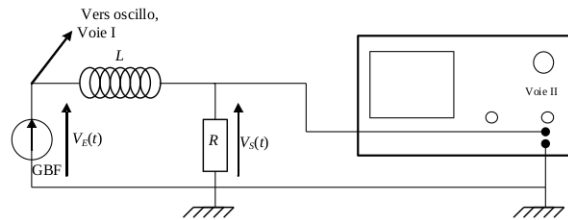


Correction du devoir de révisions de PCSI

I. Oscilloscope (Centrale)

1) Le montage est le suivant



2) Un pont diviseur de tension donne

$$\underline{H}_0(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{L\omega}{R}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

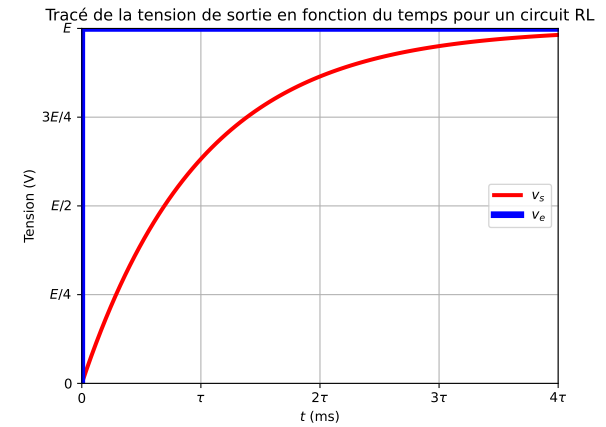
C'est un passe bas de fréquence de coupure $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$. L'équation différentielle s'obtient en réécrivant $\underline{v}_s$ en fonction de $\underline{v}_e$, puis en repassant en réel

$$\underline{v}_s(R + jL\omega) = R\underline{v}_e \text{ soit } \frac{dv_s}{dt} + \frac{R}{L}v_s = \frac{R}{L}v_e$$

Pour un créneau $v_e(0 < t < T/2) = E$ donc la solution est de la forme

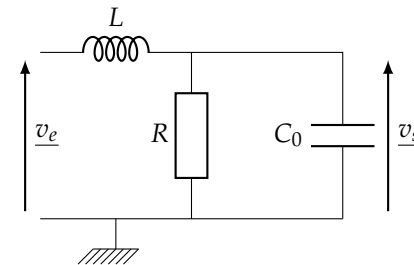
$$v_s(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))$$

par continuité du courant dans une bobine. L'allure de la courbe est donc la suivante sur une demi-période



Or, la constante de temps vaut $\tau = \frac{L}{R} = 1 \mu\text{s}$ et la période du créneau $T = 1 \text{ ms}$, on a donc $\tau \ll T$. **La période est beaucoup trop grande** pour visualiser le retard à l'établissement du courant dans la bobine et on observe alors juste deux créneaux similaires.

3) On observe un régime pseudo-périodique amorti ce qui n'était pas prévisible avec l'équation différentielle du premier ordre. À ce stade, il semble donc que l'oscilloscope se comporte comme une capacité C_0 .



On observe sur le diagramme de BODE un filtre passe-bas du deuxième ordre avec un facteur de qualité Q supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ puisqu'il y a résonance. La fonction de transfert s'écrit alors

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + jL\omega} = \frac{1}{1 + jL\omega\underline{Y}_{eq}}$$

avec $\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{R} + jC_0\omega$. On en déduit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jL\omega \left(\frac{1}{R} + jC_0\omega \right)} = \frac{1}{1 - LC_0\omega^2 + j\frac{L\omega}{R}}$$

que l'on peut identifier à la forme canonique d'un passe-bas du deuxième ordre

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}} \text{ en posant } x = \frac{\omega}{\omega_0}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \text{ et } Q = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

La résonance a lieu pour $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, donc pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Or, on observe qu'il y a 5 oscillations du régime pseudopériodique avant retour à l'équilibre, ce qui donne un ordre de grandeur de Q et donc permet d'affirmer que $\omega_r \approx \omega_0$. On en déduit que

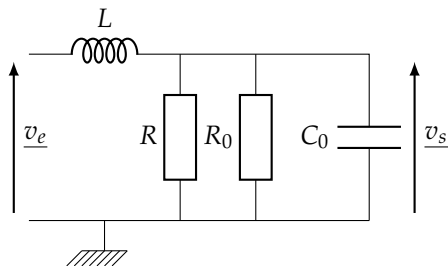
$$\boxed{f_0 \approx f_r = 27,9 \text{ kHz}} \text{ et } \boxed{C_0 \approx \frac{1}{L\omega_0^2} = 3,25 \cdot 10^{-10} \text{ F}}.$$

L'ordre de grandeur est élevé par rapport à ce qui est indiqué sur l'entrée de l'oscilloscope (dizaine de pF).

De plus, à la résonance, le gain vaut $G(\omega_r) \approx G(\omega_0) = Q$, ce qui donne

$$\boxed{Q = 10^{\frac{G_{dB}}{20}} = 10^{\frac{14,3}{20}} = 5,19 > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Or, on doit aussi avoir $Q = \frac{R}{L\omega_0} = 5,7$, ce qui n'est pas en accord avec la valeur précédente. On reprend donc l'étude avec une résistance R_0 en parallèle¹ avec la capacité C_0 à l'intérieur de l'oscilloscope.



La fonction de transfert s'écrit maintenant

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jL\omega \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} + jC_0\omega \right)} = \frac{1}{1 + jL\omega \left(\frac{1}{R'} + jC_0\omega \right)}$$

en posant $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}$. On se ramène alors au calcul précédent avec R' à la place de R , ce qui donne $Q = \frac{L\omega_0}{R'}$. On cherche donc R_0 tel que Q soit égal à 5,19, soit

$$\boxed{R_0 = \frac{RL\omega_0}{\frac{R}{Q} - L\omega_0} = 1,01 \text{ M}\Omega}$$

L'ordre de grandeur est le bon (cf TP).

- 4) On passe à l'équation différentielle en revenant aux réels dans la fonction de transfert, qui se réécrit

$$\underline{v}_s \left(1 - LC_0\omega^2 + j\frac{L\omega}{R'} \right) = \underline{v}_e \text{ soit } \frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{1}{R'C_0} \frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{LC_0} v_s = \frac{1}{LC_0} v_e$$

On cherche la résistance critique R'_c pour laquelle les oscillations vont disparaître, c'est-à-dire pour laquelle le discriminant $\Delta = \left(\frac{1}{R'_c C_0} \right)^2 - \frac{4}{LC_0}$ est nul. On obtient

$$R'_c = \sqrt{\frac{L}{4C_0}} \text{ soit } \boxed{R_c = \frac{1}{\sqrt{\frac{4C_0}{L} - \frac{1}{R_0^2}}} = 8,8 \text{ k}\Omega}$$

II. Étude d'un viseur (Centrale)

- 1) a) L'œil emmétrope percevra l'image nette sans effort d'accommodation si cette image est à l'infini. On veut donc un système optique qui fait d'un objet à l'infini une image elle aussi à l'infini. Un tel système est dit *afocal*. Pour qu'il en soit ainsi, le foyer image de l'objectif doit être confondu avec le foyer objet de l'oculaire:

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

¹La résistance d'entrée de l'oscillo!

Il vient:

$$D = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2}$$

$$D = f'_1 + f'_2 = 12\text{cm}$$

b)

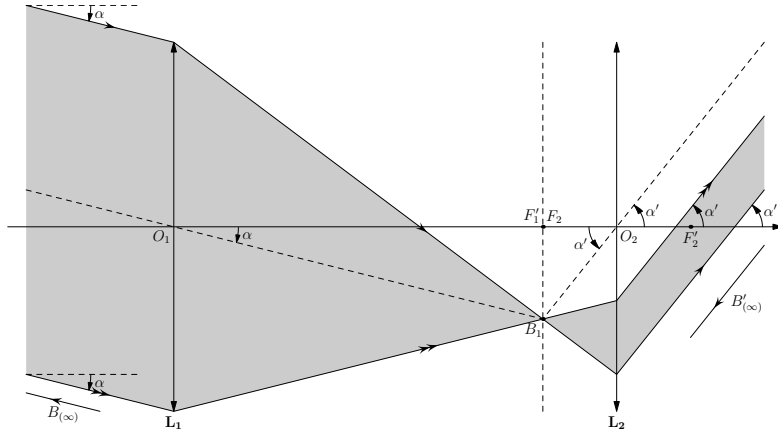


Figure 1: Marche d'un faisceau au travers du viseur réglé pour voir à l'infini

c) Par lecture sur la figure 1, en faisant attention aux signes²:

$$\alpha \stackrel{\text{Gauss}}{\approx} \tan \alpha = \frac{\overline{F'_1B_1}}{\overline{O_1F'_1}}$$

$$\alpha' \stackrel{\text{Gauss}}{\approx} \tan \alpha' = \frac{\overline{F_1B_1}}{\overline{O_2F_2}}$$

On déduit le grossissement:

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_2F_2}}$$

$$G = -\frac{f'_1}{f'_2} = -5,0$$

À travers cet instrument, l'image est perçue renversée. En effet, il faut regarder en dessous de l'axe optique pour voir un objet placé au dessus de cet axe.

- 2) a) L'objet AB est placé 20 cm avant l'objectif. L'objectif L_1 fait de cet objet AB une image A_1B_1 , et pour que l'image finale donnée par l'oculaire soit à l'infini, il faut que A_1B_1 soit située dans le plan focal objet de L_2 . Soit:

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

Cherchons où se situe A_1 . D'après la relation de conjugaison de Descartes appliquée à la lentille L_1 , on a:

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{\overline{O_1F'_1}}$$

d'où:

$$\overline{O_1F_2} = \overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A} \times \overline{O_1F'_1}}{\overline{O_1A} + \overline{O_1F'_1}} = \frac{\overline{O_1A} \times f'_1}{\overline{O_1A} + f'_1} \left(= \frac{-20 \times 10}{-20 + 10} = 20\text{ cm} \right)$$

La distance D doit donc être égale à:

$$D = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_2} + \overline{F_2O_2}$$

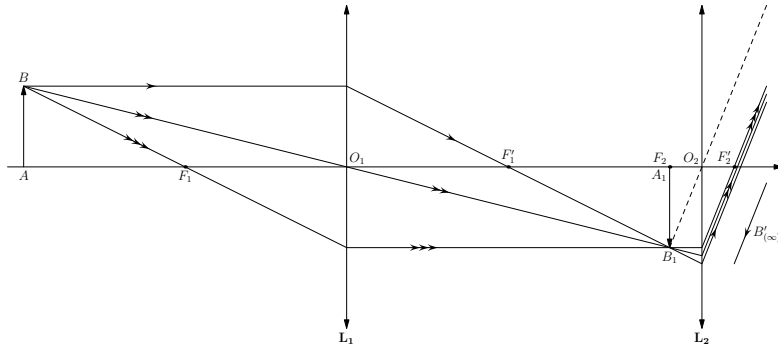
$$D = \frac{\overline{O_1A} \times f'_1}{\overline{O_1A} + f'_1} + f'_2 = 22\text{ cm}$$

b)

$$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'_\infty B'_\infty$$

On commence par bâtir l'image A_1B_1 de l'objet AB au travers de l'objectif L_1 , puis on place cette image dans le plan focal objet de l'oculaire L_2 . Ainsi l'image finale donnée par le viseur est à l'infini. La figure ci-dessous, réalisée à l'échelle, permet de confirmer la valeur de D trouvée à la question précédente.

² $\alpha < 0$ et $\alpha' > 0$ si on oriente positivement dans le sens trigo, de bas en haut et de gauche à droite



c) Pour que l'objet soit vu net, il faut que: $d_m \leq \overline{A'F_2'} \leq +\infty$.

La relation de Newton pour la lentille 2, soit $\overline{F_2A_1} \times \overline{F_2'A_1'} = -f_2'^2$, donne:
 $0 \leq \overline{F_2A_1} \leq 1,6 \text{ mm}$

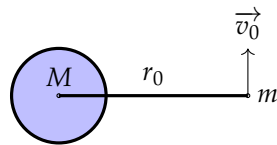
D'où: $10,0 \text{ cm} \leq \overline{F_1'A_1} \leq 10,2 \text{ cm}$

La relation de Newton pour la lentille 1, soit $\overline{F_1A} \times \overline{F_1'A_1} = -f_1'^2$, donne:
 $9,8 \text{ cm} \leq \overline{AF_1} \leq 10,0 \text{ cm}$

La zone de netteté est donc de 2 mm. Cela justifie l'appellation de viseur, car l'instrument permet un pointage précis.

III. Satellite atypique (X)

On peut commencer par analyser la force supplémentaire donnée: elle est centrale et attractive mais ne dépend pas de r , elle ne dérive donc pas d'une énergie potentielle a priori. C'est un problème car on ne sait pas traiter par le PFD les satellites dans des mouvements non circulaires. On peut aussi remarquer que c est homogène à une vitesse.



1) On commence donc par étudier la possibilité d'un mouvement circulaire de rayon r_0 . le PFD projeté sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ donne

$$\begin{cases} -mr_0\dot{\theta}^2 = -\frac{GMm}{r_0^2} - \frac{3GMm\dot{\theta}^2}{c^2} \\ mr_0\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation assure que $\dot{\theta} = \text{cte}$, donc que le mouvement est uniforme³. On remplace ensuite $\dot{\theta}$ par v_0/r_0 dans la première équation

$$\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2} + \frac{3GMv_0^2}{r_0^2c^2}$$

ou encore

$$v_0^2 \left(1 - \frac{3GM}{r_0c^2}\right) = \frac{GM}{r_0}$$

soit finalement

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0 \left(1 - \frac{3GM}{r_0c^2}\right)}}$$

L'expression est homogène et on retrouve la vitesse de la trajectoire circulaire du cours si la force supplémentaire disparaît ($c \rightarrow \infty$): OK.

En plus de la bonne valeur de la vitesse, il y a deux propriétés nécessaires afin d'obtenir un bon lancer:

- Il faut $r_0 > \frac{3GM}{c^2}$ pour que v_0 soit définie;
- il ne faut pas oublier que v_0 doit être orthoradiale pour avoir un cercle.

2) La viabilité du satellite suppose que sa trajectoire reste bornée. Pour ce faire, on utilise habituellement un diagramme d'énergie potentielle effective. La force supplémentaire dérive-t-elle d'une E_p ?

Elle est centrale donc on peut écrire la conservation du moment cinétique, ce qui conduit à $r^2\dot{\theta} = \overline{OM_0} \wedge \vec{v}_0$. Or, la seule erreur que l'on fait est une mauvaise norme de la vitesse initiale, la distance initiale reste donc égale à r_0 et la vitesse initiale reste orthoradiale. On en déduit que $r^2\dot{\theta} = r_0v_0'$, ce qui permet de remplacer $\dot{\theta}$ dans la force supplémentaire

$$\vec{F}_S = -\frac{3GMmr_0^2v_0'^2}{c^2r^4}\vec{u}_r = -\frac{dE_{pS}}{dr}\vec{u}_r = -\vec{\text{grad}}E_{pS}$$

avec

³La conservation du moment cinétique conduit à la même conclusion

$$E_{pS} = -\frac{GMmr_0^2 v_0'^2}{c^2 r^3}$$

où la constante d'intégration est nulle en prenant l'origine des énergies potentielles à l'infini. L'énergie mécanique du système s'écrit donc

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} - \frac{GMmr_0^2 v_0'^2}{c^2 r^3} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

en remplaçant $\dot{\theta}$ dans le terme d' E_c . On obtient alors

$$E_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{r_0^2 v_0'^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} - \frac{GMmr_0^2 v_0'^2}{c^2 r^3}$$

que l'on va dériver par rapport à r pour obtenir les extrema. En effet, il nous faut un minimum d'énergie potentielle effective si l'on veut que le mouvement du satellite puisse être borné. Pour le moment on sait juste que $E_{p,\text{eff}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\infty$ et $E_{p,\text{eff}} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$.

$$\frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} = -\frac{mr_0^2 v_0'^2}{r^3} + \frac{Gmm}{r^2} + \frac{3GMmr_0^2 v_0'^2}{c^2 r^4} = 0$$

Le polynôme suivant doit donc s'annuler

$$P(r) = GMr^2 - r_0^2 v_0'^2 r + \frac{3GMr_0^2 v_0'^2}{c^2}$$

cette équation du second degré doit avoir un discriminant positif, si l'on veut au moins une racine réelle et donc un extremum, ce qui implique

$$r_0^4 v_0'^4 - \frac{12G^2 M^2 r_0^2 v_0'^2}{c^2} \geq 0$$

ou encore

$$v_0' \geq \frac{\sqrt{12GM}}{cr_0}$$

relation homogène, puisque c est une vitesse. Enfin, puisque $P(r) = r^4 \frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr}$, sa dérivée vaut

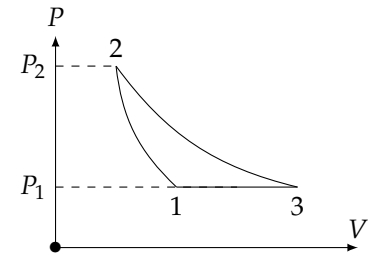
$$\frac{dP}{dr} = 4r^3 \frac{dE_{p,\text{eff}}}{dr} + r^4 \frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2}$$

Elle sera donc du même signe que $\frac{d^2 E_{p,\text{eff}}}{dr^2}$ aux positions d'équilibre pour lesquelles la dérivée première de $E_{p,\text{eff}}$ est nulle! En utilisant l'indication, on obtient que la racine r_+ du polynôme conduit à une dérivée seconde de l'énergie effective positive donc à un minimum. **Le satellite peut donc bien rester borné si on le lance pas trop loin de $r_+ > r_-$ avec la vitesse v_0' calculée.**

IV. Taux de compression d'un moteur (Mines)

- 1) On peut commencer par tracer le cycle sur lequel la portion 1-3 est l'isobare. Pour distinguer les deux autres, il faut écrire la relation correspondante entre P et V :

- Pour une isotherme, $PV = nRT = \text{cte}$ donc $P = \text{cte}/V$ et la courbe est une hyperbole.
- Pour une adiabatique réversible d'un gaz parfait, la loi de LAPLACE s'applique: $PV^\gamma = \text{cte}$. On en déduit que $P = \text{cte}/V^\gamma$, avec $\gamma = C_p/C_v > 1$.



L'isentropique sera donc la transformation 1-2, puisqu'elle décroît plus vite que l'isotherme, transformation 2-3.

Le système doit être moteur donc céder un travail ($W < 0$) pour fonctionner. Or, le travail est l'opposé de l'aire sous la courbe en diagramme de WATT (P, V), puisque $W = -\int P_{\text{ext}} dV = -\int P dV$ ici. On en déduit que l'aire du cycle doit être positive, et donc que celui-ci doit être parcouru dans le sens horaire (1-2-3).

- 2) Par définition du rendement

$$e = \frac{\text{ce qu'on a}}{\text{ce qu'on aurait aimé avoir}} = \frac{-W}{Q_c} > 0$$

Il reste donc à calculer les travaux et d'en déduire les transferts thermiques par le premier principe

- Transfo 3-1 isobare: $W_{31} = -\int P dV = -P_1 \int_{V_3}^{V_1} dV = -P_1(V_1 - V_3)$ et $Q_{31} = \Delta U_{31} - W_{31} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_3) + nR(T_1 - T_3) = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_1 - T_3) = Q_c < 0$.
- Transfo 2-3 isotherme: $W_{23} = -\int P dV = -nRT_2 \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = -nRT_2 \ln(V_3/V_2)$ et $Q_{23} = \Delta U_{23} - W_{23} = 0 + nRT_2 \ln(V_3/V_2) = Q_f > 0$.
- Transfo 1-2 isentropique: $Q_{12} = 0$ et $W_{12} = \Delta U_{12} - Q_{12} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$.

Le premier principe appliqué au fluide parcourant des cycles dans le moteur donne

$$0^{\text{cycle}} \Delta U = W + Q_c + Q_f \Rightarrow -W = Q_c + Q_f$$

On en déduit

$$e = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{(\gamma-1)T_2 \ln(V_2/V_3)}{\gamma(T_2 - T_1)}$$

Il reste à exprimer les températures en fonction des volumes. La loi de LAPLACE sur la transformation 1-2 permet d'écrire

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

ce qui, combiné avec $T_2 \stackrel{\text{isoT}}{=} T_3$, conduit à

$$e = 1 + \frac{(\gamma-1) \ln(V_2/V_3)}{\gamma(1 - (\frac{V_2}{V_1})^{\gamma-1})}$$

D'autre part, puisque $P_2 V_2 \stackrel{\text{GP}}{=} nRT_2 \stackrel{\text{isoT}}{=} nRT_3 = P_3 V_3$ et $P_3 \stackrel{\text{isoP}}{=} P_1 \stackrel{\text{isoS}}{=} P_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$, on aboutit à

$$e = 1 + \frac{(\gamma-1) \ln(P_3/P_2)}{\gamma(1 - (\frac{V_2}{V_1})^{\gamma-1})}$$

soit finalement

$$e = 1 + \frac{(\gamma-1) \ln(V_2/V_1)}{1 - (\frac{V_2}{V_1})^{\gamma-1}} < 1$$

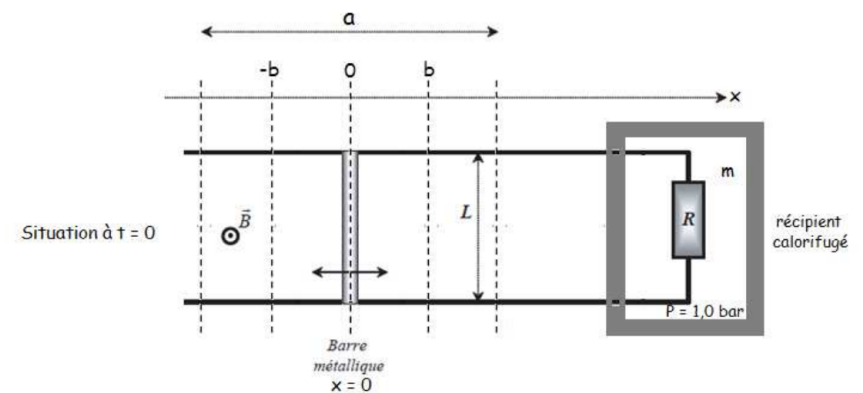
puisque $V_2 < V_1$ et $\gamma > 1$.

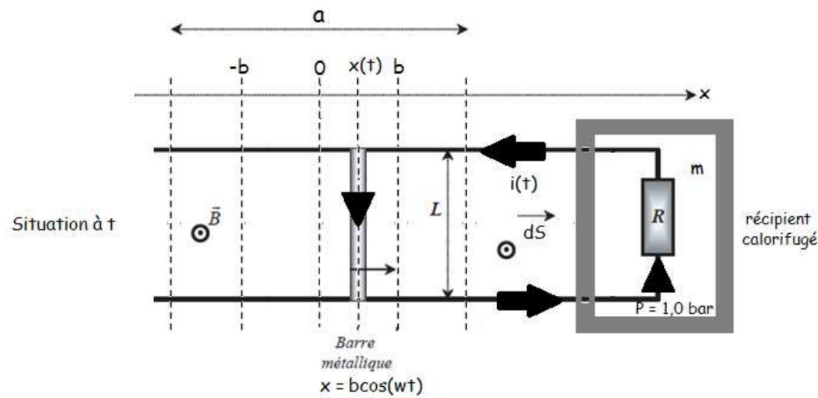
V. Fusion de la glace (Centrale)

- 1) Lorsque la barre est en mouvement, on a un conducteur mobile dans un champ magnétique stationnaire. La variation du flux du champ magnétique avec le temps donne naissance à une fem induite d'après la loi de FARADAY. Ce qui conduit à un courant induit d'intensité $i(t)$ dans le circuit fermé délimité à gauche et à droite respectivement par la barre et la résistance.

Il va donc y avoir effet Joule dans la résistance : de la chaleur va être dissipée et reçue par la glace uniquement (la chaleur ne peut pas être transférée à l'extérieur du récipient car il est calorifugé), ce qui va la refroidir puis la faire fondre.

La force de LAPLACE, qui s'exerce sur la barre et tend à la freiner d'après la loi de LENZ, est sans effet ici puisqu'elle est compensée par l'opérateur qui maintient l'oscillation sinusoïdale de la barre.





2) La loi de FARADAY donne

$$e(t) = -\frac{d\varphi}{dt} = -BL\frac{d}{dt}(ct - x) \text{ soit un courant induit } i(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{BL\dot{x}(t)}{R}$$

On en déduit la puissance instantanée dissipée par la résistance

$$\mathcal{P}_J = Ri^2(t) = \frac{B^2L^2\dot{x}^2(t)}{R} = \frac{4\pi^2f^2B^2L^2b^2\sin^2(2\pi ft)}{R}$$

puisque $x(t) = b\cos(2\pi ft)$. La fusion débute dès que la température de la glace devient égale à $T_{\text{fus}} = 0^\circ\text{C} = 273\text{ K}$. Appliquons le premier principe de la thermodynamique, sous forme monobare, à la masse $m = 1,0\text{ kg}$ de glace qui doit se réchauffer de $T_0 = -10^\circ\text{C}$ à T_{fus} en $\tau = 15\text{ min}$

$$\Delta H = Q \text{ soit } mc(T_{\text{fus}} - T_0) = \int_0^\tau \mathcal{P}_J dt$$

ou encore

$$\begin{aligned} mc(T_{\text{fus}} - T_0) &= \int_0^\tau \frac{4\pi^2f^2B^2L^2b^2\sin^2(2\pi ft)}{R} dt \\ &= \frac{4\pi^2f^2B^2L^2b^2}{R} \int_0^\tau \frac{1 - \cos(4\pi ft)}{2} dt \\ &= \frac{2\pi^2f^2B^2L^2b^2}{R} \left[\tau - \frac{\sin(4\pi f\tau)}{4\pi f} \right] \end{aligned}$$

Cette dernière équation où l'inconnue est τ ne peut être résolue que numériquement ... Pour estimer τ on peut aussi assimiler $\mathcal{P}_J$ à sa valeur moyenne, ce qui donne

$$mc(T_{\text{fus}} - T_0) \approx \langle \mathcal{P}_J \rangle \tau = \frac{2\pi^2f^2B^2L^2b^2}{R} \tau$$

ou encore

$$f \approx \frac{1}{\pi BLb} \sqrt{\frac{Rmc(T_{\text{fus}} - T_0)}{2\tau}} = 17\text{ Hz}$$

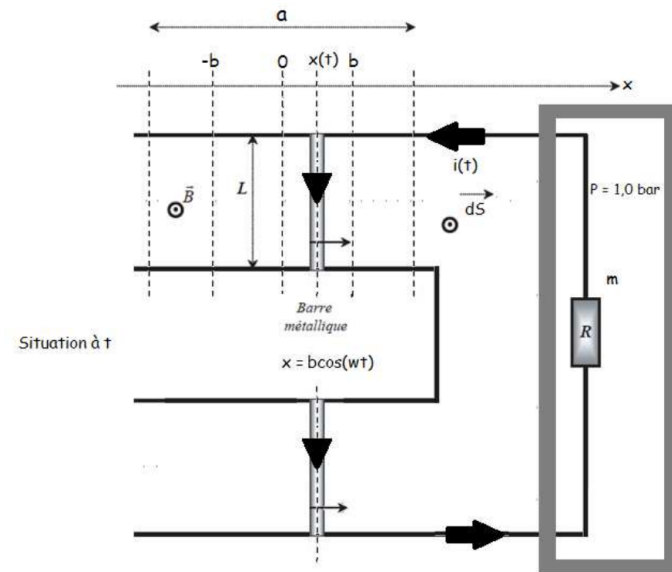
Cette fréquence est une fréquence minimale car si $f > 17\text{ Hz}$, alors le flux magnétique à travers le circuit va varier plus rapidement et l'induction sera plus importante, donc l'intensité du courant induit aussi et ainsi la puissance dissipée par effet JOULE également. Donc $f_{\text{min}} \approx 17\text{ Hz}$.

La fusion de la glace prendrait alors un temps τ' tel que , en appliquant une nouvelle fois le premier principe

$$mL_f = \Delta H = \langle \mathcal{P}_J \rangle \tau' = \frac{2\pi^2f_{\text{min}}^2B^2L^2b^2}{R} \tau'$$

$$\text{soit } \tau' = \frac{RmL_f}{2\pi^2f_{\text{min}}^2B^2L^2b^2} = 1,5 \cdot 10^4\text{ s} \approx 4\text{ h}$$

3) Il faut mettre en série les barres mobiles pour que les fem induites soient dans le même sens. Si on bouge les barres en phase avec la même amplitude, on a le type de branchement suivant (schématisé ci-dessous pour $N = 2$)



La fem trouvée à la question 2) devient alors $\mathcal{N}e(t)$, la puissance JOULE moyenne s'écrit

$$\langle \mathcal{P}_J \rangle = N^2 \frac{2\pi^2 f^2 B^2 L^2 b^2}{R}$$

Les temps τ et τ' sont donc divisés par N^2 .