K_n x) \sin(\omega_n t)$$

avec  $\gamma \frac{\omega_n}{K_n} = \frac{1}{R_c c_e} c_e = \frac{1}{R_c}$  donc  $i_n(x, t) = \frac{-U_{on}}{R_c} \cos(K_n x) \sin(\omega_n t)$

IB5) Sur une portion dx l'énergie emmagasinée dans le circuit pour le mode n est :

$$de_n = \frac{1}{2} \lambda dx i_n(x, t)^2 + \frac{1}{2} \gamma dx u_n(x, t)^2 = \frac{1}{2} \lambda dx \frac{U_{on}^2}{R_c^2} \cos^2(K_n x) \sin^2(\omega_n t) + \frac{1}{2} \gamma dx U_{on}^2 \sin^2(K_n x) \cos^2(\omega_n t)$$

d'où  $\langle de_n \rangle = \left( \frac{1}{4} \gamma U_{on}^2 \cos^2(K_n x) + \frac{1}{4} \gamma U_{on}^2 \sin^2(K_n x) \right) dx = \frac{1}{4} \gamma U_{on}^2 dx$  : la densité linéique moyenne est uniforme

IB6)a) En intégrant sur la ligne de longueur D on en déduit  $\langle E_n \rangle = \frac{1}{4} \gamma D u_{on}^2 = \frac{D}{4 R_c c_e} u_{on}^2$

on impose  $\langle E_n \rangle = k_B T$  d'où  $\frac{D}{4 R_c c_e} u_{on}^2 = k_B T$  et

$$u_n(x, t) = \sqrt{\frac{4 R_c c_e k_B T}{D}} \sin(K_n x) \cos(\omega_n t) = \sqrt{2} U_{eff, n}(x) \cos(\omega_n t) \text{ avec}$$

$$u_{eff, n}(x) = \sqrt{\frac{2 R_c c_e k_B T}{D}} \sin(K_n x) \text{ et finalement } u_{eff, n}^2(x) = \frac{2 R_c c_e k_B T}{D} \sin^2(K_n x)$$

$$U_{eff, n}^2 = \frac{2 R_c c_e k_B T}{D} \text{ indépendant de } n$$

b) Il y a N modes possibles dans l'intervalle de fréquence  $\Delta f$  donc

$$U_{eff}^2 = N U_{eff, n}^2 = \frac{2D \Delta f}{c_e} \frac{2 R_c c_e k_B T}{D} \text{ d'où, avec } R=R_c \text{ le résultat attendu :}$$

$$U_{eff} = \sqrt{4 k_B T R \Delta f}$$

IB7)a) Je ne comprends pas bien comment la valeur de R peut être une variable puisque  $R=R_c$

On poursuit à partir des résultats précédents...

On doit vérifier  $U_{eff} \propto \sqrt{R}$  donc en log-log une relation linéaire de pente 1/2, ce qui correspond bien aux deux courbes proposées, les deux décades de variation sur  $\Delta f$  se

traduisant par une décade de décalage entre les deux droites.

La détermination de  $k_B$  repose avoir sur l'exploitation d'un point particulier. Par exemple :

pour  $\Delta f = 1 \text{ Hz}$ ,  $R = 10^2 \Omega$ ,  $U_{\text{eff}} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ V}$  d'où  $k_B = \left(6 \frac{10^{-7}}{500}\right)^2 \frac{1}{4 \cdot 300 \cdot 10^2} = 1,2 \cdot 10^{-23} \text{ USI}$  ce qui donne bien l'ordre de grandeur attendu !

b) Les valeurs des tensions efficaces sont extrêmement faibles, il faut éliminer le bruit électromagnétique, d'où l'enceinte métallique qui isole des champs extérieurs.

La résistance peut chauffer, il faut thermostatier l'enceinte pour assurer une température constante.

## II Mesure acoustique

### IIA Principe

IIA1) La distance moyenne  $l$  entre molécules dépend de la densité moléculaire  $n^*$  :

$$n^* \approx 1/l^3 \text{ avec d'après la loi des gaz parfaits } n^* = \frac{P}{k_B T} . \text{ On négligera les interactions}$$

si  $l > l_{\text{min}} = 5 \text{ nm}$  donc si  $P < P_{\text{max}} = \frac{k_B T}{l^3}$  numériquement  $P < 0,4 \text{ bar}$  : a priori ce n'est pas le cadre de l'étude proposé, puis  $P$  varie entre 0,5 et 7 bar...

IIA2) a) question de cours : en posant  $\mu = \mu_o + \rho$  avec  $\rho \ll \mu_o$ ,  $P = P_o + \pi$  avec  $\pi \ll P$  et enfin en supposant  $v \ll c_{\text{son}}$

$$\text{Équation d'Euler : } \mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} P \text{ linéarisée : } \mu_o \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \pi}{\partial x}$$

$$\text{Équation de conservation de la masse : } \frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \text{ linéarisée } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mu_o \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\text{Caractère isentropique : } \chi_s = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s \text{ linéarisée } \chi_s = \frac{1}{\mu_o} \frac{\rho}{\pi} \text{ donc } \rho = \mu_o \chi_s \pi$$

on obtient en découplant ces équations l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = \mu_o \chi_s \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} = \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} \text{ avec } c_a = \sqrt{\frac{1}{\chi_s \mu_o}}$$

b) Pour un gaz parfait  $\mu = \frac{PM}{RT}$  d'où  $\chi_T = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T = \frac{M}{\mu RT} = \frac{1}{P}$  d'où  $\chi_s = \frac{1}{\gamma P}$  et

$$c_a^2 = \frac{\gamma P}{\mu_o} = \frac{\gamma RT}{M} = \frac{\gamma N_A k_B T}{M}$$

c) Avec la relation donnée, en notant  $c_{aGP} = \sqrt{\frac{\gamma N_A k_B T}{M}}$  l'expression de la célérité du son

dans le modèle du gaz parfait, on a  $c_a = c_{aGP} \left(1 + \frac{\beta P}{2}\right)$  au premier ordre en  $\beta P \ll 1$

L'erreur relative sur la célérité lorsqu'on considère le gaz comme parfait est donc

$$\frac{\Delta c_a}{c_{aGP}} = \frac{\beta P}{2} .$$

Pour que l'erreur reste inférieure à  $10^{-6}$  il faut  $P < 2 \frac{10^{-6}}{1,3 \cdot 10^{-11}} = 1,5 \text{ bar}$

Cette nouvelle condition ne couvre pas totalement le cadre de l'étude de 0.4 à 7 bars.

**IIA3)** On repart de l'expression valable pour un gaz parfait :  $k_B = \frac{c_a^2 M}{\gamma N_A T}$ , on tient compte des incertitudes sur les différents paramètres (sauf  $\gamma$ ), la relation rappelée à la fin du texte donne

$$\frac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{4 \left(\frac{\delta c_a}{c_a}\right)^2 + \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\delta N_A}{N_A}\right)^2 + \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2}$$

d'où numériquement à la limite acceptable :

$$2 \cdot 10^{-6} = \sqrt{4 \left(\frac{\delta c_a}{c_a}\right)^2 + (1,5 \cdot 10^{-6})^2 + (1,2 \cdot 10^{-8})^2 + (3 \cdot 10^{-7})^2}$$

$\frac{\delta c_a}{c_a} = \frac{1}{2} \sqrt{(2 \cdot 10^{-6})^2 - (1,5 \cdot 10^{-6})^2 - (1,2 \cdot 10^{-8})^2 - (3 \cdot 10^{-7})^2} = 6,4 \cdot 10^{-7}$  on est en dessous de l'erreur prévue au II12) : il faudra corriger l'expression de la célérité pour tenir compte du caractère non parfait du gaz.

## II B L'onde acoustique sphérique.

### II B1) Équation du potentiel

a) La symétrie sphérique impose  $\vec{v}(r, t) = v(r, t) \vec{e}_r$ , donc  $r \vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$  (formulaire en fin d'énoncé) et il existe  $\phi(r, t)$  tel que  $\vec{v}(r, t) = \vec{\text{grad}} \phi(r, t)$ .

On est toujours dans l'approximation acoustique, on doit donc vérifier l'équation d'Euler linéarisée  $\mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} P$  donne ici  $\mu_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial \pi}{\partial r} \vec{e}_r$  avec  $\vec{v}(r, t) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r$ , donc, d'après le théorème de Schwartz  $\mu_o \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{-\partial \pi}{\partial r}$  qui s'intègre par rapport à r sous la forme  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{-\pi}{\mu_o} + f(t)$  L'hypothèse  $\phi(r, t) = 0$  si  $\pi(r, t) = 0 \forall t$  donne  $f(t) = 0$  et

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t}(r, t) = \frac{-\pi(r, t)}{\mu_o}}$$

b) on remplace  $\pi(r, t) = -\mu_o \frac{\partial \phi}{\partial t}(r, t)$  dans l'équation de d'Alembert vérifiée par  $\pi(r, t)$

on obtient la même équation pour  $\phi$  :  $\boxed{\Delta \phi(r, t) = \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}} \quad (5)$

**II B2)** Le confinement des ondes dans le résonateur va être responsable d'une quantification des pulsations admissibles, la fonction  $\phi(r, t)$  devant vérifier des conditions aux limites.

Ici on suppose les parois indéformables, en  $r = a$  le champ de vitesse doit s'annuler (pas de flux sortant) :  $\frac{\partial \phi}{\partial r}(r = a, t) = 0$  d'où  $\boxed{f'(r = a, t) = 0}$

**II B3)**  $\vec{j}_e(r, t) = \pi(r, t) \vec{v}(r, t) = -\mu_o \frac{\partial \phi}{\partial t}(r, t) \frac{\partial \phi}{\partial r}(r, t) \vec{e}_r = \mu_o \omega f(r) f'(r) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{e}_r$

donc  $\langle \vec{j}_e \rangle = \vec{0}$  : en moyenne dans le temps, les modes propres ne permettent pas un transport d'énergie.

**II B4)** On remplace  $\phi(r, t) = f(r) \cos(\omega t)$  dans l'équation (5) en utilisant l'expression du laplacien scalaire rappelé en annexe :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf(r))}{\partial r^2} \cos(\omega t) = \frac{1}{c_a^2} (-\omega^2) f(r) \cos(\omega t) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{\partial^2 (rf(r))}{\partial r^2} = \frac{-\omega^2}{c_a^2} rf(r) = -k^2 rf(r)} \quad \text{qui}$$

s'intègre sous la forme  $rf(r) = a \sin(kr) + b \cos(kr)$   $f(r) = \frac{a}{r} \sin(kr) + \frac{b}{r} \cos(kr)$  .

L'absence de divergence en  $r=0$  impose  $b=0$  d'où  $\boxed{\phi(r) = \frac{a}{r} \sin(kr) \cos(\omega t)}$

**IIB5)**  $\phi$  doit vérifier la condition au limite donnée en IIB2) donc  $(\frac{-1}{r^2} \sin(kr) + \frac{k}{r} \cos(kr))(r=a) = 0$  d'où  $\tan(ka) = ka$  . On doit donc avoir  $k_n a = x_n$  où

$x_n$  est la racine n-ième de la fonction  $g(x) = \tan(x) - x$  , donc  $k_n = \frac{\omega_n}{c_a} = \frac{2\pi \nu_n}{c_a} = \frac{x_n}{a}$  soit

$\boxed{\nu_n = \frac{c_a}{2\pi a} x_n}$  qui explicite la relation de quantification attendue pour les fréquences propres.

**IIB6)**  $c_a = \frac{2\pi a \nu_n}{x_n}$  d'où numériquement, pour le mode  $n=1$ ,  $c_a = 3,078246 \cdot 10^2 \text{ ms}^{-1}$  avec une

incertitude sur  $c_a$  donnée par  $\frac{\delta c_a}{c_a} = \sqrt{\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta \nu_1}{\nu_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta x_1}{x_1}\right)^2} = \sqrt{(1,8 \cdot 10^{-6})^2 + (510 \cdot 10^{-10})^2 + (210 \cdot 10^{-11})^2} = 1,8 \cdot 10^{-6}$  c'est l'incertitude sur  $a$  (la plus forte) qui s'impose, d'où la troncature du résultat sur  $c_a$  . La précision sur  $c_a$  est insuffisante pour atteindre la précision sur  $k_B$  attendue (cf IIA3)

**IIB7)** on déduit  $k_B$  de  $c_a$  à partir de  $k_B = \frac{c_a^2 M}{\gamma N_A T}$

d'où  $k_B = 1,380649 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  .

L'incertitude relative est donnée par  $\frac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{4\left(\frac{\delta c_a}{c_a}\right)^2 + \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\delta N_A}{N_A}\right)^2 + \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2}$

$$\frac{\delta k_B}{k_B} = \sqrt{4(1,8 \cdot 10^{-6})^2 + (1,5 \cdot 10^{-6})^2 + (1,2 \cdot 10^{-8})^2 + (3 \cdot 10^{-7})^2} = 3,9 \cdot 10^{-6} \quad \text{soit} \quad \delta k_B = 5,4 \cdot 10^{-29} \text{ J K}^{-1}$$

On dispose de 7 chiffres significatifs sur  $k_B$  .

### III Mesure par spectroscopie laser

#### IIIA Conformations de la molécule d'ammoniac

IIIA1) Dans cette modélisation seule la distance de l'atome d'azote au plan des atomes d'hydrogène est pertinente :  $V(x)$  est paire.

Il y a deux positions d'équilibre stable en  $|x|=b$  correspondant à la conformation la plus stable de la molécule (compromis entre attraction électrostatique et répulsion des noyaux des différents atomes...), le passage d'une conformation à l'autre se fait par passage par la position où l'atome d'azote est dans le plan des atomes d'hydrogène, situation d'équilibre instable d'où la barrière énergétique qui apparaît. A grande distance l'interaction est attractive.

IIIA2) Il faut comparer la barrière énergétique  $V_o$  à l'énergie thermique  $E_{th} = k_B T$  . A la

température du point triple  $E_{th} = 24 \text{ meV} \approx V_o/10$  : l'inversion est peu probable.

Elle le devient pour  $T \approx 10 T_{PT}$  d'om  $T \approx 3000 \text{ K}$

### III B Inversion quantique de la molécule d'ammoniac

A noter que la notion de masse réduite est inconnue des étudiants...

III B1) En remplaçant  $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-iEt/\hbar)$  dans l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t)$$

on obtient en simplifiant par  $\exp(-iEt/\hbar)$  :  $E\varphi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + V(x)\varphi(x)$  on encore

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 \quad (6)$$

III B2) a) Les fonctions d'onde sont localisées sur un domaine lorsqu'elles sont nulles en dehors de ce domaine

b) Pour  $|x| < x_o$  et  $|x| > x_o + l$  le potentiel est infini, les seules solutions de l'équation (6) sont alors des fonctions identiquement nulle dans ces domaines :  $\varphi(x) = 0$

Le potentiel présentant des discontinuités infinies, on doit avoir continuité des fonctions  $\varphi_A(x)$  et  $\varphi_B(x)$ , donc une annulation sur les bords des domaines :

$$\varphi_A(x = -x_o - l) = \varphi_A(x = -x_o) = 0 \quad \varphi_B(x = x_o + l) = \varphi_B(x = x_o) = 0$$

c) La condition de normalisation des fonctions  $\psi(x, t)$  impose une condition de

normalisation de  $\varphi_{A,B}$  :  $\int_{-x_o-l}^{-x_o} \varphi_A(x)^2 dx = \int_{x_o}^{x_o+l} \varphi_B(x)^2 dx = 1$

III B3) a) dans le puits A l'équation (6) s'écrit  $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$  les solutions correspondant à  $E < 0$  (combinaison d'exponentielles réelles) ne pourront pas valider les deux conditions aux limites imposées, il faut donc que  $E > 0$  et

$\varphi_A(x) = A \sin(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}(x + x_o) + \phi)$  où  $A$  et  $\phi$  sont donnés par les conditions aux limites et la condition de normalisation  $\varphi_A(x = -x_o) = 0$  donne  $\phi = 0$   $\varphi_A(x = -x_o - l) = 0$

impose  $\sin(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}l) = 0$  d'où une quantification de  $E$  :  $\sqrt{\frac{2mE_n^A}{\hbar^2}}l = n\pi$   $E_n^A = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m}$

Il reste à déterminer  $A$  :

$$\int_{-x_o-l}^{-x_o} \varphi_A(x)^2 dx = A^2 \int_{-x_o-l}^{-x_o} \sin^2(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}(x + x_o)) dx = A^2 \int_{-l}^0 \sin^2(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x) dx = A^2 \frac{l}{2} = 1 \quad \text{d'où} \quad A = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

et finalement  $\varphi_{A,n}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\sqrt{\frac{2mE_n^A}{\hbar^2}}(x + x_o))$

b) les mêmes calculs dans le puits B conduisent à

$$\varphi_{B,n}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\sqrt{\frac{2mE_n^B}{\hbar^2}}(x - x_o))$$

avec  $E_n^B = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m}$

c) Les puits étant infinis la fonction  $\varphi_A$  (resp  $\varphi_B$ ) reste localisée dans le puits A

(resp  $B$ ) : la probabilité qu'une molécule d'ammoniac passe d'un puits à l'autre est nulle. Le modèle du double puits infini ne peut rendre compte des oscillations de la molécule...

**III B4)** Dans le domaine  $x_o \leq x \leq x_o + l$  le potentiel est nul, on résout la même équation que dans la question III B3) avec comme unique condition au limite  $\varphi_B(x = x_o + l) = 0$  imposée par le bord infini du potentiel en  $x = x_o + l$ . La forme proposée convient :

$$\varphi_B(x) = B \sin(k(x - x_o - l)) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

de même on aura pour  $-x_o - l \leq x \leq -x_o$   $\varphi_A(x) = A \sin(k(x + x_o + l))$ .

**III B5) a)** Dans le domaine  $-x_o \leq x \leq x_o$  l'équation stationnaire de Schrödinger devient

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2m(E - V_o)}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 \quad \text{avec ici} \quad E - V_o < 0, \quad \text{les solutions peuvent alors s'écrire}$$

$$\varphi(x) = C_1 \cosh(Kx) + C_2 \sinh(Kx) \quad \text{avec} \quad K = \frac{\sqrt{2m(V_o - E)}}{\hbar}$$

b) La discontinuité du potentiel étant bornée, il doit y avoir continuité de  $\varphi(x)$  et

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) \quad \text{d'où} \quad \varphi_c(x_o^-) = \varphi_B(x_o^+) \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi_c}{dx}(x_o^-) = \frac{d\varphi_B}{dx}(x_o^+)$$

**III B6) a)** Pour obtenir la dépendance temporelle de  $\psi(x, t)$  il faut multiplier par  $\exp(-iEt/\hbar)$  les fonctions d'onde spatiales.

Comme  $\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1^{\text{sym}}(x) + \varphi_1^{\text{anti}}(x))$  on aura

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1^{\text{sym}}(x) \exp(-iE_1^{\text{sym}} t/\hbar) + \varphi_1^{\text{anti}}(x) \exp(-iE_1^{\text{anti}} t/\hbar))$$

b) Seul le module au carré des fonctions d'onde a un sens physique, donc les fonctions  $\psi_1$  et  $\psi_2 = \psi_1 \exp(i\alpha)$ , de même module, représentent le même état physique.

c) On peut réécrire  $\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-iE_1^{\text{sym}} t/\hbar) (\varphi_1^{\text{sym}}(x) + \varphi_1^{\text{anti}}(x) \exp(-i(E_1^{\text{anti}} - E_1^{\text{sym}}) t/\hbar))$

sous une forme équivalente

$$\psi(x, t)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1^{\text{sym}}(x) + \varphi_1^{\text{anti}}(x) \exp(-i\delta E t/\hbar)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1^{\text{sym}}(x) + \varphi_1^{\text{anti}}(x) \exp(-i2\pi \frac{t}{\tau})) \quad \text{qui fait}$$

apparaître une dépendance périodique (harmonique...) de période  $\tau = 2\pi \frac{\hbar}{\delta E}$  d'où

$$f = \frac{\delta E}{2\pi\hbar} \quad \text{soit numériquement} \quad f = 2,38 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \quad \text{qui correspond au domaine des micro-}$$

ondes  $(\lambda = c/f = 1,25 \text{ cm})$

d) A l'instant  $t = \tau/2$  la molécule est passée dans le puits de droite, c'est l'état représenté à droite de la figure 13  $\psi(x, t = \tau/2) = \varphi_D(x)$  : la molécule dont l'énergie est inférieure à la barrière de potentiel est passé d'un puits à l'autre par effet tunnel, ce qui lui serait interdit en mécanique classique.

e) D'après l'expression de  $\delta E$  rappelé en IIB6) on voit que  $x_o$  joue sur  $f$  de manière exponentielle, de même pour  $\sqrt{V_o}$  (rq : le facteur  $\frac{1}{\sqrt{V_o}}$  ne change pas grand chose et joue de toute façon dans le même sens...)

Si on ne prend pas en compte ce facteur (qui complique les calculs...) multiplier le potentiel par 6 et la largeur par 3 multiplier le facteur dans l'exponentielle par 7,4 donc

$f' = f^{-7.4} \approx 10^{-70} \text{ Hz}$  : on ne verra jamais l'inversion de la molécule d'arsine, la probabilité est beaucoup trop faible et la période largement supérieure à l'âge de l'univers !!

### III C) Spectre d'absorption de la molécule d'ammoniac

III C1) L'équation de propagation résulte des équations de Maxwell :

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad (\text{milieu localement neutre}), \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_o (\gamma \vec{E} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad \text{dans un milieu de conductivité } \gamma \quad \text{où } \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

on en déduit  $\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \frac{-\partial}{\partial t} (\mu_o (\gamma \vec{E} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})) = -\mu_o (\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}) = -\vec{\Delta} \vec{E}$  d'où l'équation

de propagation :  $\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_o (\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2})$  dont on déduit pour une onde plane

$$\vec{E}(x, t) = E_o \vec{e}_y \exp i(\omega t - \underline{k} x) \quad \text{l'équation de dispersion : } \underline{k}^2 = -\mu_o (\gamma i \omega - \epsilon_o \omega^2)$$

III C2) a) d'après la relation ci dessus, avec  $\underline{k} = k_r - i k_i$  en identifiant la partie imaginaire de l'équation  $k_i k_r = \mu_o \gamma \omega > 0$  :  $k_i$  et  $k_r$  sont de même signe. On veut  $k_r > 0$  pour que l'onde se propage dans le sens des x croissants, donc  $k_i > 0$  : l'onde est donc atténuée à mesure qu'elle se propage (terme en  $\exp(-k_i x)$  dans E : absorption due à la conductivité du milieu)

b)  $I = \int \int \langle \vec{\pi} \rangle d\vec{S}$  avec  $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_o}$  et  $\langle \vec{\pi} \rangle$  = moyenne temporelle.

On calcule  $\vec{B}$  à partir de l'équation de Maxwell Faraday  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  avec

$$\vec{E}(x, t) = E_o \vec{e}_y \exp i(\omega t - \underline{k} x) \quad \text{et} \quad \vec{B}(x, t) = \underline{B}_o \exp i(\omega t - \underline{k} x) : \quad -i \underline{k} E_o \vec{e}_z = -i \omega \underline{B}_o$$

$$\vec{B}(x, t) = \frac{k}{\omega} E_o \exp i(\omega t - \underline{k} x) \vec{e}_z$$

On repasse en notation réelle pour calculer  $\vec{\pi}$

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\omega} E_o^2 \exp(-2k_i x) (k_r \cos^2(\omega t - k_r x) + k_i \cos(\omega t - k_r x) \sin(\omega t - k_r x)) \vec{e}_x \quad \text{donc}$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{k_r}{2\omega} E_o^2 \exp(-2k_i x) \vec{u}_x = \vec{\pi}_o \exp(-2k_i x) \quad \text{et} \quad I(x) = I_o \exp(-2k_i x) \quad \text{avec} \quad I_o = \int \int \vec{\pi}_o d\vec{S}$$

d'où  $I(L) = I_o \exp(-\alpha L)$  avec  $\alpha = 2k_i L$

III C3) Remarque : il ne s'agit plus de la transition « parapluie » étudiée dans la partie III B mais les notations n'ont pas changées, en particulier pour  $v_o$ ...

a) La longueur d'onde associée à cette transition est donnée par  $\lambda_o = \frac{c}{\nu_o} = 10,36 \mu m$  transition dans l'infra rouge.

L'énergie du photon associé est  $E_\gamma = h \nu_o = 0,16 eV$

b) L'énergie du niveau excité est définie à  $\delta E$  près, donc celle du photon permettant la transition du fondamental vers le niveau excité sera définie de la même façon, d'où une largeur spectrale  $\delta \nu = \frac{\delta E}{h} = 4,8 \text{ MHz}$  pour la raie d'absorption.

### III C4) Effet Doppler Fizeau

a)  $\phi = 2\pi \nu(t - x/c)$  pour une onde se propageant dans le sens des x croissants (à une constante additive près). Note : la fréquence de l'onde est  $\nu$  plutôt que de  $\nu_o$  ?

b) Dans le cas de la mécanique newtonienne  $x' = \overline{O'M} = \overline{O'O} + \overline{OM} = -v_x t + x$

En considérant que la phase a la même expression et la même valeur dans les deux référentiels on doit avoir

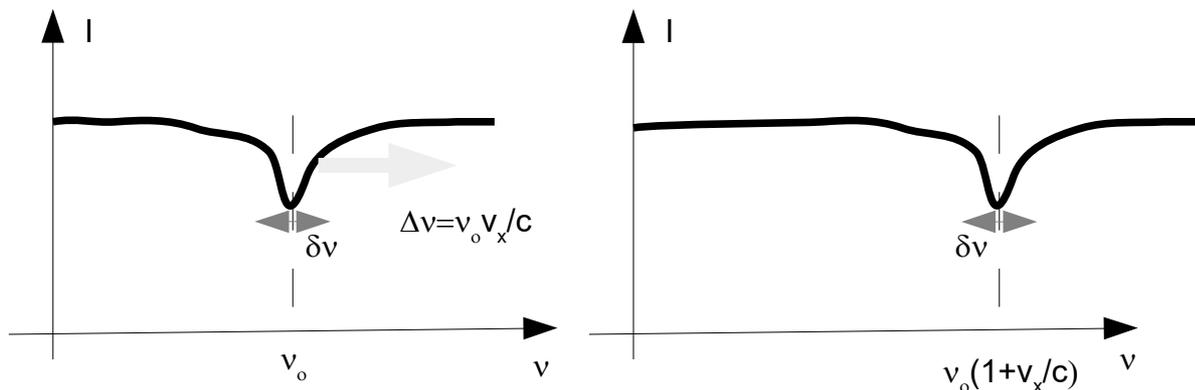
$\phi' = 2\pi v'(t - x'/c) = 2\pi v'(t - (x - v_x t)/c) = 2\pi v(t - x/c)$  en identifiant les termes en t on obtient  $v'(1 + v_x/c) = v$  avec  $v_x \ll c$  un développement limité d'ordre 1 donne

$$v' \approx v(1 - v_x/c)$$

**PB** : les termes en x ne peuvent pas être identifiés en même temps que ceux en t...

on en déduit  $v_x \approx c(1 - \frac{v'}{v})$   $v_x \approx c \frac{v - v'}{v'}$  au premier ordre n  $v_x/c$

c) Le spectre va être décalé de  $v v_x/c \approx v_o v_x/c$  :



**IIIC5)** Pour qu'une molécule absorbe le rayonnement à  $\nu$  il faut que sa vitesse lui permette de le voir à  $\nu_o$  donc que  $v_x \approx c \frac{\nu - \nu_o}{\nu_o}$  donc d'après la statistique de Boltzmann

$$dP(\nu, \nu_o) = K_o \frac{c}{\nu_o} \exp\left(\frac{-m_a c^2 (\nu - \nu_o)^2}{2 \nu_o^2 k_B T}\right) \delta \nu$$

Le nombre de molécules pouvant absorber une partie de l'intensité du faisceau est

$$\delta n = n_o dP$$

**IIIC6)** a) Ainsi l'agitation thermique élargit la raie naturelle par effet Doppler

b) La largeur liée à l'effet Doppler est donnée par la relation trouvée en IIIC5)

$$\Delta \nu = \nu_o \sqrt{\frac{k_B T}{m_a c^2}}$$

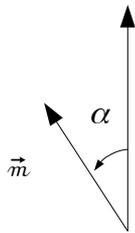
c) à  $T=273,16K$  la valeur numérique de  $\Delta \nu$  est  $\Delta \nu = 1,2 \cdot 10^{-6} \nu_o = 35,2 MHz > \delta \nu$  mais pas très grande devant  $\delta \nu$ . Compte tenu de la précision attendue on ne pourra pas négliger  $\delta \nu$

## Mines-Ponts PC Physique 1: Physique en Arctique

1) A l'équilibre stable, l'énergie potentielle d'interaction de la boussole avec le champ géomagnétique  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$  est minimale,  $\vec{m}$  et  $\vec{B}$  sont colinéaires et de même sens, l'aiguille est dirigée vers le Nord magnétique.

2) Soit  $\vec{B}_{Hor}$  la composante horizontale du champ géomagnétique, dirigée vers le Nord:

Le théorème du moment cinétique appliqué à l'aiguille en projection sur l'axe vertical ( $\vec{e}_r$ ) donne:  $I \ddot{\alpha} = (\vec{m} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_r = -m B_{Hor} \sin \alpha$  où  $B_{Hor}$  est la norme de  $\vec{B}_{Hor}$ .



Donc  $\ddot{\alpha} + \frac{m B_{Hor}}{I} \sin \alpha = 0$ . Au voisinage de la position d'équilibre stable  $\alpha = 0$ ,

on a donc  $\ddot{\alpha} + \frac{m B_{Hor}}{I} \alpha = 0$  et donc une (pseudo) période

$$\tau_{osc} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m B_{Hor}}}$$

3) En un point P de la surface de la Terre,  $\vec{R} = R_T \vec{e}_r$ ,  $R = R_T$ , le formulaire de l'énoncé donne donc avec  $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ :  $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} (3(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{e}_z)$ ; or  $\vec{e}_z = \sin \lambda \vec{e}_r - \cos \lambda \vec{e}_\theta$ . Donc:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} (2 \sin \lambda \vec{e}_r + \cos \lambda \vec{e}_\theta)$$

4) A l'équateur,  $\lambda = 0$ , on a donc  $\vec{B}_E = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_\theta = \frac{-\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_z$ ; l'énoncé dit qu'il est dirigé vers le Nord, donc  $M_0 < 0$ .

L'énoncé donne  $B_E = 3,0 \cdot 10^{-5} T = \frac{-\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3}$ , donc  $M_0 = \frac{-4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0} \approx -8 \cdot 10^{22} A \cdot m^2$ .

Pole Nord ( $\lambda = \pi/2$ ):  $\vec{B}_{PN} = \frac{2\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_z$  vers le Sud,  $B_{PN} = 2B_E = 6 \cdot 10^{-5} T$ .

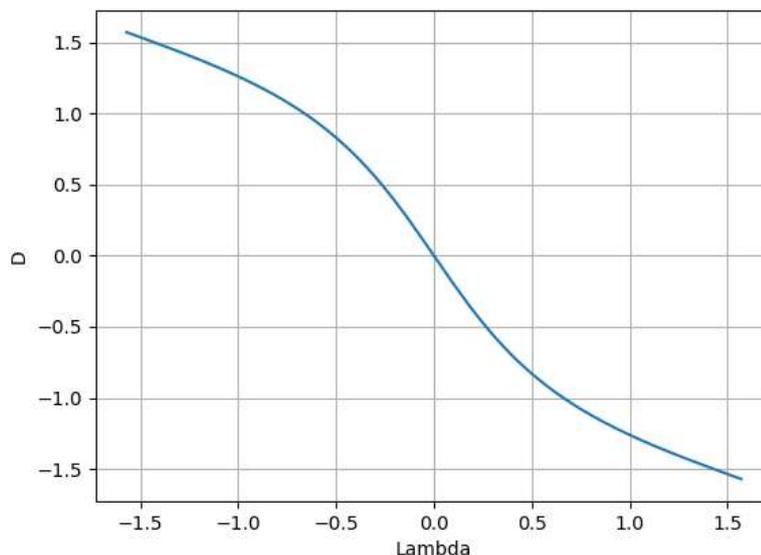
Pole Sud: idem car  $\lambda = -\pi/2$  et  $\vec{e}_r = -\vec{e}_z$ .

5) D'après la définition de "nord magnétique local",  $\vec{e}_N = -\vec{e}_\theta$ , la composante horizontale est  $\frac{-\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \cos \lambda \vec{e}_N$ . La composante verticale est  $\frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} 2 \sin \lambda \vec{e}_r$ , dirigée vers le bas ( $M_0 < 0$ )

dans l'hémisphère Nord (vers le haut dans l'hémisphère Sud). La déclinaison magnétique D est donc négative dans l'hémisphère Nord (positive dans l'hémisphère Sud).

**Remarque: cette définition de la déclinaison magnétique n'est pas la définition usuelle: ce que l'énoncé appelle "déclinaison" est en fait l'"inclinaison", la déclinaison étant l'angle entre la direction du nord magnétique et celle du nord géographique, nulle ici par hypothèse.**

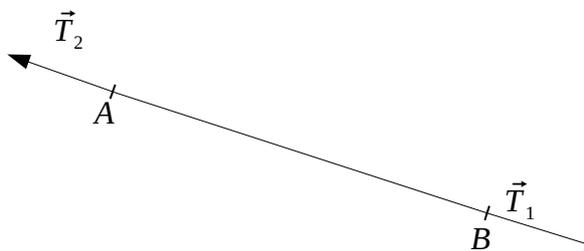
En gardant la définition de l'énoncé, on a donc  $\tan D = -2 \tan \lambda$ .



L'aiguille a donc tendance à "plonger à la verticale" près des pôles.

- Dans l'hémisphère Nord, l'extrémité Nord de l'aiguille plonge vers le sol, c'est le contraire dans l'hémisphère Sud. On leste d'ailleurs parfois l'extrémité Sud d'une boussole destinée à fonctionner dans l'hémisphère Nord, pour l'équilibrer, mais elle fonctionne alors plus mal dans l'hémisphère Sud.

6)



Le théorème de la quantité de mouvement appliqué à la corde de masse nulle donne  $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$  : l'élément de corde "transmet les tensions".

De même, le théorème du moment cinétique appliqué à la corde de masse nulle donne  $\vec{OA} \wedge \vec{T}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{T}_2 = \vec{0}$  donc  $\vec{AB} \wedge \vec{T}_2 = \vec{0}$ , les tensions sont bien colinéaires à la corde.

7)

**Remarque préliminaire: le programme de PCSI précise "Exploiter les lois de Coulomb fournies"; or ici elles ne sont pas fournies. D'ailleurs dans le sujet Physique 2, elles sont fournies...**

Soit  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}_a$  la force exercée par la glace sur le traîneau ( $\vec{N}$  composante normale,  $\vec{T}_a$  composante tangentielle).

Le traîneau ne décollant pas, la loi de la quantité de mouvement projeté sur la normale à la glace donne

$\|N\| = Mg$  dans le cas horizontal,  $\|N\| = Mg \cos \alpha$  dans le cas de la pente.

Dans le cas où ça glisse, la loi de Coulomb donne donc  $\|T_a\| = \mu_d Mg$  dans le cas horizontal,

$\|T_a\| = \mu_d Mg \cos \alpha$  dans le cas de la pente. Mais dans le cas de la pente, il vient se rajouter dans le bilan des forces projeté sur la direction du mouvement la projection  $-Mg \sin \alpha$  du poids.

Donc si on veut pouvoir mettre une seule force au second membre du PFD, il faut poser  $\mu'_d = \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$ . Pour  $\alpha$  petit,  $\mu'_d \approx \mu_d + \alpha$ .

8) **Cas horizontal:** le traîneau reste immobile si  $\vec{F} + \vec{T}_a = \vec{0}$  et  $\|\vec{T}_a\| < \mu_s \|\vec{N}\| = \mu_s Mg$ ; la valeur minimale de  $F_0$  pour le démarrage est donc  $F_{0min} = \mu_s Mg \approx 4.10^2 N$

(Cas de la pente: le traîneau reste immobile si  $F + T_a - Mg \sin \alpha = 0$  et  $\|\vec{T}_a\| < \mu_s \|\vec{N}\| = \mu_s Mg \cos \alpha$ ; la valeur minimale de  $F_0$  pour le démarrage est donc  $F_{0min} = \mu_s Mg \cos \alpha + Mg \sin \alpha$ )

Pour la suite on prend  $\alpha = 0$ .

9) La loi de la quantité de mouvement projetée sur l'horizontale donne:

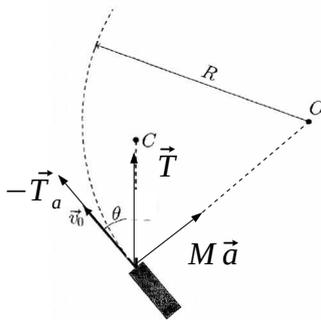
$$M \frac{dv}{dt} = -\mu_d Mg + F = -\mu_d Mg + F_0 - \beta v \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{M} v = \frac{F_0}{M} - \mu_d g$$

Avec  $v(0) = 0$ , on obtient donc  $v(t) = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta} (1 - e^{-\frac{\beta}{M} t})$ .

Vitesse limite  $v_0 = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta}$ , et la date  $t_1$  est telle que  $v(t_1) = 0,95 v_0 \Rightarrow \beta = \frac{M \ln 20}{t_1}$ .

On a donc  $\beta = \frac{M \ln 20}{t_1} = 3.10^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $F_0 = \beta v_0 + \mu_d Mg = 1,1.10^3 N$ .

10) La loi de quantité de mouvement projetée sur le plan horizontal donne:  $M \vec{a} = \vec{T} + \vec{T}_a$  avec  $\vec{a}$  dirigée vers O et de norme  $\frac{v_0^2}{R}$  (mouvement circulaire uniforme), et  $\vec{T}_a$  dirigée selon  $-\vec{v}_0$  et de norme  $\mu_d Mg$  (lois de Coulomb).



Donc  $\vec{T} = M \vec{a} - \vec{T}_a$  est selon la figure ci-contre et

$$\tan \theta = \frac{M v_0^2}{\mu_d Mg} = \frac{v_0^2}{\mu_d R g}$$

Mais si on tient en plus compte de la force de

frottement fluide  $-\beta \vec{v}_0$  on arrive à  $\tan \theta = \frac{M v_0^2}{\mu_d Mg + \beta v_0} = \frac{M v_0^2}{R F_0}$

11) 1er principe appliqué à une couche de glace comprise entre  $z$  et  $z + \delta z$ , entre les dates  $t$  et  $t + dt$ , en supposant l'évolution à pression constante:  $dH = \delta Q$ , avec  $dH = \rho_g c_g S \delta z \frac{\partial T_g}{\partial t} dt$  et

$$\delta Q = j_Q(z, t) S dt - j_Q(z + \delta z) S dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} \delta z S dt \quad (\text{en notant } \vec{j}_Q = j_Q \vec{e}_z \text{ le vecteur densité de flux}$$

thermique), d'où  $\frac{\partial j_Q}{\partial z} + \rho_g c_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = 0$ . La loi de Fourier donne  $j_Q = -\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial z}$ , d'où finalement la loi

de diffusion thermique  $\lambda_g \frac{\partial^2 T_g}{\partial z^2} = \rho_g c_g \frac{\partial T_g}{\partial t}$ .

12) La diffusivité thermique  $D_g = \frac{\lambda_g}{\rho_g c_g}$  joue le rôle d'un coefficient de diffusion; or la distance  $\Delta z$  "parcourue" par le processus de diffusion pendant une durée  $\Delta t$  est donnée par  $\Delta z = \sqrt{D_g \Delta t}$ . Si la durée de formation de l'épaisseur  $z_g(t)$  de glace est bien supérieure à  $\Delta t = \frac{z_g(t)^2 \rho_g c_g}{\lambda_g}$ , on pourra considérer la température dans la glace comme quasi-stationnaire.

13) Par définition,  $R_g = \frac{T_g(z=0) - T_g(z=z_g)}{S j_Q}$  (convection récepteur), et son expression est  $R_g = \frac{z_g}{\lambda_g S}$ . De même,  $R_e = \frac{T_e(z=-e) - T_e(z=0)}{S j_Q} = \frac{T_1 - T_0}{S j_Q} = \frac{e}{\lambda_e S}$ .

14) La loi de Newton s'écrit donc  $j_Q(z=z_g) = h(T_s - T_2)$ . D'où  $R_i = \frac{T_s - T_2}{S j_Q(z=z_g)} = \frac{1}{h S}$ .

15) Pendant une durée élémentaire  $dt$ , il se forme en  $z=0$  une couche de glace d'épaisseur  $dz_g = v_g dt$ ; cette solidification dégage une chaleur  $l_f S dz_g \rho_g$ , dont une partie est évacuée dans la glace, l'autre dans l'eau. On a donc  $S dt (j_Q(z=0^+) - j_Q(z=0^-)) = l_f S v_g dt \rho_g$ ; donc en notant  $P_{th} = S j_Q$  la puissance thermique traversant une section  $S$ , on a  $P_{th}(z=0^+) - P_{th}(z=0^-) = l_f S v_g \rho_g = \Phi$ . D'où effectivement le schéma équivalent.

16) - Electricité:

**On peut imaginer que la réponse attendue fait appel à un AO (ou ALI): mais celui-ci n'est pas au programme, aucune connaissance sur celui-ci ne peut être attendue.**

- Thermodynamique: La coexistence glace - eau liquide sous la pression atmosphérique n'est possible qu'à 0°C, d'où la maintien de cette température à l'interface. Hypothèse légèrement critiquable car sous l'effet du poids de l'épaisseur de glace croissante, la pression devrait augmenter (+salinité qui joue aussi).

17) La "loi de noeud" s'écrit:  $\Phi = \frac{T_0 - T_1}{R_e} + \frac{T_0 - T_2}{R_g + R_i}$ . Soit encore:  $l_f \rho_g \frac{dz_g}{dt} = \frac{T_0 - T_1}{\frac{e}{\lambda_e}} + \frac{T_0 - T_2}{\frac{1}{h} + \frac{z_g}{\lambda_g}}$ .

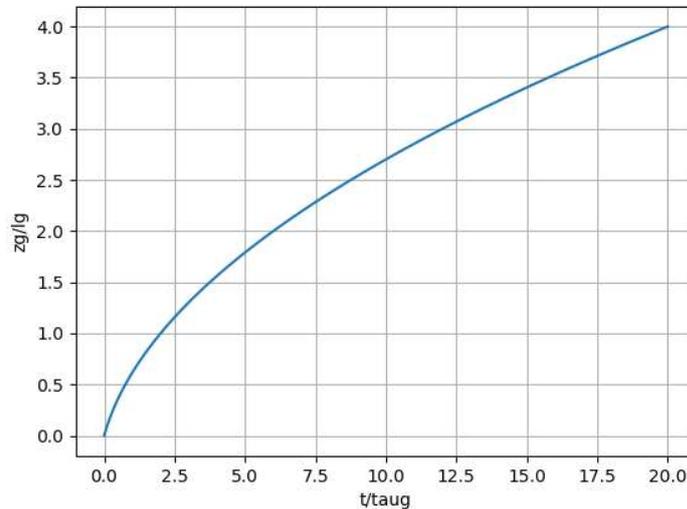
Comme l'énoncé précise que  $\frac{e}{\lambda_e} \gg \frac{1}{h} + \frac{z_g}{\lambda_g}$  et que  $|T_0 - T_1| = \frac{1}{10} |T_0 - T_2|$ , on peut négliger le 1er terme du 2nd membre devant le 2nd, et il vient:  $l_f \rho_g \frac{dz_g}{dt} \left( \frac{1}{h} + \frac{z_g}{\lambda_g} \right) = T_0 - T_2$ . On sépare les variables:

$dz_g \left( \frac{1}{h} + \frac{z_g}{\lambda_g} \right) = \frac{T_0 - T_2}{l_f \rho_g} dt$  et on intègre entre 0 et  $t$ :  $\frac{z_g(t)}{h} + \frac{z_g(t)^2}{2 \lambda_g} = \frac{T_0 - T_2}{l_f \rho_g} t$ . En posant

$l_g = \frac{2 \lambda_g}{h}$  et  $\tau_g = \frac{2 \lambda_g l_f \rho_g}{(T_0 - T_2) h^2}$ , on a bien  $\tau_g [l_g z_g(t) + z_g(t)^2] = l_g^2 t$ .

18) La résolution de  $z_g(t)^2 + l_g z_g(t) - l_g^2 \frac{t}{\tau_g} = 0$  conduit à  $z_g(t) = \frac{l_g}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 4 \frac{t}{\tau_g}} \right)$ .

On a deux régimes limites: pour  $t \ll \tau_g$ ,  $z_g(t) \approx l_g \frac{t}{\tau_g}$ . Et pour  $t \gg \tau_g$ ,  $z_g(t) \approx l_g \sqrt{\frac{t}{\tau_g}}$ .



19) Pour l'eau, la viscosité diminue quand la température augmente, elle est donc plus grande à basse température qu'à température ambiante.

20) - Force massique de pesanteur:  $-g_0 \vec{e}_z$

- Force d'inertie de Coriolis massique:  $-2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}$  où  $\vec{\omega}$  est le vecteur rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique, porté par l'axe des pôles et de norme  $\frac{2\pi}{T_0}$ ; comme on est au

voisinage du pôle Nord,  $\vec{\omega} = \frac{2\pi}{T_0} \vec{e}_z$ ; et comme  $\vec{v} = v_x(z) \vec{e}_x + v_y(z) \vec{e}_y$ , la force massique de Coriolis

vaut donc  $\frac{4\pi}{T_0} (v_y \vec{e}_x - v_x \vec{e}_y)$

- Force d'inertie d'entraînement: incluse dans le poids par définition

21) Equation de Navier-Stokes en tenant compte de la force d'inertie de Coriolis:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_e} \overrightarrow{\text{grad}} P - g_0 \vec{e}_z + \frac{\eta_e}{\rho_e} \Delta \vec{v} + \frac{4\pi}{T_0} (v_y \vec{e}_x - v_x \vec{e}_y).$$

On est en régime stationnaire donc  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ . On a  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_x = \vec{v} \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{e}_z = 0 \\ \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_y = \vec{v} \frac{\partial v_y}{\partial z} \vec{e}_z = 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ ,

$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ 0 \end{pmatrix} . \text{D'où: } \begin{pmatrix} (1) \ 0 = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta_e}{\rho_e} \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \frac{4\pi}{T_0} v_y \\ (2) \ 0 = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\eta_e}{\rho_e} \frac{d^2 v_y}{dz^2} - \frac{4\pi}{T_0} v_x \\ (3) \ 0 = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial P}{\partial z} - g_0 \end{pmatrix} .$$

L'intégration de (3) conduit à  $P(x, y, z) = -\rho_e g_0 z + f(x, y)$  ; condition aux limites:  $P(x, y, 0) = P_0 = f(x, y) \Rightarrow P = P(z) = P_0 - \rho_e g_0 z$  . La pression ne dépend donc effectivement que de  $z$ .

22) Il reste donc:  $\begin{pmatrix} (1) \ 0 = \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \frac{4\pi \rho_e}{\eta_e T_0} v_y \\ (2) \ 0 = \frac{d^2 v_y}{dz^2} - \frac{4\pi \rho_e}{\eta_e T_0} v_x \end{pmatrix}$  . En posant  $\delta = \sqrt{\frac{\eta_e T_0}{4\pi \rho_e}}$  , on a donc

$$\begin{pmatrix} (1') \ 0 = \frac{d^2 v_x}{dz^2} + \frac{1}{\delta^2} v_y \\ (2') \ 0 = \frac{d^2 v_y}{dz^2} - \frac{1}{\delta^2} v_x \end{pmatrix} .$$

23) On pose  $V = v_x + i v_y$  ; en faisant (1') + i (2'), on obtient  $0 = \frac{d^2 V}{dz^2} - \frac{i}{\delta^2} V$  . Solutions de l'équation caractéristique:  $r = \pm \frac{e^{i\pi/4}}{\delta} = \pm \frac{1+i}{\delta\sqrt{2}}$  . D'où  $V(z) = A e^{\frac{1+i}{\delta\sqrt{2}}z} + B e^{-\frac{1+i}{\delta\sqrt{2}}z}$  . Avec  $V(0) = v_0$  et

$V(-\infty)$  finie, il vient  $A = v_0$  et donc  $V(z) = v_0 e^{\frac{1+i}{\delta\sqrt{2}}z}$  d'où: 
$$\begin{cases} v_x(z) = v_0 e^{\frac{z}{\delta\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right) \\ v_y(z) = v_0 e^{\frac{z}{\delta\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{z}{\delta\sqrt{2}}\right) \end{cases} .$$

24) A priori on ne peut rien en conclure, car l'hypothèse que la vitesse de l'eau de surface est celle du vent n'est pas la bonne: l'eau de surface est entraînée par la force visqueuse exercée par le vent, on a donc des conditions aux limites plutôt du type  $\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_{z=0} = cte$  (on trouve dans la littérature des formules empiriques donnant la "tension du vent", par exemple proportionnelle au produit de la vitesse du vent de surface, de la vitesse du vent à 10m au dessus de la surface, de la masse volumique de l'air et d'un coefficient de rugosité de la surface de l'océan) et  $\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$  ; il vient alors  $A = cte \cdot \delta \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$  et donc

$$\begin{cases} v_x(z) = v_0 e^{\frac{z}{\delta\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{z}{\delta\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \\ v_y(z) = v_0 e^{\frac{z}{\delta\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{z}{\delta\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} : \text{ la vitesse de l'eau de surface est à } 45^\circ \text{ à droite de celle du vent, et cet}$$

angle augmente (dans le sens horaire) avec la profondeur.

Et même en ayant le bon champ des vitesses, comment passer à la vitesse de la banquise ? Le mouvement à vitesse constante de la banquise résulte d'un équilibre entre la force de cisaillement exercée par le vent sur la surface de glace, la force de Coriolis, et la force de cisaillement exercée par l'eau en dessous...

## Détection de molécules individuelles à température ambiante, correction

Correction proposée par : S. Franco.

Contact : sami.franco@pm.me

### I Détection du signal de fluorescence de molécules individuelles à température ambiante

#### I.A Objectif de microscope et microscopie classique

- Q 1. L'image intermédiaire doit se former au niveau du foyer objet de l'oculaire, afin que l'image finale soit formée à l'infini, permettant une observation aisée.
- Q 2. Absence de document réponse.
- Q 3. On sait d'après le cours que le grandissement  $\gamma$  d'une lentille de foyer image  $F'_1$ , et d'image  $A'$  est donné par la relation :  $\gamma = -\frac{\overline{F'_1 A'}}{f'_1}$ . L'image est ici formée au niveau du foyer  $F_2$  de l'oculaire. D'après les notations de l'énoncé, il vient alors :

$$f'_1 = \frac{\Delta}{\gamma} = 4 \text{ mm}$$

- Q 4. La relation de conjugaison au centre appliquée à l'objectif donne :

$$\frac{1}{\overline{O_1 F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{f'_1}$$

En utilisant la relation de Chasles, il vient (on ne considère pas  $w$  comme une

distance algébrique) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{O_1 F'_1} + \overline{F'_1 F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1 P} + \overline{PA}} &= \frac{1}{f'_1} \\ \frac{1}{f'_1 + \Delta} - \frac{1}{\overline{O_1 P} - w} &= \frac{1}{f'_1} \\ \frac{1}{\overline{O_1 P} - w} &= \frac{1}{f'_1 + \Delta} - \frac{1}{f'_1} \\ \frac{1}{\overline{O_1 P} - w} &= -\frac{\Delta}{f'_1(f'_1 + \Delta)} \\ w &= \overline{O_1 P} + \frac{f'_1(f'_1 + \Delta)}{\Delta} \\ w &= 0.6 \text{ mm} \end{aligned}$$

Avec un grandissement important,  $w$  diminue. Une manipulation trop brutale de l'utilisateur pourrait endommager l'échantillon, un système de ressort est donc utile pour rendre le réglage moins sensible.

- Q 5. On va se placer dans le cas où l'image finale  $L$  se forme à une distance  $d_m = 25 \text{ cm}$  de l'œil. On détermine d'abord la position de l'image intermédiaire  $I$  formée par l'objectif, et on remontera à la nouvelle valeur  $w'$  de la distance frontale. Pour cela on utilise la formule de conjugaison aux foyers appliquée à la deuxième lentille :

$$\overline{F_2 I} \cdot \overline{F'_2 L} = \overline{F_2 I} \cdot (-d_m) = -f'^2_2 \text{ soit } \overline{F_2 I} = \frac{f'^2_2}{d_m}$$

En utilisant la relation de conjugaison aux foyers pour l'objectif, on peut remonter jusqu'à la nouvelle position du plan de l'échantillon  $A'$ .

$$\overline{F_1 A'} \cdot \overline{F'_1 I} = -f'^2_1$$

d'où :

$$\begin{aligned} \overline{F_1 A'} \cdot (\overline{F'_1 F_2} + \overline{F_2 I}) &= -f'^2_1 \\ \overline{F_1 A'} &= -\frac{f'^2_1}{\Delta + \frac{f'^2_2}{d_m}} \\ \overline{PA'} = -w' &= -\frac{f'^2_1}{\Delta + \frac{f'^2_2}{d_m}} - \overline{F_1 P} \end{aligned}$$

On obtient alors :  $w' = \frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{d_m}} + f_1' + \overline{O_1P}$ , soit :

$$|w' - w| = \left| \frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{d_m}} - \frac{f_1'^2}{\Delta} \right| = 0.99 \mu\text{m}$$

Le tube du microscope doit impérativement être équipé d'une vis micrométrique pour pouvoir gérer un déplacement aussi faible.

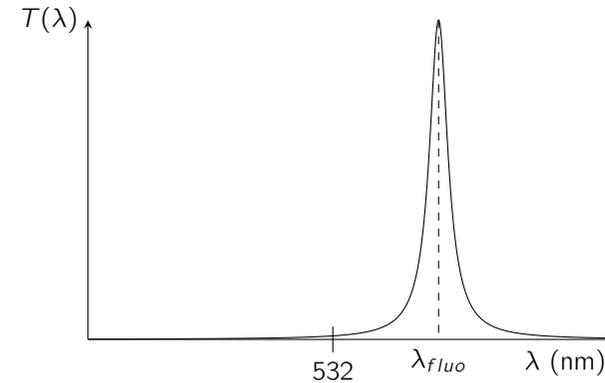
### I.B Microscope de fluorescence utilisé en configuration confocale pour la réflexion du bruit de fond

- Q 6. Pas de document réponse.
- Q 7. Pas de document réponse.
- Q 8. On diminue le bruit provenant d'autres sources de lumière (réflexions parasites...) et on se rapproche des conditions de Gauss (on reste limité par la diffraction induite par le diaphragme).
- Q 9. Le dispositif précédent ne forme l'image que d'un seul point (ou petite portion) de l'échantillon : le dispositif doit être déplacé pour pouvoir former l'image de toutes les portions de l'échantillon.

### I.C Séparation de la lumière de fluorescence de la lumière diffuse

- Q 10. D'après le schéma fourni, l'écart entre les niveaux d'énergie impliqués dans la désexcitation radiative correspondant à la fluorescence est plus faible que l'écart entre le niveau fondamental et le niveau excité par le laser. Ainsi, la longueur d'onde de fluorescence sera plus élevée que celle du laser excitateur.
- Q 11. La lame semi-réfléchissante sert à éclairer l'échantillon par la lumière laser, qui est réfléchi sur ce dernier, et en même temps à filtrer cette même longueur d'onde pour que seule la longueur d'onde correspond à la fluorescence soit transmise au détecteur.

La courbe de transmission  $T(\lambda)$  du miroir doit ressembler à ceci :



### I.D Emission de la lumière de fluorescence par un fluorophore

- Q 12. D'après la lecture de la figure 5, les différentes excitations et désexcitations provenant du niveau 2 permettent d'écrire :

$$\frac{dP_2}{dt} = k_e P_1 - (k_r + k_{nr}) P_2 - k_{isc} P_2$$

Ces équations ne sont pas indépendantes, puisque la probabilité totale d'occupation des niveaux est constante : tout changement de population des niveaux 1 et 3 se répercute sur le niveau 2.

- Q 13. On a facilement :  $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ .
- Q 14. Si l'on suppose les fluorophores identiques en taille, on constate qu'ils n'ont pas la même luminosité : certains sont donc en train de perdre leur fluorescence.

- Q 15. En régime stationnaire, la relation précédente peut s'écrire :

$$0 = k_e P_{1s} - (k_r + k_{nr}) P_{2s} - k_{isc} P_{2s}$$

En utilisant la relation de la question précédente, on peut écrire :  $P_{1s} = 1 - P_{2s} - P_{3s} = 1 - P_{2s} - \frac{k_{isc}}{k_T} P_{2s}$  d'après l'énoncé, d'où après quelques calculs sans difficulté :

$$P_{2s} = \frac{k_e}{k_e K + k_r + k_{nr} + k_{isc}}$$

- Q 16. On a :

$$R_f = \frac{k_e k_r}{k_e K + k_r + k_{nr} + k_{isc}}$$

Quand  $k_e$  devient grand devant les autres taux d'excitation, on a alors :  $R_f^\infty = \frac{k_r}{K}$ .

A saturation le niveau 2 est constamment occupé : toute perte est instantanément compensée, rendant maximal le taux de désexcitation qui n'est limité que par l'occupation maximale possible du niveau 2.

Q 17. On a vu plus haut qu'un trop grand nombre d'excitations menait à la perte du caractère fluorescent des fluorophores, ce qui n'est évidemment pas souhaitable.

Q 18. L'application numérique donne :  $R_f^\infty = 2 \times 10^7$  Hz.

Q 19. On a par définition :

$$\frac{k_e^s k_r}{k_e^s K + k_r + k_{nr} + k_{isc}} = \frac{k_r}{2K}$$

On obtient alors :

$$2K k_e^s k_r = k_r K k_e^s + k_r^2 + k_r k_{nr} + k_r k_{isc}$$

$$k_e^s = \frac{k_r^2 + k_r k_{nr} + k_r k_{isc}}{K k_r}$$

$$k_e^s = \frac{k_r}{K} \frac{k_r + k_{nr} + k_{isc}}{k_r}$$

d'où :

$$\Phi = \frac{k_r}{k_r + k_{nr} + k_{isc}}$$

On peut alors écrire, comme  $R_f^\infty = \frac{k_r}{K}$  :

$$R_f^\infty = \Phi_f k_e^s$$

Q 20. On va utiliser l'analyse dimensionnelle : l'unité du coefficient d'extinction molaire est le  $\text{mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$  sa dimension est donc :  $[\sigma] = N \cdot L^2$ . Le nombre d'Avogadro ayant pour dimension  $N^{-1}$  le terme  $\sigma$  correspond à une surface. On peut interpréter ce terme comme étant la surface utile de l'échantillon, c'est-à-dire la surface des chromophores réellement en interaction avec la lumière excitatrice.

Son ordre de grandeur est d'environ  $1 \times 10^{-19} \text{ m}^2 \sim 10 \text{ \AA}^2$ . C'est la surface de quelques atomes.

Q 21. Numériquement on obtient :  $I_s = 45 \text{ kW cm}^{-2}$ , ce qui est bien supérieur à l'intensité d'un laser de TP. Pour un faisceau de  $1 \text{ mm}^2$ , on obtiendrait  $I_s = 1 \times 10^{-4} \text{ kW cm}^{-2}$  !

## I.E Excitation laser

Q 22. A la distance  $z = w$  précédemment déterminée entre le plan de l'échantillon et l'objectif, on constate sur la figure 3 que pour une distance  $r_e = 0.2 \mu\text{m}$  de l'axe central, l'intensité lumineuse est divisée par 2. On peut donc écrire d'après la relation donnée par l'énoncé :

$$I(r_e, w) = \frac{1}{2} I(0, w)$$

d'où :

$$I_0 \exp\left(-2 \frac{w^2}{\omega_z^2}\right) \exp\left(-2 \frac{r_e^2}{\omega_r^2}\right) = \frac{I_0}{2} \exp\left(-2 \frac{w^2}{\omega_z^2}\right)$$

d'où :

$$\exp\left(-2 \frac{r_e^2}{\omega_r^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Après calculs on obtient :

$$\omega_r^2 = 2 \frac{r_e^2}{\ln 2}$$

ce qui peut se réécrire d'après l'expression de  $\omega_r$  donnée dans l'énoncé :

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{2}{\ln 2}} r_e$$

d'où :

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \frac{\lambda}{r_e} = 0,78$$

Avec un objectif d'ouverture numérique élevée, la largeur du faisceau gaussien sera plus faible, et l'image plus "ponctuelle".

Q 23. On a précédemment calculée  $I_s = 45 \text{ kW cm}^{-2}$ . Pour une taille de faisceau de l'ordre de  $1 \mu\text{m}^2$ , cela nous donne une intensité d'environ  $I = 0.45 \text{ mW}$  ce qui est une intensité tout à fait compatible avec un laser commercial comme ceux d'usage en TP.

Q 24. En ordre de grandeur, on va supposer que le volume excité par le laser est un cylindre de hauteur  $\omega_z$  et de rayon  $\omega_r$ . Le volume est donc approximativement :  $V \sim \omega_z \omega_r^2$  (on laisse tomber le facteur  $\pi$ ). En utilisant les définitions de l'énoncé pour  $\omega_r$  et  $\omega_z$  ainsi que les valeurs numériques précédemment déterminées, il vient :

$$V \sim 1 \times 10^{-1} \mu\text{m}^3$$

- Q 25. Sur la figure *b*, on compte une dizaine de molécules pour un volume occupé total de  $10 \mu m \times 10 \mu m \times 100 nm.$ , soit une concentration de 10 molécules ( $1.66 \times 10^{-23} \text{ mol}$ ) pour  $1 \times 10^{-19} \text{ m}^{-3}$ . Soit  $1.66 \times 10^{-4} \text{ mol m}^{-3}$  ou encore  $1.66 \times 10^{-7} \text{ mol L}^{-1}$ .

## I.F Rapport signal sur bruit

- Q 26. On a assez naturellement :  $S_f = \eta \times R_f \times \tau_a$ .
- Q 27. On va tout d'abord, à l'aide du profil donné figure 3, estimer grossièrement le nombre de photons (les coups) détectés sur une ligne de pixels. L'intégrale de cette courbe est grossièrement égale à sa hauteur multipliée par sa largeur. On compte donc environ 200 coups par pixels sur une largeur de  $0.8 \mu m$ .  
La figure *c* fait 256 pixels de large pour une largeur de 2 microns. On estime donc la taille d'un pixel à  $0.01 \mu m$ . La largeur de la tâche est donc de 80 pixels environ. Ce qui nous donne 16000 coups sur une ligne de pixels. Une molécule individuelle représentant en largeur autant de pixels, cela nous donne donc environ  $10^6$  photons pour une molécule, donc  $10^7$  environs pour les dix molécules observées.  
On obtient donc  $S_f = 10^7$  photons. Sachant que  $\eta = 2\%$  d'après l'énoncé et  $R_f = 10^8$  photons par secondes environs d'après le préambule su sujet, on obtient alors :

$$\tau_a = S_f / (\eta R_f) \sim 5 \text{ s}$$

- Q 28. On a :  $B = \sqrt{\eta_D R_f \tau_a + \eta_D \tau_a \frac{\sigma_D n V I_0}{h\nu}}$ , soit alors :

$$\frac{S_f}{B} = \frac{\eta_D R_f \tau_a}{\sqrt{\eta_D R_f \tau_a + \eta_D \tau_a \frac{\sigma_D n V I_0}{h\nu}}}$$

ou encore :

$$\frac{S_f}{B} = \sqrt{\frac{\eta_D R_f \tau_a}{1 + \frac{\sigma_D n V I_0}{R_f h\nu}}}$$

- Q 29. Le diaphragme réduit la lumière provenant des autres parties des chromophores, et donc diminue le bruit reçu par le photodétecteur. Cela correspond à une diminution de  $V$  dans la formule précédente.

## II Analyse de la lumière de fluorescence

- Q 30. On a :

$$p(x_n, t_n) = \frac{p(x_{n-1}, t_{n-1}) + p(x_{n+1}, t_{n-1})}{2}$$

puisque la molécule a autant de chance de provenir de la position précédente que de la position suivante.

- Q 31. Un développement de Taylor à l'ordre 1 nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x_n, t_n) = \frac{p(x_n, t_n) - p(x_n, t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}$$

Sachant que  $t_n - t_{n-1} = \tau$ , l'expression de l'énoncé est démontrée :

$$p(x_n, t_n) \simeq p(x_n, t_{n-1}) + \tau \frac{\partial p}{\partial t}(x_n, t_n)$$

- Q 32. Sachant que  $x_{n+1} - x_n = a$ , développons  $p(x_{n+1}, t_{n-1})$  au second ordre :

$$p(x_{n+1}, t_{n-1}) = p(x_n, t_{n-1}) + a \frac{\partial p}{\partial x}(x_n, t_{n-1}) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_n, t_{n-1})$$

On peut développer de la même façon  $p(x_{n-1}, t_{n-1})$

$$p(x_{n-1}, t_{n-1}) = p(x_n, t_{n-1}) - a \frac{\partial p}{\partial x}(x_n, t_{n-1}) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_n, t_{n-1})$$

L'addition de ces deux égalités nous permet d'écrire :

$$p(x_{n+1}, t_{n-1}) + p(x_{n-1}, t_{n-1}) = 2p(x_n, t_{n-1}) + a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_n, t_{n-1})$$

- Q 33. On sait d'après la question 30 que  $p(x_n, t_n) = \frac{p(x_{n-1}, t_{n-1}) + p(x_{n+1}, t_{n-1})}{2}$ , on peut alors écrire :

$$2p(x_n, t_n) = 2p(x_n, t_{n-1}) + a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_n, t_{n-1})$$

d'où d'après la question 31 :

$$2\tau \frac{\partial p}{\partial t}(x_n, t_n) = a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_n, t_{n-1})$$

soit

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x_n, t_{n-1}) = \frac{2\tau}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t}(x_n, t_n)$$

Q 34. C'est une équation de diffusion de coefficient :  $D = \frac{a^2}{2\tau}$ .

Q 35. Après 1 saut, on a  $\langle \vec{OA} \rangle_N = \frac{1}{2} \vec{OA}_1 + \frac{1}{2} \vec{OA}_{-1} = 0$ .

Après un deuxième saut, si l'on était précédemment en  $A_1$ , alors on a une chance sur deux d'être en  $A_2$  et une chance sur 2 d'être en  $A_0$ . Le vecteur position moyen est donc  $\vec{OA}_1$ .

Si l'on était précédemment en  $A_{-1}$ , alors on a une chance sur deux d'être en  $A_{-2}$  et une chance sur 2 d'être en  $A_0$ . Le vecteur position moyen est donc  $\vec{OA}_{-1}$ .

En moyenne le vecteur position est donc encore le vecteur nul. Par récurrence immédiate, cela est vrai quel que soit le nombre de sauts effectués.

Q 36. Si l'on note  $u_n$  la valeur algébrique du déplacement lors du n-ième saut (qui vaut donc  $a$  ou  $-a$ ), on sait que  $\langle u_n \rangle_N = 0$  sur un grand nombre  $N$  de saut. Facilement par contre on a :  $\langle u_n^2 \rangle_N = a^2$ .

On peut ainsi exprimer facilement le vecteur déplacement  $\vec{OA}_N = \sum_{n=1}^N u_n \vec{u}_x$ . Le carré de sa norme s'exprime alors en moyenne ainsi :

$$\langle \|\vec{OA}_N\|^2 \rangle = \langle \vec{OA}_N \cdot \vec{OA}_N \rangle$$

d'où :

$$\langle \|\vec{OA}_N\|^2 \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^N u_n \sum_{k=1}^N u_k \right\rangle$$

soit :

$$\langle \|\vec{OA}_N\|^2 \rangle = \sum_{n=1}^N \langle u_n^2 \rangle + \sum_{n \neq k} \langle u_n u_k \rangle$$

On voit que ce dernier terme va valoir 0, les déplacements dans le sens négatif compensant toujours les déplacements dans le sens positif (tous les produits s'annulent deux à deux). On a donc :

$$\langle \|\vec{OA}_N\|^2 \rangle = Na^2$$

Sachant d'après l'énoncé que  $\Delta t = N\tau$ , on obtient alors :

$$\Delta^2 = a^2 \frac{\Delta t}{\tau}$$

Q 37. Le coefficient directeur de la droite figure 6 vaut (en 2D) :  $2a^2/\tau$ . Le coefficient de diffusion valant  $a^2/2\tau$ , on a donc :

$$\beta = 4D$$

d'où :

$$D = 1 \times 10^{13} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

### III Exaltation du signal par un substrat métallique présentant une rugosité

#### III.A Dipôle induit dans une nanoparticule métallique sphérique de taille 10 nm

Q 38. La grandeur  $\alpha$  est la polarisabilité.

Analysons la dimension d'un moment dipolaire  $\vec{p} = qN\vec{P}$  :

$$\begin{aligned} [p] &= [q]L \\ &= ITL \end{aligned}$$

On sait également que :

$$[p] = [\alpha][\epsilon_0][E]$$

Pour déterminer la dimension de la polarisabilité, il nous faut donc déterminer la dimension de la permittivité diélectrique et du champ électrique.

Pour  $\epsilon_0$ , on peut utiliser la relation de Coulomb :  $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$ . Sachant que  $[F] = MLT^{-2}$ , il vient facilement :

$$[\epsilon_0] = I^2 T^4 M^{-1} L^{-3}$$

Pour le champ électrique, la force de Lorentz électrique permet facilement d'obtenir :

$$[E] = [F]/[q] = MLI^{-1}T^{-3}$$

On obtient alors après calculs :

$$[\alpha] = L^3$$

On peut donner comme ordre de grandeur à cette quantité le volume de la particule étudiée.

Q 39. La nanoparticule a un volume  $V_1 \simeq 1 \times 10^{-8} \text{ nm}^3 = 1 \times 10^{-24} \text{ m}^3$ , la molécule environ  $V_2 = 1 \mu\text{m}^3 = 1 \times 10^{-18} \text{ m}^3$ . Le rapport des deux volumes donne alors  $10^6$ . La molécule se voit donc induire un très grand moment dipolaire grâce à l'action des nanoparticules métalliques.

### III.B Modèle de Drude pour les électrons métalliques de la nanoparticule

Q 40. On a :  $\vec{j}_e = -ne\vec{v}$

Q 41. On applique le principe fondamental de la dynamique sur un électron. En négligeant le poids de l'électron et la force de Lorentz magnétique, ne s'exercent alors que la force de Lorentz électrique et la force visqueuse décrite par l'énoncé. On peut alors écrire :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

En régime sinusoïdal forcé il vient :

$$i\omega m \vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

En remplaçant le vecteur  $\vec{v}$  par  $-\frac{1}{ne}\vec{j}_e$  dans l'équation précédente, il vient :

$$-\frac{i\omega m}{ne} \vec{j}_e = -e\vec{E} + \frac{m}{ne\tau} \vec{j}_e$$

soit au final :

$$\vec{j}_e = \frac{ne^2\tau}{1 + i\omega\tau} \vec{E}$$

On retrouve donc la loi d'Ohm locale, avec la conductivité électrique complexe :

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{1 + i\omega\tau}$$

En introduisant la pulsation plasma  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ , il vient :

$$\sigma = \frac{\omega_p^2\tau\epsilon_0}{1 + i\omega\tau} = \frac{\omega_p^2\epsilon_0}{\frac{1}{\tau} + i\omega}$$

Q 42. Si  $\tau \gg \frac{1}{\omega}$ , alors l'expression précédente se simplifie :

$$\sigma = -i \frac{\omega_p^2\epsilon_0}{\omega}$$

et la conductivité devient un imaginaire pur.

Cela implique alors que la densité volumique de courant  $\vec{j}_e$  et le champ électrique sont en quadrature de phase. On aura donc en notation réelle :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

et :

$$\vec{j}_e = \vec{j}_{e0} \cos(\omega t + \pi/2) = -\vec{j}_{e0} \sin(\omega t)$$

La puissance cédée par le champ électrique étant égale à  $\vec{j}_e \cdot \vec{E}$ , on constate donc qu'elle sera nulle en moyenne (car  $\langle \cos(x) \sin(x) \rangle = 0$ ).

Q 43. En restant dans le cadre de la simplification précédente, il vient :

$$\epsilon = 1 - \frac{i}{\omega\epsilon_0} \times \left( -i \frac{\omega_p^2\epsilon_0}{\omega} \right)$$

soit :

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Q 44. La polarisabilité de la particule métallique sphérique deviendra très grande si le dénominateur de l'expression donnée par l'énoncé est nul, soit si l'on a :

$$\epsilon + 2 = 3 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0$$

ce qui implique :

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$$

# CCMP PSI 2021 Physique 2

## Vélocimétrie Laser Doppler

Corrigé proposé par Nicolas Choimet, PSI\*, Eiffel Bordeaux

[nicolas.choimet@live.fr](mailto:nicolas.choimet@live.fr)

### I. Principe de la vélocimétrie Laser

#### I.A. Montage à un faisceau

**Q1** Pendant  $\Delta t = \frac{1}{f_p}$ , l'abscisse de la particule varie de  $\Delta x = \vec{V} \cdot \hat{u}_x \Delta t = \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_e}{f_p}$ . Or, d'après la figure, la distance parcourue par l'onde pendant  $\Delta t = \frac{1}{f_p}$  vaut  $\Delta x + \lambda_e = \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_e}{f_p} + \frac{c_0}{f_e}$ ; par ailleurs, comme l'onde se propage à la vitesse  $c_0$ , l'onde parcourt la distance  $c_0 \Delta t = \frac{c_0}{f_p}$ . On en déduit :  $\frac{c_0 - \vec{V} \cdot \hat{u}_e}{f_p} = \frac{c_0}{f_e}$ , soit :

$$f_p = f_e \left( 1 - \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_e}{c_0} \right)$$

**Q2** Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à la particule, le récepteur est mobile à la vitesse  $-\vec{V}$  et la lumière diffusée se propage selon  $\hat{u}_d$ . On peut donc transposer le résultat précédent, ce qui donne :

$$f_d = f_p \left( 1 + \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_d}{c_0} \right)$$

**Q3** On en déduit la relation, compte tenu de l'hypothèse  $\|\vec{V}\| \ll c_0$  :

$$f_d = f_e \left( 1 - \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_e}{c_0} \right) \left( 1 + \frac{\vec{V} \cdot \hat{u}_d}{c_0} \right) \approx f_e \left( 1 + \frac{\vec{V} \cdot (\hat{u}_d - \hat{u}_e)}{c_0} \right) = f_e + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_e) \cdot \vec{V}}{\lambda_e}$$

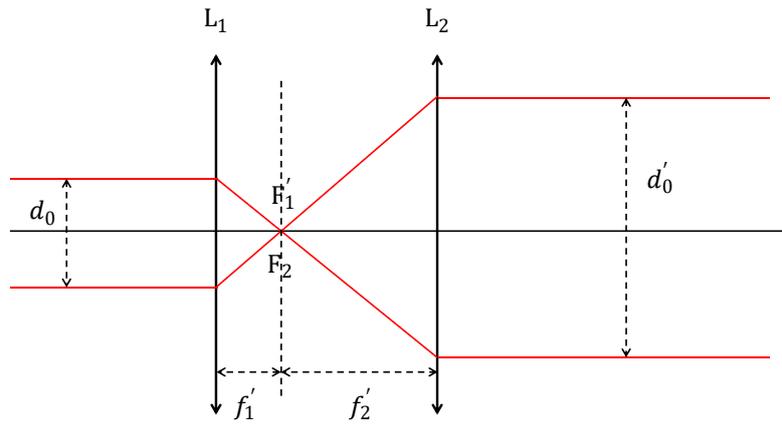
L'écart relatif en fréquence vaut donc au plus :

$$\frac{|f_d - f_e|_{\max}}{f_e} = \frac{\|\vec{V}\|}{c_0} \approx \frac{0,1}{3 \cdot 10^8} \approx 3 \cdot 10^{-10}$$

L'écart en fréquence est donc très inférieur à la fréquence  $f_e$ , ce qui rend sa mesure très délicate, de manière directe (c'est-à-dire sans isoler le terme correspondant à l'écart de fréquence).

#### I.B. Montage à deux faisceaux

**Q4** Le faisceau émergent du système constitué des deux lentilles doit être un faisceau parallèle à l'axe optique. Il faut donc que le foyer principal image  $F'_1$  de la lentille  $L_1$  et le foyer principal objet  $F_2$  de la lentille  $L_2$  soient confondus.



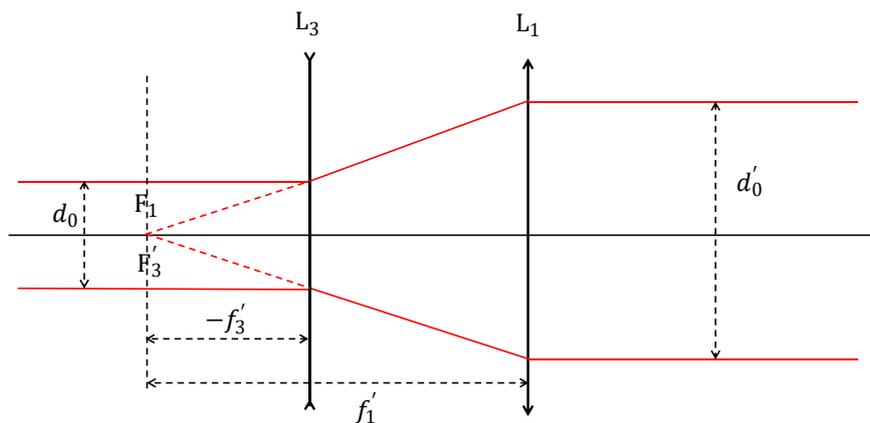
Dans ces conditions, la figure montre que :  $\frac{d'_0}{f'_2} = \frac{d_0}{f'_1}$ . Par conséquent :

$$d'_0 = d_0 \frac{f'_2}{f'_1}$$

On aura donc  $d'_0 > d_0$  si  $f'_2 > f'_1$ .

L'encombrement de l'élargisseur de faisceau vaut  $f'_1 + f'_2 = f'_1 \left(1 + \frac{d'_0}{d_0}\right) > f'_1$ .

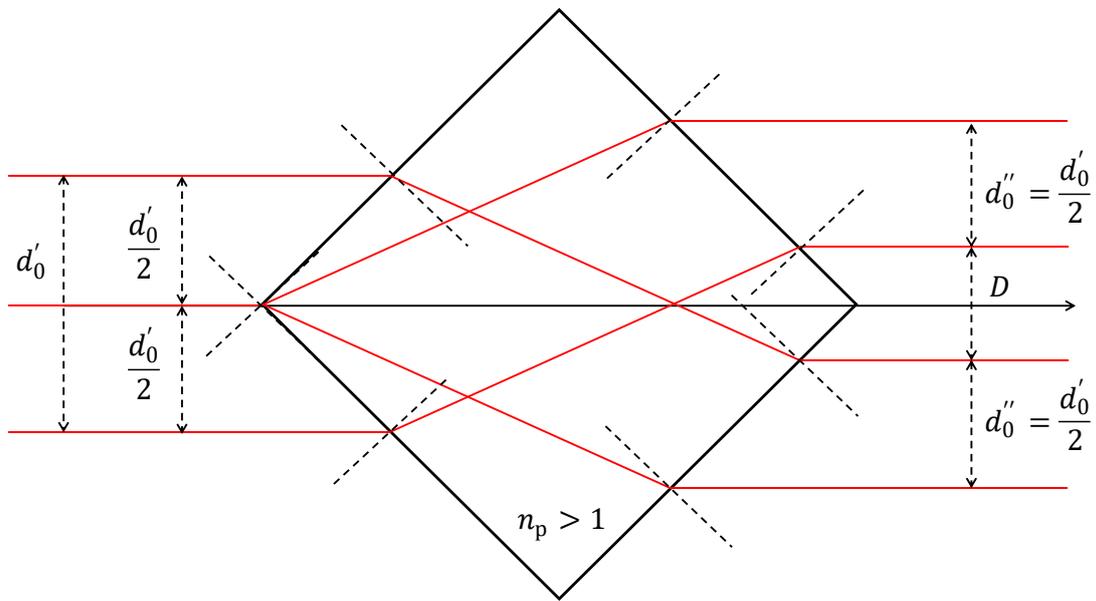
Pour réduire l'encombrement, on peut remplacer la lentille convergente  $L_2$  par une lentille divergente  $L_3$  disposée avant  $L_1$  en faisant coïncider le foyer image principal  $F'_3$  de la lentille  $L_3$  avec le foyer objet principal  $F_1$  de la lentille  $L_1$ . Cela impose bien sûr la condition  $f'_1 > -f'_3$  :



On voit alors sur la figure que  $\frac{d'_0}{f'_1} = -\frac{d_0}{f'_3}$  soit  $d'_0 = -d_0 \frac{f'_1}{f'_3} > d_0$ .

L'encombrement de l'élargisseur de faisceau vaut alors :  $f'_1 + f'_3 = f'_1 \left(1 - \frac{d_0}{d'_0}\right) < f'_1$ .

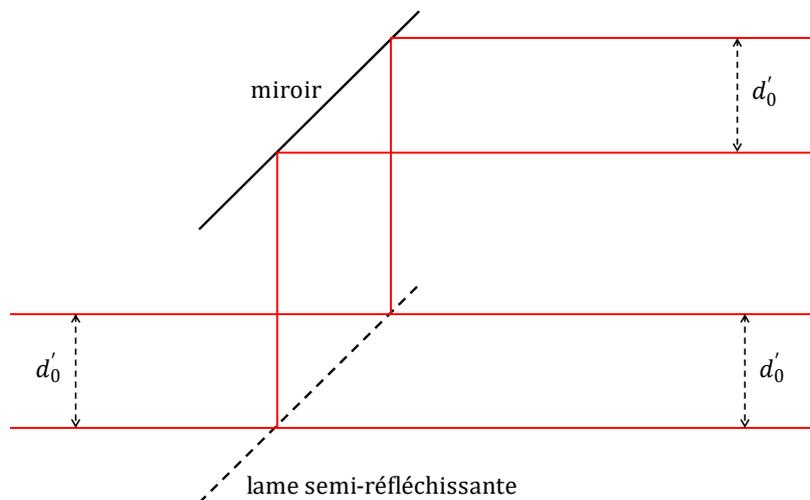
**Q5** Voici le schéma illustrant le fonctionnement du diviseur d'ondes :



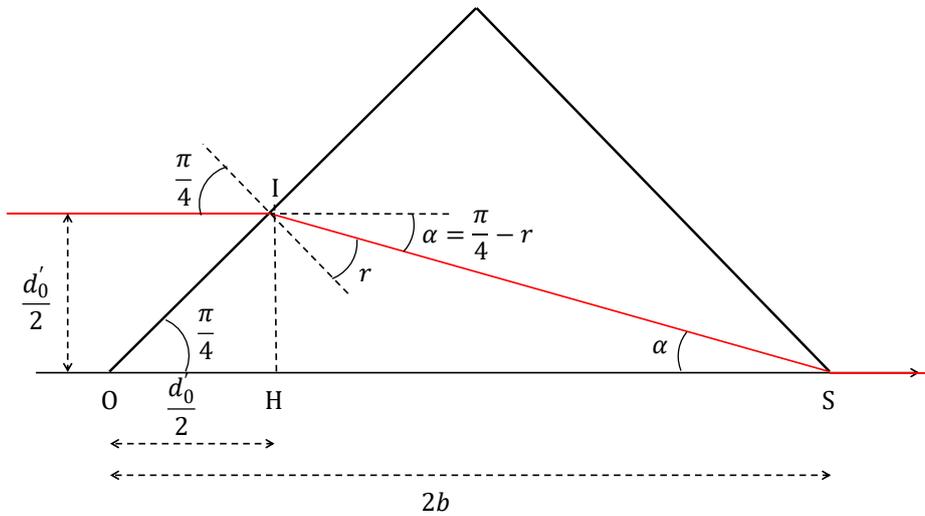
Comme le cube est à faces parallèles deux à deux, les rayons émergents ressortent du cube parallèlement aux rayons incidents (sous une incidence commune  $\frac{\pi}{4}$ ). Par conséquent,  $d''_0 = \frac{d'_0}{2}$ .

Il s'agit d'un diviseur d'ondes à différence de marche nulle car aucun déphasage n'est introduit sur les deux voies.

On peut proposer un dispositif mettant en jeu une lame semi-réfléchissante orientée à  $45^\circ$  par rapport au faisceau incident, associée à un miroir parallèle à la lame. Le faisceau transmis ne subit aucun déphasage. Le faisceau réfléchi sur la lame puis sur le miroir subit deux déphasages consécutifs de  $\pi$ . Il n'y a donc pas non plus de déphasage global. Par conséquent, c'est aussi un diviseur d'ondes à différence de marche nulle. (NDLR : question hors programme)



**Q6** A la limite du non-recouvrement entre les deux faisceaux, le rayon incident le plus éloigné de l'axe optique soit émerger du séparateur en passant par le coin opposé S du séparateur :



On introduit le point H, projeté orthogonal du point I sur l'axe optique, et on voit sur la figure que :

$$2b = OH + HS = \frac{d'_0}{2} + \frac{d'_0}{2} \times \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{d'_0}{2} \left( \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

où  $\alpha = \frac{\pi}{4} - r$ . Or,  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = n_p \sin r$  (2<sup>e</sup> loi de Descartes pour la réfraction). On en déduit :

$$\begin{cases} \sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{4} - r\right) = \frac{\cos r}{\sqrt{2}} - \frac{\sin r}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2n_p^2}}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}n_p} \\ \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{4} - r\right) = \frac{\cos r}{\sqrt{2}} + \frac{\sin r}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2n_p^2}}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}n_p} \end{cases}$$

Par conséquent :

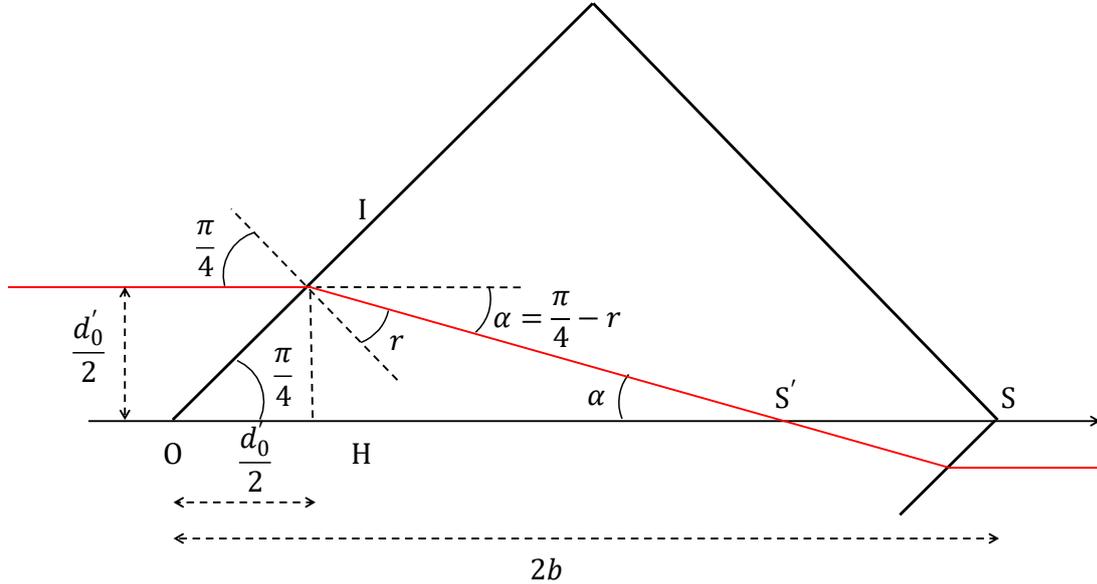
$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sqrt{1 - \frac{1}{2n_p^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2n_p^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}n_p}}$$

On en réduit finalement :

$$b = \frac{d'_0}{2} \frac{\sqrt{2n_p^2 - 1}}{\sqrt{2n_p^2 - 1} - 1}$$

Pour que les faisceaux soient séparés, il faut que le rayon précédemment considéré coupe l'axe optique en un point  $S'$  situé avant le point  $S$ . Autrement dit, il faut que :

$$OH + HS' < 2b$$



Tous les autres calculs restant valables, on en déduit la condition de séparation :

$$b > \frac{d'_0}{2} \frac{\sqrt{2n_p^2 - 1}}{\sqrt{2n_p^2 - 1} - 1}$$

**Q7** Le résultat de la question Q3 permet d'écrire :

$$\begin{cases} f_{d1} = f_e + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_{e1}) \cdot \vec{V}}{\lambda_e} \\ f_{d2} = f_e + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_{e2}) \cdot \vec{V}}{\lambda_e} \end{cases}$$

Donc :

$$f_{d1} - f_{d2} = \frac{(\hat{u}_{e1} - \hat{u}_{e2}) \cdot \vec{V}}{\lambda_e}$$

Or,  $\hat{u}_{e1} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{u}_z - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{u}_x$  et  $\hat{u}_{e2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{u}_z + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{u}_x$ . On en déduit :

$$f_{d1} - f_{d2} = -2 \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_x$$

**Q8** L'intensité lumineuse reçue par le récepteur s'écrit :

$$I(t) = K \left| \underline{E}_{d1} + \underline{E}_{d2} \right|^2 = KE_0^2 |\exp(i2\pi f_{d1}t) + \exp(i2\pi f_{d2}t)|^2 = KE_0^2 |1 + \exp(i2\pi(f_{d2} - f_{d1})t)|^2$$

On en déduit :

$$I(t) = KE_0^2 |\exp(i\pi(f_{d2} - f_{d1})t) + \exp(i\pi(f_{d1} - f_{d2})t)|^2 = 4KE_0^2 \cos^2(\pi(f_{d2} - f_{d1})t)$$

soit :

$$I(t) = 2KE_0^2 (1 + \cos(2\pi(f_{d2} - f_{d1})t)) = 2 \underbrace{KE_0^2}_{\Lambda} \left( 1 + \cos \left( \underbrace{4\pi \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) V_x}{\lambda_e}}_{\beta} t \right) \right)$$

La fréquence de clignotement de la lumière diffusée vaut donc :

$$f_c = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |V_x|}{\lambda_e}$$

**Q9** Numériquement,  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{3,6 \times \pi}{2 \times 180}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{100}\right) \approx \frac{\pi}{100} \approx 3 \cdot 10^{-2}$ . Donc :

$$f_c \approx \frac{2 \times 3 \cdot 10^{-2} \times 0,1}{5,2 \cdot 10^{-7}} \approx \frac{6}{5} \times 10^4 = 12 \text{ kHz}$$

Cette fréquence est facilement mesurable.

Dans le montage à un faisceau, il s'agissait de mesurer un écart relatif de fréquence égal à  $3 \cdot 10^{-10}$  noyé dans le signal de fréquence  $f_e = \frac{c}{\lambda_e} \approx 6 \cdot 10^{14}$  Hz, c'est-à-dire une fréquence égale à  $6 \cdot 10^{14}$  Hz  $\pm$  180 kHz. Le montage à deux faisceaux a permis de s'affranchir de la fréquence  $6 \cdot 10^{14}$  Hz.

**Q10** Le photodétecteur ne peut suivre les variations instantanées d'intensité diffusée que si son temps de réponse est très inférieur à la période du signal lumineux. Il faut donc que  $\tau \ll \frac{1}{f_c}$ . Pour fixer les idées, penons le critère  $\tau f_c \leq \frac{1}{100}$ . On en déduit que  $|V_x| \leq \frac{\lambda_e}{200\tau \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ .

Numériquement, on trouve :

$$|V_x|_{\max} = V_{\max} = \frac{\lambda_e}{200\tau \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{5,2 \cdot 10^{-7}}{200 \times 4,4 \cdot 10^{-9} \times 3 \cdot 10^{-2}} \approx \frac{5}{2 \times 13} \times 100 \approx 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Les valeurs de  $V_x$  mesurables avec ce dispositif doivent donc être comprises entre  $-20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $+20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Q11** On ne peut mesurer que la composante  $V_x$  de la vitesse de l'écoulement car  $\hat{u}_{e1} - \hat{u}_{e2}$  est porté par le vecteur  $\hat{u}_x$ .

Pour accéder simultanément aux trois composantes  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$ , il faut utiliser trois lasers de couleurs différentes (il faut 3 longueurs d'onde différentes pour distinguer les signaux), émettant selon les trois directions de l'espace, suivis chacun d'un dispositif élargisseur-séparateur de faisceau et d'une lentille convergente dédiée faisant converger chaque paire de faisceaux dans la zone de mesure de la vitesse de l'écoulement.

**Q12** L'impossibilité de distinguer le signe de  $V_x$  est liée au fait que les deux champs se superposent dans la zone d'étude (ce qui fait apparaître « mécaniquement » un cosinus, fonction paire). On pourrait avoir envie d'imposer un déphasage de  $\pi$  sur l'un des deux champs via une réflexion métallique, ce qui donnerait bien un sinus. Las ! Le capteur est

sensible au module carré du champ électrique (détecteur quadratique) et on verrait donc réapparaître le cosinus...

**Q13** Reprenons les résultats obtenus aux questions Q7 et Q8. On a cette fois-ci :

$$\begin{cases} f_{d1} = f_e + f_B + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_{e1}) \cdot \vec{V}}{\lambda'_1} \approx f_e + f_B + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_{e1}) \cdot \vec{V}}{\lambda_e} \\ f_{d2} = f_e + \frac{(\hat{u}_d - \hat{u}_{e2}) \cdot \vec{V}}{\lambda_e} \end{cases}$$

car  $\lambda'_1 = \frac{c_0}{f_e + f_B} \approx \frac{c_0}{f_e} = \lambda_e$  ( $f_B$  est la fréquence d'une onde acoustique : même pour des ultrasons,  $f_B \ll f_e$ )

Donc :

$$f_{d1} - f_{d2} = f_B - 2 \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_x$$

On en déduit la fréquence de clignotement :

$$f_c = |f_{d1} - f_{d2}| = \left| f_B - 2 \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_x \right|$$

La fréquence de clignotement doit rester positive quelle que soit  $V_x$ . La seule expression compatible avec cette contrainte est donc :

$$f_c = f_B - 2 \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_x$$

On voit que la fréquence de clignotement dépend cette fois-ci du signe de  $V_x$  : la mesure de cette fréquence nous renseigne donc sur la valeur algébrique de  $V_x$ .

On veut pouvoir mesurer  $V_x$  dans l'intervalle  $\left[-\frac{V_{\max}}{2}, \frac{V_{\max}}{2}\right]$  donc  $f_c$  est comprise dans l'intervalle  $\left[f_B - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max}, f_B + \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max}\right]$ . Le photodétecteur impose toujours la condition :  $\tau f_c \leq \frac{1}{100}$ . Cette condition doit être vérifiée pour toutes les valeurs de  $f_c$ . Par conséquent, il faut que :  $\tau \left( f_B + \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max} \right) \leq \frac{1}{100}$ , soit :

$$f_B \leq \frac{1}{100\tau} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max}$$

En même temps,  $f_B$  doit être supérieure à  $2 \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} \frac{V_{\max}}{2} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max}$  pour que  $f_c$  soit positive. Par conséquent :

$$\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max} < f_B \leq \frac{1}{100\tau} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\lambda_e} V_{\max}$$

Or (cf Q10),  $\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\lambda_e} V_{\max} = \frac{1}{200\tau}$ . Par conséquent :

$$\frac{1}{200\tau} < f_B \leq \frac{1}{200\tau}$$

Il semble donc que la valeur optimale soit de l'ordre de  $\frac{1}{200\tau}$  (sans doute un peu au-dessus pour que  $f_c$  ne soit pas nulle). Numériquement, on trouve :  $f_B \approx \frac{1}{200\tau} = \frac{10^7}{2 \times 4,4} \approx 1$  MHz.

## II. Application à la mesure d'un profil de Poiseuille

**Q14** Le nombre de Reynolds d'un tel écoulement interne s'écrit  $Re = \frac{\mu \times 2R \times U}{\eta}$  où  $U = \frac{Q}{\pi R^2}$  est la vitesse débitante (vitesse moyennée sur une section de l'écoulement). Par conséquent :

$$Re = \frac{2 \mu Q}{\pi \eta R}$$

L'écoulement est laminaire si  $Re \ll 2000$ .

**Q15** L'écoulement étant incompressible,  $\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ . Par conséquent,  $\vec{v} = v(r) \hat{u}_x$ .

Considérons la particule de fluide cylindrique d'axe  $(Ox)$ , de rayon  $r$ , de longueur  $L$ . Comme le champ des vitesses ne dépend ni de  $x$  ni du temps, tous les points de la particules de fluide sont en translation rectiligne et uniforme. Il en est de même de son centre de masse  $G$ . Le principe fondamental de la dynamique donne donc, en projection sur l'axe  $(Ox)$  :

$$0 = P_e \pi r^2 - (P_e - \Delta P) \pi r^2 + 2\pi \eta L r \frac{dv}{dr}$$

Par conséquent,

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r$$

On en déduit :

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2 + B$$

La condition aux limites sur la paroi du tube traduit le non-glissement du fluide :  $v(R) = 0$ . On en déduit :

$$v(r) = \frac{R^2 \Delta P}{4\eta L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

On a bien  $v(r) = A \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^q\right)$  où  $A = \frac{R^2 \Delta P}{4\eta L}$  et  $q = 2$ .

Le débit de volume vaut, par définition :

$$Q = \iint_{\text{section}} v(r) dS = 2\pi A \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = \frac{\pi}{2} A R^2$$

**Q16** Le profil de vitesse de l'écoulement (2) est sensiblement parabolique (écoulement de Poiseuille cylindrique), ce qui n'est pas vraiment le cas de l'écoulement (1) dont la vitesse « sature » sur une large zone. L'écoulement (2) est donc le plus proche d'un écoulement laminaire.

Pour l'écoulement (2), on peut utiliser la relation  $Q = \frac{\pi}{2}AR^2$  et estimer  $A$  sur la courbe :  $A = v(0) = 70 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ . On en déduit :  $Q \approx \frac{3 \times 70 \cdot 10^{-3} \times 1,3^2 \times 10^{-4}}{2} \approx 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pour l'écoulement (1), on note que la vitesse est sensiblement constante ( $V \approx 70 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ ) jusqu'à une distance à l'axe de l'ordre de  $R_0 \approx 8 \text{ mm}$  et on néglige la contribution de l'écoulement extérieur à ce rayon. On a donc :  $Q \approx \pi R_0^2 V \approx 3 \times 8^2 \times 10^{-6} \times 70 \cdot 10^{-3} \approx 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pour l'écoulement (2),

$$\text{Re} = \frac{2 \mu Q}{\pi \eta R} \approx \frac{2 \times 1,2 \cdot 10^3 \times 1,8 \cdot 10^{-5}}{3 \times 5,5 \cdot 10^{-3} \times 1,3 \cdot 10^{-2}} = \frac{3,6 \times 1,2}{3,9 \times 5,5} \times 10^3 \approx \frac{1,4}{1,3 \times 5,5} \times 10^3 \approx \frac{1,4}{7} \times 10^3 \approx 200$$

On a bien  $\text{Re} \approx \frac{2000}{10}$  : l'écoulement est sensiblement laminaire.

Pour l'écoulement (1) :

$$\text{Re} = \frac{2 \mu Q}{\pi \eta R} \approx \frac{2 \times 10^3 \times 1,4 \cdot 10^{-5}}{3 \times 10^{-3} \times 1,3 \cdot 10^{-2}} = \frac{2,8}{3,9} \times 10^3 \approx \left( \frac{2,6}{3,9} + \frac{0,2}{3,9} \right) \times 10^3 \approx \left( \frac{2}{3} + 0,05 \right) \times 10^3 \approx 700$$

Ici, l'écoulement vérifie encore  $\text{Re} < 2000$ , mais le nombre de Reynolds se rapproche de la valeur critique. L'écoulement est encore probablement laminaire (lignes de courant régulières), mais pas « rampant », c'est-à-dire qu'il n'est plus dominé par la viscosité. La loi de Poiseuille n'y est manifestement pas valable compte tenu de l'allure du profil de vitesse.

### III. Application à l'étude d'ondes acoustiques

#### III.A. Onde acoustique guidée

**Q17** On introduit les perturbations  $p_1(x, t)$ ,  $\mu_1(x, t)$  et  $\vec{v}_1(x, t) = v_1(x, t)\hat{u}_x$  de la pression, de la masse volumique ainsi que la vitesse locale dus à l'onde acoustique. L'approximation acoustique consiste à supposer

$$\begin{cases} |p_1(x, t)| \ll P_0 \\ |\mu_1(x, t)| \ll \mu_0 \\ \|\vec{v}_1(x, t)\| \ll c \end{cases}$$

et à négliger tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 dans les équations de couplage liant ces 3 grandeurs (acoustique linéaire).

Les trois équations de couplage linéarisées s'écrivent :

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1 \end{cases}$$

On en déduit l'équation de propagation de la surpression acoustique :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

**Q18** La célérité du son est donnée par  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$ . Or, pour un gaz parfait en évolution isentropique, la loi de Laplace donne :  $P \mu^{-\gamma} = \text{constante}$ . En différentiant logarithmiquement la loi de Laplace, on obtient :  $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = \frac{p_1}{P_0} - \gamma \frac{\mu_1}{\mu_0} = 0$ . On en déduit :

$$\chi_s = \frac{\mu_1}{\mu_0 p_1} = \frac{1}{\gamma P_0}$$

On en déduit :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}$$

Numériquement, on trouve :

$$c = \sqrt{\frac{1,4 \times 10^5}{1,2}} \approx 100\sqrt{12} \approx 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**Q19** Pour une OPPM variant en  $\exp i(\omega t - kx)$ , l'équation  $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$  donne, en notation complexe :  $i\omega \mu_0 \underline{v_1} = ik \underline{p_1}$ . On en déduit :

$$\frac{\underline{p_1}}{\underline{v_1}} = \mu_0 \frac{\omega}{k}$$

Or, la relation de dispersion d'une OPPM s'obtient grâce à l'équation de propagation :

$$\omega^2 = c^2 k^2$$

soit  $\omega = ck$  pour une OPPM se propageant vers les  $x$  croissants. On en déduit l'impédance acoustique :

$$Z_a = \frac{\underline{p_1}}{\underline{v_1}} = \frac{p_1}{v_1} = \mu_0 c$$

Le vecteur de Poynting acoustique moyen est donné par :

$$\vec{\pi} = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \underline{p_1} \overline{\underline{v_1}}^* \right) = \frac{Z_a v_m^2}{2} \hat{u}_x$$

L'intensité acoustique est définie par :

$$I_{\text{dB}} = 10 \log \left( \frac{\|\vec{\pi}\|}{I_0} \right) = 10 \log \left( \frac{Z_a v_m^2}{2I_0} \right)$$

On en déduit :

$$v_m = \sqrt{\frac{2I_0}{Z_a} 10^{(I_{\text{dB}}/10)}}$$

Pour  $I_{\text{dB}} = 120 \text{ dB}$ , on obtient :

$$v_m = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-12}}{1,2 \times 340}} 10^{12} = \sqrt{\frac{1}{0,6 \times 340}} \approx \frac{1}{10\sqrt{2}} \approx 7 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le vélocimètre à deux lasers permettait de mesurer des vitesses allant jusqu'à  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . De plus, l'énoncé évoquait à plusieurs reprises des vitesses de l'ordre de  $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  :  $v_m$  est donc parfaitement mesurable, *a priori*.

- Q20** Les conditions aux limites imposées en  $z = 0$  et  $z = a$  ne permettent plus de chercher des solutions en OPPM. Toutefois, on cherche ici des solutions sinusoïdales se propageant selon  $\hat{u}_x$  : par conséquent,  $p_1(M, t) \propto \cos(\omega t - kx + \phi)$ . Pour tenir compte des conditions aux limites, il faut donc introduire un facteur dépendant de  $z$ . On écrit donc :

$$p_1(M, t) = p(z) \cos(\omega t - kx + \phi)$$

Cette onde est sinusoïdale (dépendance temporelle sinusoïdale), progressive selon  $\hat{u}_x$  (car  $k > 0$ ), mais elle n'est pas plane à cause du facteur  $p(z)$ .

- Q21** On injecte cette solution dans l'équation de propagation  $\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} \right)$  :

$$-\omega^2 p(z) = c^2 p''(z) - c^2 k^2 p(z)$$

soit :

$$p''(z) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) p(z) = 0$$

Les conditions aux limites imposées  $z = 0$  et  $z = a$  ne peuvent être vérifiées que si la fonction  $p(z)$  est sinusoïdale : cela implique  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \kappa^2 > 0$ . Par conséquent :

$$p''(z) + \kappa^2 p(z) = 0$$

Les solutions de cette équation s'écrivent :

$$p(z) = A \cos(\kappa z) + B \sin(\kappa z)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} B = 0 \\ -\kappa A \sin(\kappa a) = 0 \end{cases}$$

On en déduit :  $\kappa a = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, les solutions compatibles avec les conditions aux limites s'écrivent :

$$p_n(z) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Le mode  $n = 0$  correspond à  $p_0(z) = A_0$  : l'onde de pression est alors une onde plane progressive harmonique de pulsation  $\omega = ck$ . **Fondamental ? Question mal posée.**

- Q22** Le mode propre numéro  $n$  s'écrit donc :

$$p_{1n}(M, t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos(\omega t - kx + \phi_n)$$

Cherchons-en la relation de dispersion en l'injectant dans l'équation de propagation :

$$-\omega^2 = -c^2 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - c^2 k^2$$

On obtient donc :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c,n}^2}{c^2}$$

où  $\omega_{c,n} = \frac{n\pi c}{a}$ .

L'onde ne peut se propager que si  $k$  est réel, c'est-à-dire si  $\omega > \omega_{c,n}$ . On remarque que pour  $n = 0$ , il n'y a pas de pulsation de coupure ( $\omega_{c,0} = 0$ ) : toute onde plane ( $n = 0$ ) peut donc se propager, quelle que soit sa fréquence.

Supposons donc que l'on considère le mode  $n$  et que  $\omega > \omega_{c,n}$ . Dans ce cas, on peut écrire :

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}}$$

La vitesse de phase de ce mode est donnée par :

$$v_{\phi,n}(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}}}$$

Différentions la relation de dispersion quadratique :

$$2k dk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$$

On en déduit :

$$v_{g,n}(\omega) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_{\phi}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n}^2}{\omega^2}}$$

On constate que la vitesse de phase est supérieure à  $c$ , tandis que la vitesse de groupe est inférieure à  $c$ .

D'autre part, quand  $\omega \rightarrow \omega_{c,n}^+$ ,  $v_{\phi,n}(\omega) \rightarrow +\infty$  tandis que  $v_{g,n}(\omega) \rightarrow 0$ , les deux vitesses dépendent fortement de  $\omega$  : dans ce domaine de fréquence, la dispersion est très forte.

Enfin,  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $v_{g,n}(\omega) \approx v_{\phi,n}(\omega) \approx c$  : la dispersion disparaît à très haute fréquence.

**Q23** Le mode propre fondamental est le seul à pouvoir se propager si  $\omega < \omega_{c,1}$ , c'est-à-dire si  $\frac{2\pi c}{\lambda} < \frac{\pi c}{a}$ . On en déduit la condition de propagation monomode :

$$a < \frac{\lambda}{2}$$

Numériquement,  $\frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} \approx \frac{340}{2 \times 40 \cdot 10^3} \approx 4,25$  mm. Par conséquent,  $a$  doit être inférieur à 4,2 mm pour avoir une propagation monomode (mode fondamental seul).

**Q24** Les modes  $(n, m)$  de fréquence  $f = 40$  kHz pouvant se propager doivent vérifier la condition  $2\pi f > \mu_{nm} \frac{c}{a}$ , c'est-à-dire :

$$\mu_{nm} < \frac{2\pi f a}{c}$$

Numériquement,  $\frac{2\pi f a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda} \approx \frac{3 \times 11 \cdot 10^{-3}}{8,5 \cdot 10^{-3}} = \frac{33}{8,5} \approx 3,9$ .

On en déduit que les modes (0,1), (1,1), (2,1) et (0,2) peuvent se propager le long du guide acoustique circulaire.

**Q25** La vitesse de groupe d'un paquet d'onde de fréquence fixée ( $f = 40$  kHz) dépend du mode considéré :

$$v_{g,nm}(\omega) = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,nm}^2}{\omega^2}} = c \sqrt{1 - \left(\mu_{nm} \frac{c}{2\pi f a}\right)^2}$$

Plus  $\mu_{nm}$  est grand, plus la vitesse de groupe du mode ( $n, m$ ) est petite.

Sur les 4 modes (0,1), (1,1), (2,1) et (0,2) pouvant se propager, les deux modes ayant les vitesses de groupes les plus proches sont ceux dont les valeurs de  $\mu_{nm}$  sont les plus proches : il s'agit des modes (2,1) et (0,2) pour lesquels  $\mu_{21} = 3,1$  et  $\mu_{02} = 3,8$ . Ces deux modes sont séparés en sortie si la différence de leurs temps de propagation est supérieure à la durée d'une salve. Il faut donc que :

$$\frac{L}{v_{g,02}} - \frac{L}{v_{g,21}} > \frac{4}{f}$$

En supposant que  $\left(\mu_{nm} \frac{c}{2\pi f a}\right)^2 \ll 1$ , on peut écrire :

$$\frac{1}{v_{g,02}} - \frac{1}{v_{g,21}} \approx \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \left(\mu_{02} \frac{c}{2\pi f a}\right)^2 - \left( 1 + \frac{1}{2} \left(\mu_{21} \frac{c}{2\pi f a}\right)^2 \right) \right) = \frac{1}{2c} \left(\frac{c}{2\pi f a}\right)^2 (\mu_{02}^2 - \mu_{21}^2)$$

On en déduit la condition :

$$L > \frac{8c}{f} \left(\frac{2\pi f a}{c}\right)^2 \frac{1}{(\mu_{02}^2 - \mu_{21}^2)}$$

soit :

$$L > \frac{32\pi^2}{(\mu_{02} - \mu_{21})(\mu_{02} + \mu_{21})} \frac{a^2 f}{c}$$

Numériquement, on trouve :

$$\frac{32\pi^2}{(\mu_{02} - \mu_{21})(\mu_{02} + \mu_{21})} \frac{a^2 f}{c} \approx \frac{32 \times 10 \times 121 \cdot 10^{-6} \times 40 \cdot 10^3}{0,7 \times 6,9 \times 340} \approx \frac{155 \times 10}{5 \times 340} = \frac{155}{170} = 1 - \frac{15}{170} = 1 - \frac{3}{34} \approx 0,9 \text{ m}$$

La longueur du tube doit donc être supérieure à 90 cm.

### III.B. Production de l'onde acoustique

**Q26** On applique la loi des nœuds à l'entrée inverseuse de l'ALI :

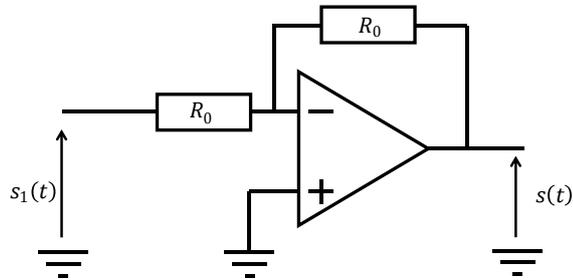
$$\frac{e_1 - V^-}{R_1} + \frac{e_2 - V^-}{R_2} = \frac{V^- - s_1}{R}$$

L'ALI, supposé idéal, est bouclé sur son entrée inverseuse (rétroaction négative pure) donc il est stable et fonctionne en régime linéaire. Par conséquent :  $V^- = 0$ .

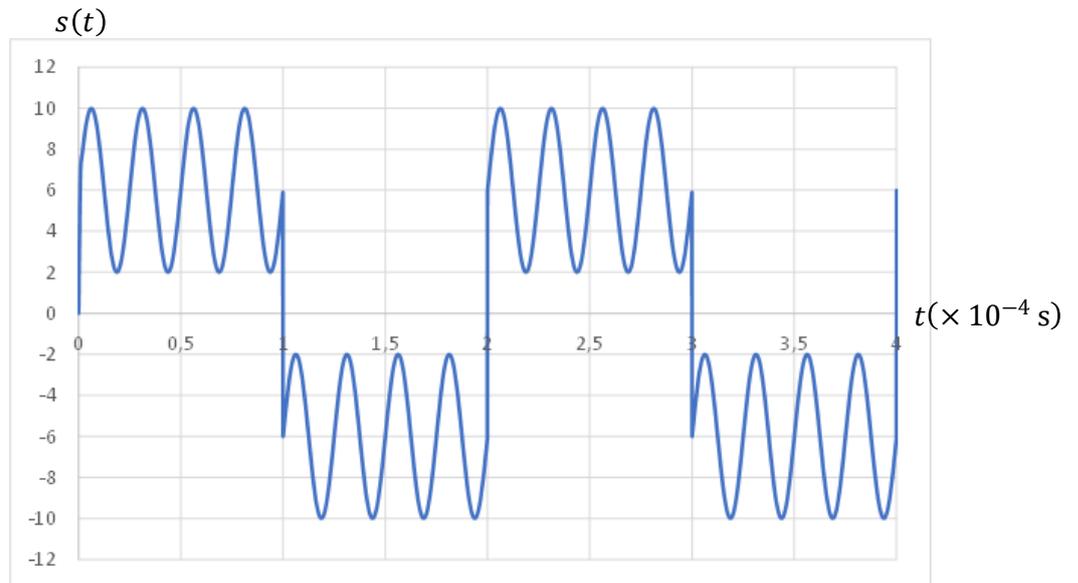
On en déduit :

$$s_1 = -R \left( \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} \right)$$

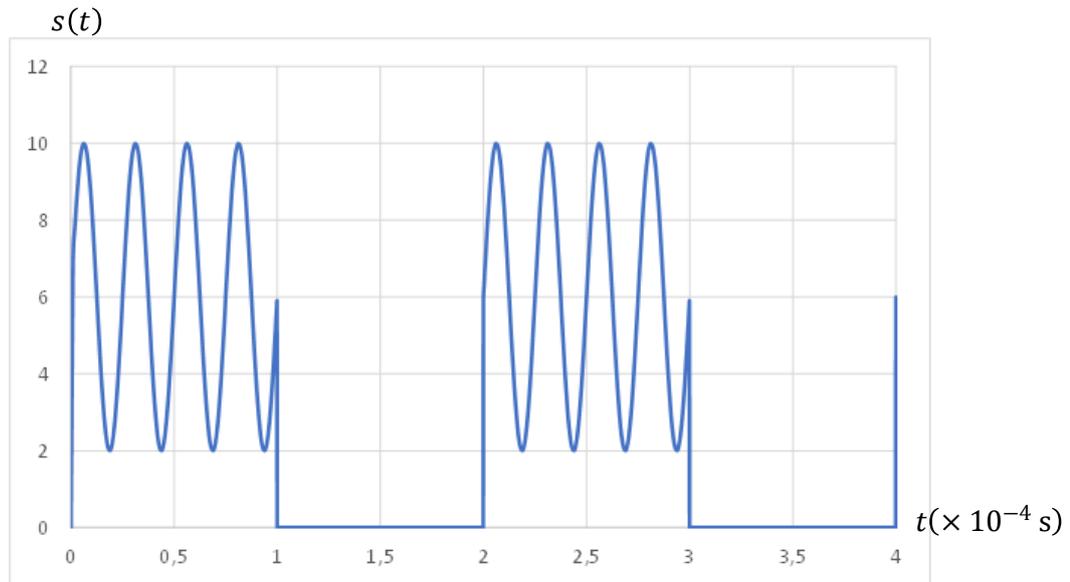
Pour obtenir  $s = -s_1$ , il suffit d'insérer entre la sortie du montage proposé et la sortie où l'on récupère  $s$  un amplificateur inverseur de gain  $-1$ , mettant œuvre en ALI et deux résistances  $R_0$  identiques :



**Q27** En choisissant  $R = R_1 = R_2$ , on obtient :  $s = e_1 + e_2$ . Par conséquent :



**Q28** Si l'ALI est alimenté en  $+15\text{ V}$  et  $0\text{ V}$ , la tension de sortie est nécessairement comprise entre  $0\text{ V}$  (tension de saturation basse) et  $+15\text{ V}$  (tension de saturation haute). Par conséquent, les portions négatives du signal précédent sont « écrêtées » à  $0\text{ V}$  :



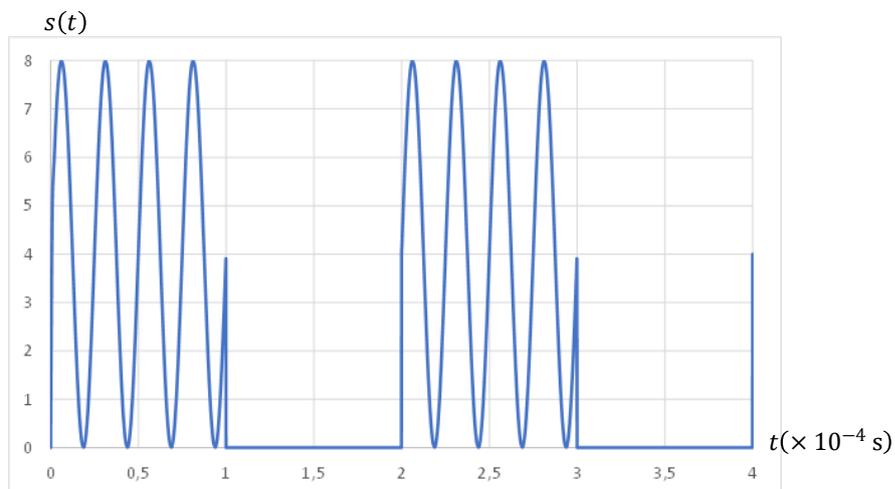
On obtient effectivement des salves de fréquence 40 kHz de durée 100  $\mu\text{s}$ , émises toutes les 200  $\mu\text{s}$ , de valeur moyenne 6 V et d'amplitude 4 V.

**Q29** L'ALI LM 741 ayant une vitesse de balayage modeste ( $\sigma = 0,5 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ ), les discontinuités (d'amplitude  $\Delta s = 6 \text{ V}$ ) imposées au signal aux instants  $t_n = n \times 100 \mu\text{s}$  ne seront pas bien rendues. En effet, le temps  $\Delta t$  de montée ou de descente du LM 741 vaudra alors :

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{\sigma} = \frac{6}{0,5} = 12 \mu\text{s}$$

Cette durée n'est pas négligeable par rapport à 100  $\mu\text{s}$ .

Pour minimiser ce défaut sans changer d'ALI, il faut diminuer la valeur des discontinuités de tension. Pour ce faire, on peut diminuer l'amplitude du créneau et choisir la plus petite valeur compatible avec le but recherché, à savoir : 4 V d'amplitude (ou 8 V crête à crête). Cela donne :



La durée de commutation est ramenée à  $\Delta t = \frac{\Delta s}{\sigma} = \frac{4}{0,5} = 8 \mu\text{s}$ . Si l'on veut encore gagner en rapidité, il faut alors également diminuer l'amplitude de la sinusoïde (tout en conservant des amplitudes crête à crête égales pour les deux signaux).

### III.C. Ensemencement

**Q30** On reconnaît la loi de force de Stokes, donnant la traînée subie par une sphère à condition que le nombre de Reynolds soit très inférieur à 1. La vitesse relative  $v_p - v_f$  vaut au plus l'amplitude  $v_m \approx 7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  calculée à la question Q19. Par conséquent :

$$\text{Re}_{\text{max}} = \frac{\mu_f d_p v_m}{\eta_f} = \frac{1,2 \times 10^{-6} \times 7 \cdot 10^{-2}}{1,8 \cdot 10^{-5}} = \frac{84}{18} \times 10^{-3} = \frac{14}{3} \times 10^{-3} \approx 5 \cdot 10^{-3}$$

On a donc bien  $\text{Re} \ll 1$  (écoulement externe), donc la traînée est visqueuse et suit la loi de Stokes.

**Q31** Ecrivons l'équation du mouvement de la particule projetée sur l'axe de l'écoulement, en négligeant le poids, la poussée d'Archimède et la force exercée par les faisceaux Laser, conformément aux indications de l'énoncé :

$$m_p \frac{dv_p}{dt} = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d_p}{2} \right)^3 \mu_p \frac{dv_p}{dt} = -3\pi\eta_f d_p (v_p - v_f)$$

soit :

$$\left( \frac{\mu_p d_p^2}{18 \eta_f} \right) \frac{dv_p}{dt} + v_p = v_f$$

En régime sinusoïdal forcé, on en déduit :

$$\frac{v_p}{v_f} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + i \frac{f}{f_0}}$$

où :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{18 \eta_f}{\mu_p d_p^2} = \frac{9\eta_f}{\pi \mu_p d_p^2}$$

Numériquement, on trouve :

$$f_0 \approx \frac{9 \times 1,8 \cdot 10^{-5}}{3 \times 10^3 \times 10^{-12}} \approx 54 \text{ kHz}$$

**Q32** Pour mesurer la vitesse du fluide, il faut bien sûr que  $v_p \approx v_f$ . Il faut donc que  $f \ll f_0$ .

A la fréquence  $f = 40 \text{ kHz}$ ,  $\frac{f}{f_0} = \frac{40}{54} = \frac{20}{27} = 1 - \frac{7}{27} \approx 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ . Par conséquent,

$$\left| \frac{v_p}{v_f} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{f}{f_0} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Assimiler la vitesse de la particule à la vitesse du fluide conduit donc à une erreur relative de 20 %, ce qui n'est pas acceptable.

Pour commettre une erreur inférieure à 1 %, il faut que  $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} > 0,99$  soit :

$$1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 < \frac{100^2}{99^2}$$

On peut reformuler ainsi ce résultat :  $\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 < \frac{100^2 - 99^2}{99^2}$ .

Or,  $\frac{100^2 - 99^2}{99^2} = \frac{(100-99)(100+99)}{99^2} = 0,01 \times \frac{199}{99^2} \approx 0,01 \times \frac{200}{100^2} = 2 \cdot 10^{-4}$ . On en déduit :

$$\sqrt{\frac{100^2 - 99^2}{99^2}} \approx 10^{-2} \sqrt{2} \approx 1,4 \cdot 10^{-2}$$

Par conséquent, il faut :

$$f < 1,4 \cdot 10^{-2} \times f_0$$

soit :

$$f < 760 \text{ Hz}$$

Ces particules ne sont donc adaptées qu'à l'étude des infrasons et des sons audibles graves, mais absolument pas à l'étude des sons audibles aigus, et encore moins à l'étude des ultrasons. Pour étudier des ondes acoustiques de fréquence plus élevée, il faut augmenter la valeur de  $f_0$  et donc utiliser des particules plus petites (mais cela poserait la question de l'efficacité de la rétrodiffusion) et surtout moins denses.

# Mines-Ponts 2022 PC Physique 1

Corrigé propose par Jean-Marie Biansan.  
 Pour toute remarque: jeanmarie.biansan@free.fr

1) - Loi de gravitation de Newton: 
$$\vec{F}_B = -\frac{\mathcal{G} M^2}{(2r)^2} \vec{e}_r = -\vec{F}_A$$

Et ce en supposant que  $\vec{F}_B$  désigne la force subie par B et pas celle exercée par B: notations ambiguës.

- Travail élémentaire des forces de gravitation:

$$\delta W = \vec{F}_B d\vec{B} + \vec{F}_A d\vec{A} = \vec{F}_B d\vec{AB} = -\frac{\mathcal{G} M^2}{(2r)^2} d(2r) = -dE_P \quad \text{avec} \quad E_P = -\frac{\mathcal{G} M^2}{(2r)}$$

2) - On applique le théorème de la quantité de mouvement à l'étoile B, en mouvement circulaire uniforme:

$$-M r \dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G} M^2}{(2r)^2} \quad \text{d'où} \quad \dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G} M}{4r^3} = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 \quad \text{et donc} \quad T_1 = \sqrt{\frac{16\pi^2 r^3}{\mathcal{G} M}}$$

- Application numérique:  $2r = 1 \text{ UA}$ ,  $M = M_\odot$ . Pour la Terre en orbite autour du soleil, la 3ème loi de

Kepler s'écrit  $\frac{(1 \text{ UA})^3}{1 \text{ an}^2} = \frac{\mathcal{G} M_\odot}{4\pi^2}$ . Donc  $\frac{T_1}{1 \text{ an}} = \sqrt{\frac{16\pi^2 (1 \text{ UA})^3}{\mathcal{G} M_\odot 8 (1 \text{ an})^2}} = \sqrt{4/8} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$ , soit

$$T_1 \approx 0,71 \text{ an}$$

3) Énergie mécanique:  $E = \frac{1}{2} M (r \dot{\theta})^2 + E_P = M r^2 \frac{\mathcal{G} M}{4r^3} - \frac{\mathcal{G} M^2}{(2r)}$ , soit  $E = -\frac{\mathcal{G} M^2}{4r}$ .

L'énergie mécanique est négative, état lié.

4) Force subie par B: 
$$\vec{F}_B = -\frac{\mathcal{G} m_A m_B}{R^3} \vec{R} = -\vec{F}_A$$
 indépendante du référentiel.

5) Le théorème de la résultante cinétique appliqué au système des deux étoiles, isolé, dans le référentiel galiléen  $(\Omega_{xyz})$  s'écrit:  $(m_A + m_B) \frac{d^2 \vec{\Omega G}}{dt^2} = \vec{0}$ : G est donc, dans  $(\Omega_{xyz})$ , en mouvement rectiligne uniforme. Le référentiel  $(G_{xyz})$  est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à  $(\Omega_{xyz})$  galiléen, il est donc lui-même galiléen.

6) - Par définition du barycentre G, on a  $m_A \vec{GA} + m_B \vec{GB} = \vec{0}$ . On en déduit immédiatement que

$$\vec{GB} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{R} \quad \text{et que} \quad \vec{GA} = -\frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{R}$$

- Le théorème de la quantité de mouvement appliqué successivement aux étoiles A et B dans  $(G_{xyz})$  galiléen donne:

$$\begin{cases} m_A \frac{d^2 \vec{GA}}{dt^2} = \vec{F}_A \\ m_B \frac{d^2 \vec{GB}}{dt^2} = \vec{F}_B \end{cases} . \text{ Donc } \frac{d^2}{dt^2}(\vec{GB} - \vec{GA}) = \vec{F}_B \left( \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_A} \right) , \text{ d'où } \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = -\mathcal{G} (m_A + m_B) \frac{\vec{R}}{R^3} , \text{ qui est}$$

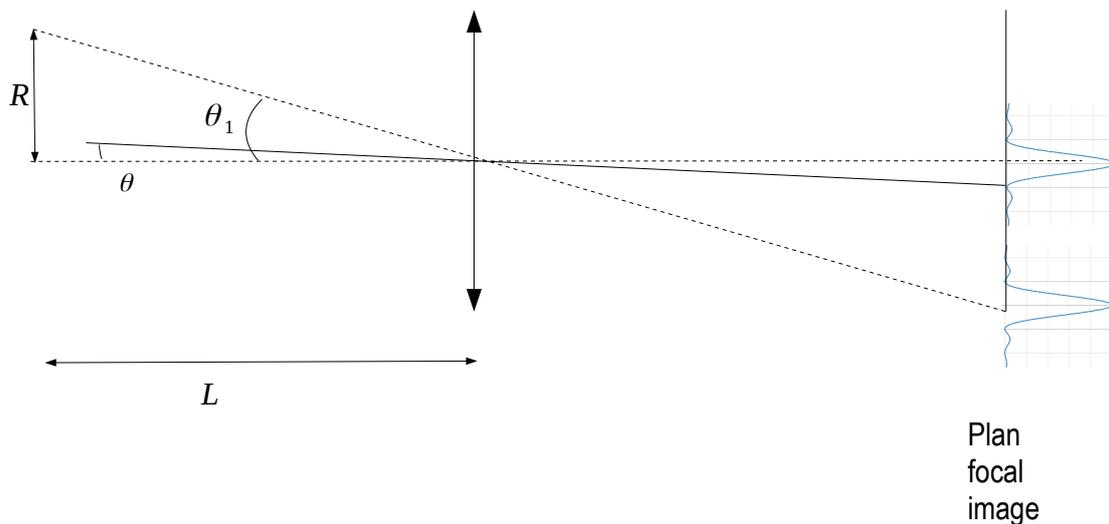
bien de la forme  $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = -K \frac{\vec{R}}{R^n}$  avec  $n=3$  et  $K = \mathcal{G} (m_A + m_B)$  .

7) Soit  $P$  le point tel que  $\vec{GP} = \vec{R}$  . Supposons que  $P$  est en mouvement circulaire uniforme dans  $(Gxyz)$  . Son accélération vaut alors  $-R\dot{\theta}^2 \vec{e}_R$  , et la relation de la question précédente donne alors

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G} (m_A + m_B)}{R^3} , \text{ d'où l'on tire la période } T_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{\mathcal{G} (m_A + m_B)}} .$$

Question peu claire: l'énoncé suppose  $R$  variable, donc le cas elliptique: or la démonstration de la 3ème loi n'est pas au programme dans le cas elliptique. Et pour justifier le caractère périodique, faut-il introduire le mobile réduit (pas au programme) ?

8) Pour que les deux images soient séparées, il faut que la distance entre les centres des tâches de diffraction des deux étoiles soit plus grande que la demi-largeur de chacune des taches (critère de Rayleigh):



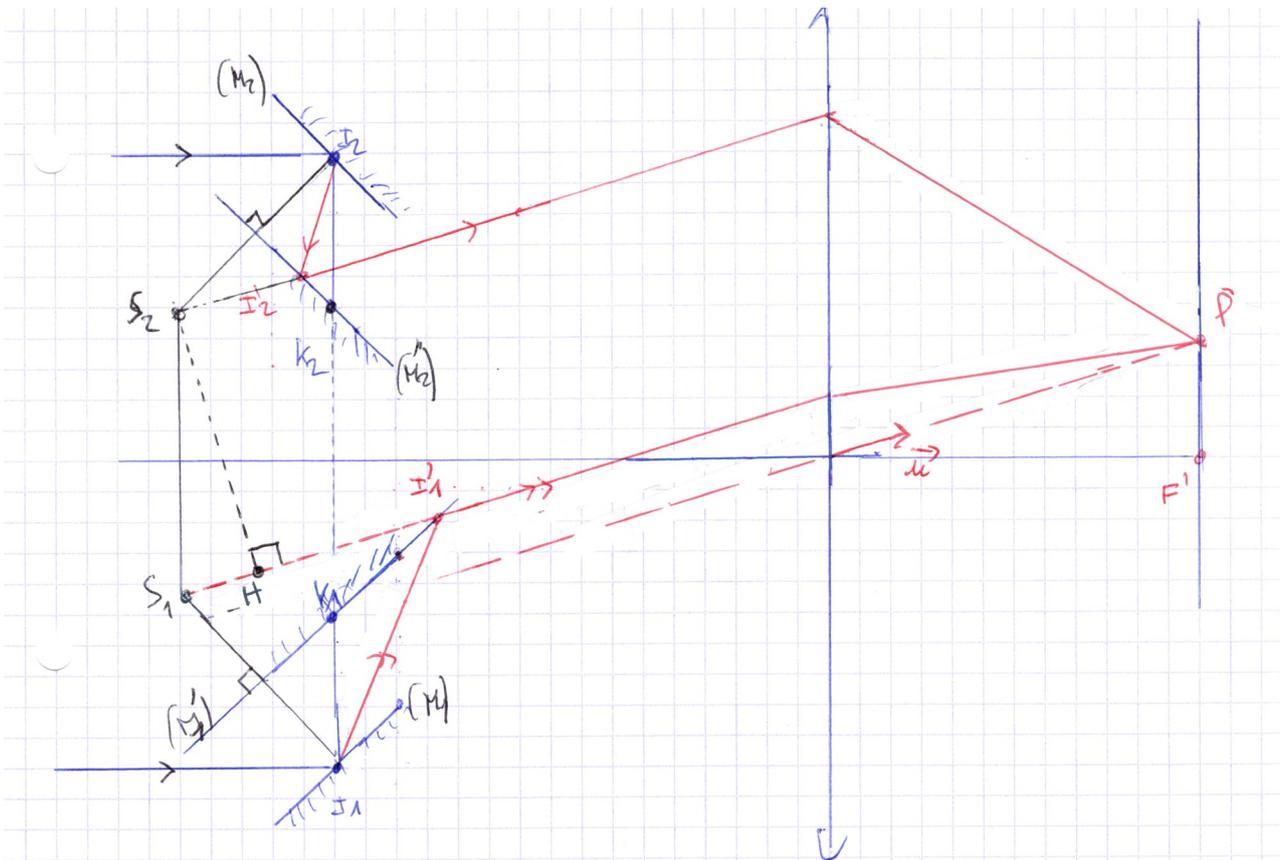
Si on note  $\theta_1$  la distance angulaire entre les deux étoiles, il faut donc que  $\sin \theta_1 > \sin \theta \approx \frac{\lambda_0}{d}$  . Or en

supposant les angles petits,  $\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{R}{L}$  . Il faut donc que  $\frac{R}{L} > \frac{\lambda_0}{d}$  , soit  $L < L_{max} = \frac{dR}{\lambda_0}$  .

A.N.:  $L_{max} = 143 AL$  .

Critère de Rayleigh pas au programme...

9) - Théorème de Malus: après un nombre quelconque de réflexions et/ou de réfractions (en nombre et nature identiques pour tous les rayons), les surface d'onde issues d'une source ponctuelle sont perpendiculaires aux rayons lumineux.



$S_2$  est l'image de  $I_2$  par réflexion sur  $(M'_2)$ ,  $S_1$  est l'image de  $I_1$  par réflexion sur  $(M'_1)$

Construction effectuée dans l'ordre suivant:

- on choisit arbitrairement  $I'_2$ , point de réflexion sur  $(M'_2)$ ; la direction  $S_2 I'_2$  donne alors la direction des rayons avant traversée de la lentille
- le rayon parallèle à  $(S_2 I'_2)$  (de vecteur unitaire  $\vec{u}$ ) et passant par le centre optique de la lentille, non dévié, donne le point P
- le rayon parallèle à  $(S_2 I'_2)$  et passant par  $S_1$  donne le point  $I'_1$

On a  $I_1 I'_1 = I_1 S_1$  et  $I_2 I'_2 = I_2 S_2$ , ainsi que  $(AI_1) = (AI_2)$ , donc  $\delta_A = (I_1 I'_1 P) - (I_2 I'_2 P) = (S_1 I'_1 P) - (S_2 I'_2 P)$ .

Or d'après le théorème de Malus "à rebours", les rayons  $S_2 I'_2$  et  $S_1 I'_1$  étant parallèles entre eux,  $S_2$  et  $H$  appartiennent à un plan d'onde issu de  $P$ :  $(S_2 P) = (HP)$ .

Donc:  $\delta_A = S_1 H = \vec{S_1 S_2} \cdot \vec{u} = a \vec{e}_x \cdot \frac{\vec{O_L P}}{O_L P}$  où  $O_L$  est le centre optique de la lentille. Dans l'approximation

de Gauss,  $O_L P \approx f'$ , donc finalement  $\delta_A = \frac{a x}{f'}$ .

- Question: on tient compte de la diffraction par  $(M_1)$  et  $(M_2)$  mais pourquoi ne tient-on pas compte de celle par  $(M'_1)$  et  $(M'_2)$  ?

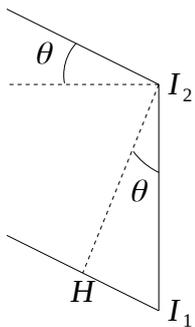
- La frange brillante d'ordre  $p$  a une abscisse  $x_p$  telle que  $\delta_A = p \lambda_0 = \frac{a x_p}{f'}$ , d'où  $x_p = \frac{p \lambda_0 f'}{a}$ .

L'interfrange vaut donc  $i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0 f'}{a}$ . A.N.:  $i = 7,3 \mu m$ : non visible à l'œil nu, il faut probablement une loupe pour l'observer.

10) Formule de Fresnel: 
$$I_A(P) = 2 I_{0A} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{f'} \right) \right)$$
.

Résultat discutable: il ne tient pas compte du caractère non isotrope de la diffraction par les miroirs. De plus,  $I_{0A}$  est l'intensité "issue de A et parvenant sur un des miroirs", mais probablement pas celle qui arriverait en F' en occultant une des deux voies de l'interféromètre.

11) - Les deux étoiles sont deux sources distinctes, elles ne sont pas cohérentes entre elles: il faudra donc sommer l'intensité issue de A et celle issue de B.



D'après le théorème de Malus,  $(BI_2) = (BH)$ . On a donc  $(BI_1) - (BI_2) = H I_1 = I_1 I_2 \sin \theta = b \sin \theta$ .

Donc, 
$$\delta_B = \delta_A + b \sin \theta$$
.

12) On somme les intensités, chacune donnée par la formule de Fresnel:

$$I(P) = 2 I_{0A} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_A \right) \right) + 2 I_{0B} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} (\delta_A + b \sin \theta) \right) \right)$$

Avec la formule de l'énoncé, elle se met sous la forme:

$$I(P) = 2(I_{0A} + I_{0B}) + a \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{ax}{f'} + \frac{b}{2} \sin \theta \right) + \varphi \right) \text{ avec } a = 2(I_{0A} + I_{0B}) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \left( \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda_0} \right)}$$

$$m = 2 \frac{\sqrt{I_{0A} I_{0B}}}{I_{0A} + I_{0B}}$$

On a donc encore:  $I(P) = 2(I_{0A} + I_{0B}) \left( 1 + \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \left( \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda_0} \right)} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{ax}{f'} + \frac{b}{2} \sin \theta \right) + \varphi \right) \right)$ , qui est

bien de la forme  $I(P) = K \left( 1 + \cos \left( 2\pi \frac{x - x_0}{\Delta x} \right) V(\theta) \right)$  avec  $K = 2(I_{0A} + I_{0B})$ ,  $\Delta x = \frac{\lambda_0 f'}{a}$  et

$$V(\theta) = \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \left( \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda_0} \right)}$$

13) -  $x_0$  est l'abscisse de la frange centrale,  $\Delta x$  est l'interfrange.  $V(\theta)$  est le facteur de visibilité.

- On part d'une valeur de  $b$  suffisamment faible pour que  $V(\theta) \approx 1$ : les franges sont bien contrastées.

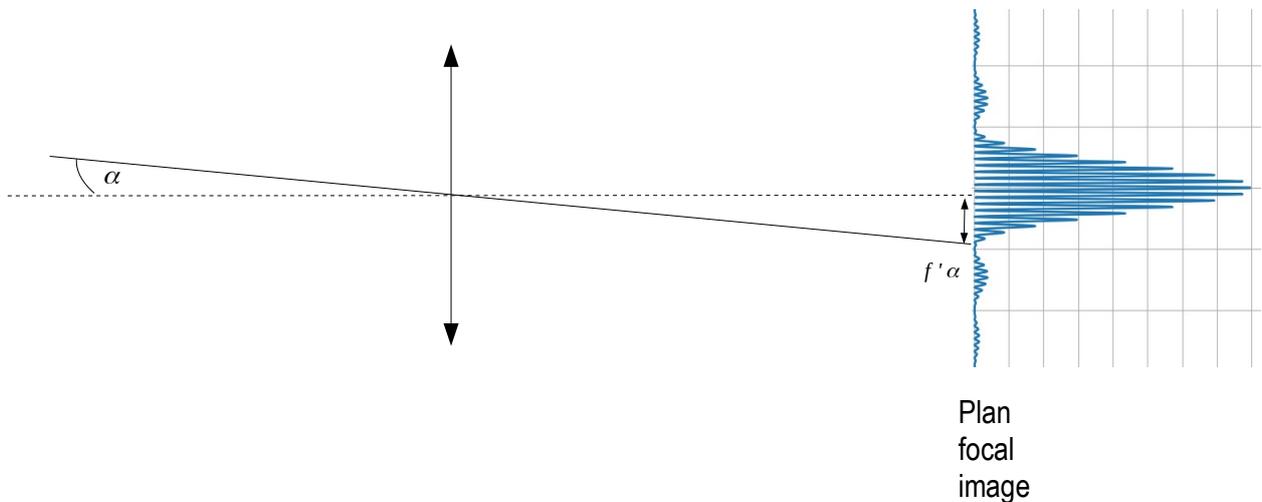
- On augmente progressivement la valeur de  $b$ ,  $V(\theta)$  diminue. Le contraste passe par un minimum pour

$$\sin^2 \left( \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda_0} \right) = 0, \text{ donc pour } \sin \theta = \frac{\lambda_0}{b}$$

- S'il s'agit d'un vrai système binaire, l'angle  $\theta$  varie au cours du temps. Mais si la période de rotation est très longue, il faut un suivi sur une durée équivalente pour s'en rendre compte...

14) S'agit-il d'une limitation par la diffraction (franges sous le pic central de diffraction)? Ou par échappement géométrique des rayons diffractés par  $(M_i)$  sur les bords de  $(M'_i)$ ? Et dans ce cas, ne faut-il pas la valeur de  $b - a$  pour répondre?

Supposons que le facteur limitant soit la diffraction, et que donc on veut avoir 10 franges sur la demi-largeur du pic de diffraction, dont la valeur angulaire est  $\sin \alpha \approx \frac{\lambda_0}{\ell}$  :



Il faut donc qu'on ait  $\alpha f' > 10 \lambda$ , soit  $\frac{\lambda_0 f'}{\ell} > 10 \frac{\lambda_0 f'}{a}$ , donc  $\ell < a/10 = 25 \text{ cm}$ .

15) - L'électron subit la force centrale  $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 OM^3} \vec{OM}$ . D'après le théorème du moment cinétique (en  $O$  fixe),  $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ , le moment cinétique  $\vec{\sigma}$  est donc constant.

Le plan contenant  $O$  et orthogonal à  $\vec{\sigma}$  est donc un plan fixe. Or  $\vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v}$  est orthogonal à la fois à  $\vec{OM}$  et à la vitesse  $\vec{v}$ , ces deux vecteurs sont donc dans le plan fixe suscité, le mouvement est plan.

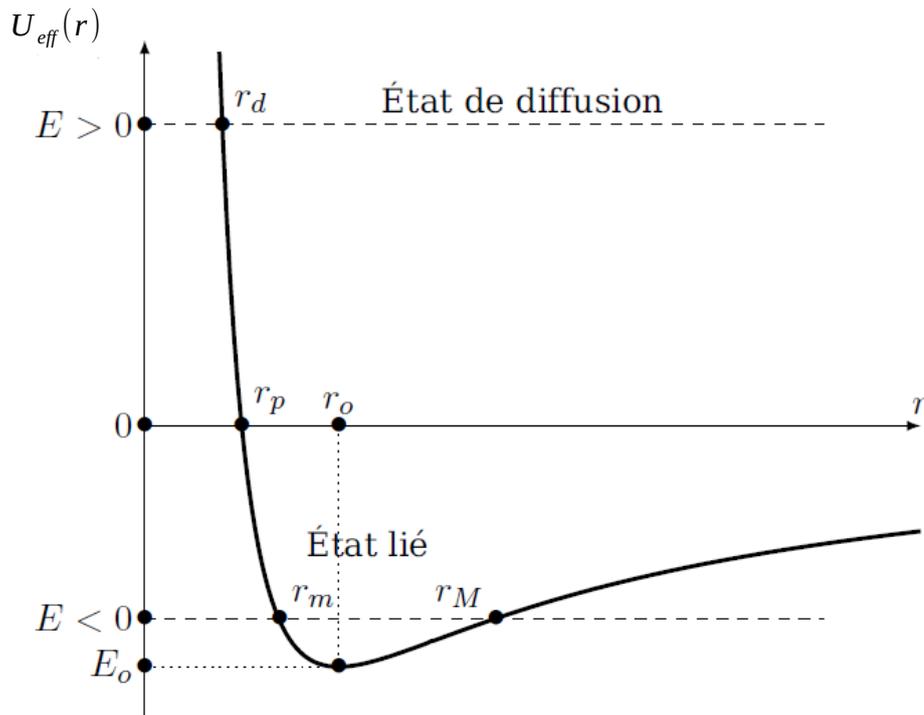
- On peut alors travailler en coordonnées polaires,  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ ,  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ , et donc  $\vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v} = m_e r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ . On a donc  $\sigma = m_e r^2 \dot{\theta}$ .

16) La force coulombienne dérive de  $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ . L'énergie cinétique vaut

$E_c = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2) = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{m_e r^2}$ . On a donc conservation de l'énergie mécanique

$E = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$  avec  $U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

17)



Lorsque  $U_{eff}(r)$  est minimale, une seule valeur de  $r$  est possible, la trajectoire est circulaire.

Le rayon de cette trajectoire s'obtient donc par :  $\left(\frac{dU_{eff}(r)}{dr}\right)_{r=r_0} = 0$ , ce qui donne  $r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\sigma^2}{m_e e^2}$ . On

reporte dans l'expression de l'énergie mécanique et on obtient  $E_0 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\sigma^2}$ . On omettra l'indice 0 dans la suite.

18) Le photon emporte la différence d'énergie entre les deux niveaux:

$$\Delta E = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{m_e e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \quad \text{d'où} \quad \lambda_0 = \frac{288\epsilon_0^2\hbar^3 c}{5m_e e^4}.$$

19)  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{r}{\hbar c}$ . Or  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  est une énergie.  $\hbar$  est un moment cinétique (règle de quantification de Bohr), donc  $\frac{\hbar}{r}$  est une quantité de mouvement, et  $\frac{\hbar c}{r}$  est donc une énergie. La constante de structure fine est donc sans dimension.

$$\alpha \approx 7,3 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{137}$$

20)  $E = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$ . On a donc bien  $E = E_0 + \kappa v^2 + \mu v^4$  avec

$E_0 = mc^2$  qui est l'énergie de masse,  $\kappa = \frac{m}{2}$  ( $\kappa v^2$  est l'énergie cinétique non relativiste) et

$$\mu = \frac{3}{8} \frac{m}{c^2}.$$

21) Question pas du tout guidée. Traitée hors des 3h et avec apport d'un collègue. Méthode approchée, à quel point...?

- D'après la question et la règle de quantification de Bohr  $\sigma = n\hbar$ , l'énergie du niveau n vaut, dans le cas non relativiste  $E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$ . En outre, l'orbite étant circulaire, le principe fondamental donne,

toujours dans le cas classique,  $m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2}$  et donc  $E_c = -\frac{1}{2} E_p$ , donc  $E = -E_c$ . Donc

finalement, on a dans le cas classique  $v^2 = \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} = \frac{e^4}{4\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$ .

- On injecte alors cette expression classique (qui est donc approchée dans le cas relativiste, mais à quel ordre ?) dans l'énergie relativiste développée à l'ordre 4:

$$\Delta E_{relat} = \kappa \Delta(v^2) + \mu \Delta(v^4) = \Delta E + \mu \left( \frac{e^4}{4\epsilon_0^2 \hbar^2} \right)^2 \Delta \left( \frac{1}{n^4} \right) = \Delta E + \mu \left( \frac{e^4}{4\epsilon_0^2 \hbar^2} \right)^2 \frac{65}{1296}$$

$$\text{Donc } \frac{\Delta E_{relat} - \Delta E}{\Delta E} = \frac{\frac{3}{8} \frac{m_e}{c^2} \left( \frac{e^4}{4\epsilon_0^2 \hbar^2} \right)^2 \frac{65}{1296}}{\frac{5}{36} \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}} = \frac{13}{12} \frac{e^4}{\epsilon_0^2 \hbar^2 c^2} = \frac{13}{3} \alpha^2 \sim \alpha^p \text{ avec } p=2$$

Elle est donc de l'ordre de  $10^{-4}$

22) - La face réfléchissante de (S) est la face 1.

- La compensatrice (C) permet d'avoir le même nombre de traversées de lame (ici 3) pour les deux rayons. En son absence, le rayon se réfléchissant sur ( $M_f$ ) effectuerait une traversée de lame, tandis que l'autre en effectuerait 2: il y aurait une différence de marche supplémentaire, fonction en plus de la longueur d'onde si le verre est dispersif.

23) Michelson réglé en lame d'air, avec source étendue: on obtient des franges d'égale inclinaison, localisées à l'infini, et généralement ramenées à distance finie en plaçant l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente.

24) On se place donc au centre des anneaux. La différence de marche vaut donc simplement  $\delta = 2e$  où e est l'épaisseur de la lame d'air équivalente, qui vaut donc ici  $v \cdot t$ . On a donc  $\delta(t) = 2 \cdot v \cdot t$ .

La formule de Fresnel donne alors  $I(t) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} 2 \cdot v \cdot t \right) \right)$

25) - Les deux raies sont incohérentes entre elles, on somme les intensités:

$$I(t) = 2I_1 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_1} 2 \cdot v \cdot t \right) \right) + 2I_2 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_2} 2 \cdot v \cdot t \right) \right)$$

On obtient donc avec la formule de l'énoncé:  $I(t) = 2(I_1 + I_2) + a \cos \left( 2\pi v t \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) + \varphi \right)$  avec

$$a = 2(I_1 + I_2) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \left( 2\pi v t \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right)} \text{ et } m = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \text{ . Soit encore}$$

$$I(t) = 2(I_1 + I_2) \left( 1 + C(t) \cos \left( 2\pi v t \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) + \varphi \right) \right) \text{ avec } C(t) = \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \left( 2\pi v t \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right)}$$

$$\text{Or } \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} \text{ . Donc: } C(t) = \sqrt{1 - \frac{4I_1 I_2}{(I_1 + I_2)^2} \sin^2 \left( 2\pi v t \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0^2} \right)}$$

- On a donc  $C_{max}=1$  et  $C_{min}=\sqrt{1-\frac{4I_1I_2}{(I_1+I_2)^2}}=\frac{I_1-I_2}{I_1+I_2}$ .

26) On a donc  $C_{min}=0,15=\frac{1-I_2/I_1}{1+I_2/I_1}$ , d'où  $\frac{I_2}{I_1}=\frac{1-C_{min}}{1+C_{min}}=0,74$ .

Le premier minimum du contraste se produit lorsque  $2\pi\Delta x\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}=\frac{\pi}{2}$ , donc  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}=\frac{\lambda_0}{4\Delta x}=1,9\cdot 10^{-5}$ .