

TD n°1: Rappels de mécanique de PCSI

Exercice 1: Mouvement dans un champ EM (Centrale)

Étudier le mouvement d'un électron dans un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ uniformes, stationnaires et parallèles.

Exercice 2: Bille dans un cône (X-ESPCI)

Une petite bille masse m se déplace sans frottements dans un cône de demi-angle au sommet α et d'axe vertical Oz . On néglige les frottements.

À quelle condition se déplace-t-elle sur un cercle ? Cette trajectoire est-elle stable ?

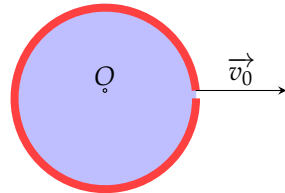
Exercice 3: Loi de la gravitation universelle (X-ESPCI)

On suppose que la loi de gravitation universelle est de la forme $\vec{F} = -(\mathcal{G} m m' / r^n) \vec{u}_r$ avec n réel.

- 1) Que peut-on dire de n sachant que le mouvement d'un satellite géostationnaire G de la Terre est dominé par l'action gravitationnelle de la Terre, celle du Soleil étant négligeable ?
- 2) Que peut-on dire de n sachant que les satellites possèdent des trajectoires bornées décrites périodiquement ?

Exercice 4: Corde lestée et cylindre (X-ESPCI)

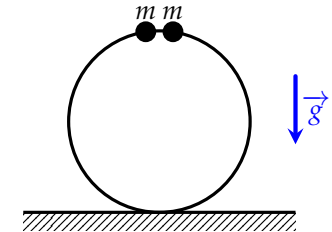
On fixe une extrémité d'une corde inélastique de longueur $2\pi R$ et de masse négligeable à un point A de la périphérie d'un disque de rayon R . On enroule la corde sur un tour et on attache une masse m à son extrémité. À l'instant $t = 0$ on lance la masse m avec une vitesse v_0 orthoradiale. On néglige les frottements.



- 1) Le disque est horizontal. Étudier.
- 2) Le disque est vertical. À quelle condition la corde se déroule-t-elle complètement?

Exercice 5: Deux masses sur un cerceau (X-ESPCI)

Deux anneaux de masse m coulissent sans frottements sur un cerceau vertical de rayon R et de masse M posée sur un plan horizontal fixe. Initialement on abandonne sans vitesse initiale les deux masses symétriquement au voisinage du sommet. Trouver une condition sur M/m pour que le cerceau décolle et la position des masses lors du décolllement.



Exercice 6: Chocs de 2 puis n balles (X-ESPCI)

On lâche d'une hauteur h un ballon de masse m_1 et une petite balle de masse $m_2 \ll m_1$ posée juste au dessus¹.

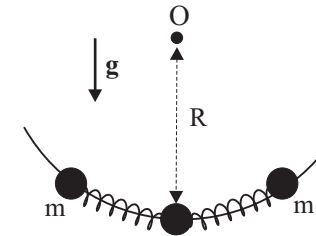
- 1) À quelle hauteur remonte la petite balle?

On supposera que la quantité de mouvement totale des deux balles est conservée entre avant le choc et après celui-ci, et qu'il en est de même pour l'énergie cinétique (choc dit élastique)

- 2) Nous considérons maintenant plusieurs balles posées les unes sur les autres, avec chaque sphère ayant une masse bien inférieure à celle en dessous d'elle. Combien de sphères faut-il pour que la sphère la plus au-dessus dépasse la vitesse de libération terrestre?

Exercice 7: I ♥ Oscillations (X-ESPCI)

Les masses $m_1 = m_3 = m$ et $m_2 = M$ reliées par des ressorts de raideur k et de longueur à vide $l_0 \ll R$ se déplacent sans frottements sur la glissière circulaire de rayon R au voisinage de l'équilibre. Pour quelles conditions initiales le système évolue-t-il de manière sinusoïdale ? Avec quelle pulsation ?



¹https://www.canal-u.tv/video/tele2sciences/balles_rebondissantes.15213

Réponses

Exercice 1 : Mouvement dans un champ EM

$$\begin{cases} x = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} \sin(\omega t) \\ y = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \\ z = -\frac{E\omega}{2B} t^2 + v_0 \cos \alpha t \end{cases} \quad \text{avec } \omega = \frac{eB}{m}$$

Exercice 2 : Bille dans un cône

Paramétrer en cylindriques (r, θ, z) avec $r = z \tan \alpha$; cercle de rayon r_0 si $\vec{v}_0 = \sqrt{gr_0 \cot \alpha} \vec{u}_\theta$.

Sinon, on a $r^2 \dot{\theta} = v_0 r_0$ puis $(1/2) m \dot{r}^2 / \sin^2 \alpha + m v_0^2 r_0^2 / 2r^2 + mgr \cot \alpha = E = \text{cste}$; l'énergie potentielle effective présente un minimum correspondant à la trajectoire circulaire qui est donc stable.

Exercice 3 : Loi de la gravitation universelle

- 1) $n > \ln(M_S/M_T) / \ln(TS/TG) = 1,5$;
- 2) $r^2 \dot{\theta} = C$; $E = (1/2) m \dot{r}^2 + m C^2 / r^2 - \mathcal{G} m M / (n-1) r^{n-1}$; discuter sur le graphe de $E_{p,\text{eff}}$; $n < 3$.

Exercice 4 : Corde lestée et cylindre

- 1) Repérer le point I où le fil quitte le disque par son angle polaire θ et introduire le trièdre local associé $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associé ; $R \theta \dot{\theta} = v_0$; $\theta = \sqrt{2} v_0 t / R$; on peut aussi calculer la tension du fil $\vec{T} = m R \theta \dot{\theta}^2 = m v_0^2 / \sqrt{2} v_0 R t$
- 2) $v_0 > \sqrt{2\pi R g}$

Exercice 5 : Deux masses sur un cerceau

$\dot{\theta}^2 = (2g/R) (1 - \cos \theta)$; $\ddot{\theta} = (g/R) \sin \theta$; $\vec{N} = Mg + 6mg \cos^2 \theta - 4mg \cos \theta$; $\vec{N}$ minimale si $\cos \theta_m = 1/3$ et $\vec{N}_m = (M - 2m/3)g < 0$ si $M < 2m/3$; le décollement se produit pour la solution de $\vec{N} = 0$ telle que $1/3 < \cos \theta_d < 2/3$.

Exercice 6 : Chocs de 2 puis n balles

- 1) $v'_2 = 3\sqrt{2gh}$ et $h'_2 = 9h$.
- 2) $n = \frac{\ln\left(\frac{v_\ell}{v_0}\right)}{\ln 2} - 1 = 13$ pour $v_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice 7 : I ♥ Oscillations

Mise en équations : $\ddot{\theta}_1 + (g/R + k/m) \theta_1 = (k/m) \theta_2$ (1) ; $\ddot{\theta}_3 + (g/R + k/m) \theta_3 = (k/m) \theta_2$ (3) et $\ddot{\theta}_2 + (g/R + 2k/M) \theta_2 = (k/M)(\theta_1 + \theta_3)$ (2) ; la symétrie du problème incite à faire (3) + (1) et (3) - (1) en posant $\delta = (\theta_3 - \theta_1)/2$ et $\sigma = (\theta_3 + \theta_1)/2$ d'où $\ddot{\delta} + (g/R + k/m) \delta = 0$ (1') ; $\ddot{\sigma} + (g/R + k/m) \sigma = (k/m) \theta_2$ (3') ; $\ddot{\theta}_2 + (g/R + 2k/M) \sigma = (2k/M) \sigma$ (2')

On obtient $\delta(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$ avec $\omega_0 = \sqrt{g/R + k/m}$ et on cherche $\underline{\sigma}(t) = \underline{B} \exp(j\omega t)$ et $\underline{\theta}_2(t) = \underline{C} \exp(j\omega t)$; le déterminant du système linéaire obtenu impose $\omega' = \sqrt{g/R}$ avec $\underline{\theta}_2'(t) = \underline{\sigma}'(t)$ ou $\omega'' = \sqrt{g/R + k/m + 2k/M}$ avec $\underline{\theta}_2''(t) = -(2m/M) \underline{\sigma}''(t)$

En définitive, on peut osciller avec ω_0 si les CI sont compatibles avec $\theta_2(t) = 0$ et $\theta_3(t) = -\theta_1(t)$; on peut osciller avec ω' si les CI sont compatibles avec $\theta_2(t) = \theta_3(t) = \theta_1(t)$; on peut osciller avec ω'' si les CI sont compatibles avec $\theta_3(t) = \theta_1(t)$ et $m \theta_1(t) + M \theta_2(t) + m \theta_3(t) = 0$ de telle sorte que le centre d'inertie reste fixe (c'est le cas le moins intuitif).