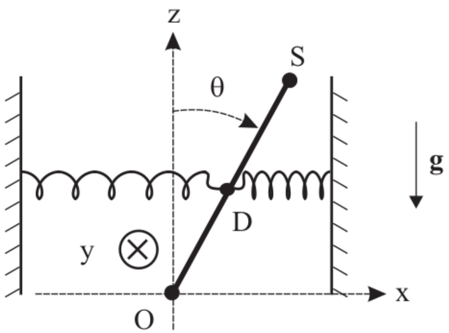
TD n°2: Mécanique non galiléenne et du solide

Exercice 1 : Dispositif Tuned Mass Damper (Centrale)

Une tour est modélisée par une barre homogène de masse m et de longueur L liée au sol en un point O par une liaison pivot imparfaite telle que le moment des forces exercées est de la forme $-f\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_y}$. Elle est reliée à deux murs fixes symétriques par deux ressorts de raideur $k/2$ fixés en son point D tel que $OD = d$. Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$ est uniforme. On repère le mouvement de la tour par l'angle θ (supposé faible) que fait la barre avec la verticale ascendante Oz. On donne le moment d'inertie $J = mL^2/3$ de la barre par rapport à l'axe Ox.



1) Établir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x_S du sommet de la tour et la mettre sous forme canonique. A quelle condition l'équilibre en $\theta = 0$ est-il stable ?

2) Après un coup de vent, la tour revient vers sa position d'équilibre avec un temps d'amortissement égal à la pseudo-période. En déduire le facteur de qualité Q.

3) En présence d'un séisme, le point O se déplace horizontalement de $X_O(t)$ par rapport au référentiel terrestre. Établir la nouvelle équation différentielle dont est solution $x_S(t)$ et expliciter la fonction de transfert en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω. Interpréter l'allure du diagramme de BODE fourni.

Exercice 2 : Plateau tournant

Un plateau horizontal tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oz vertical dans le référentiel terrestre $(Oxyz)$ supposé galiléen. Une particule de masse m est abandonnée à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale par rapport au plateau en un point M_0 du plateau. On choisit les axes du référentiel $(OXYz)$ lié au plateau de telle sorte qu'à l'instant $t = 0$, d'une part les axes Ox et OX coïncident ; et que d'autre part on a $\overrightarrow{OM_0} = a\,\overrightarrow{u_X}$. La masse se déplace sans frottements.

1) On se place dans le référentiel lié au plateau et on repère un point M par ses coordonnées cartésiennes X et Y. Établir les équations différentielles du deuxième ordre dont sont solutions $X(t)$ et $Y(t)$ et montrer que $u(t) = X(t) + j\,Y(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{u} + 2\,j\omega\,\dot{u} - \omega^2\,u = 0$$

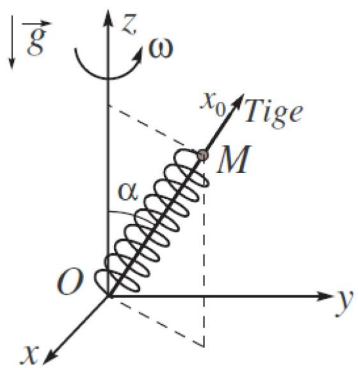
2) Chercher des solutions proportionnelles à $\exp(rt)$ et en déduire les expressions de $X(t)$ et $Y(t)$.

3) Retrouver le résultat en raisonnant dans le référentiel terrestre.

Exercice 3 : Tige inclinée en rotation avec ressort (Mines)

Un anneau de masse m, assimilable à un point matériel M, coulisse sans frottement sur une tige d'axe (Ox_0) animée d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω, autour de l'axe vertical (Oz) avec lequel elle fait un angle α.

L'anneau est relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 attaché au point O.



1) Déterminer la ou les éventuelles positions d'équilibre de l'anneau.

2) Écrire l'équation du mouvement de l'anneau sur la tige.

Exercice 4 : Boulet de MERSENNE

1) Version X-ESPCI

On lance avec un canon un boulet de masse m depuis le sol au voisinage d'un point de latitude λ avec une vitesse verticale. Où retombe-t-il ?

2) Version Centrale

Marin MERSENNE (1630-1648) est un religieux français appartenant à l'ordre des minimes, érudit, mathématicien et philosophe, MERSENNE possédait le don fabuleux de poser les bonnes questions pseudo naïves. Il suggéra le questionnement suivant, appelé le problème du boulet de MERSENNE:

« Soit un boulet tiré verticalement : retombera-t-il dans le fût du canon? »

a) Justifier que cette expérience permet de mettre en évidence le caractère non galiléen du référentiel terrestre. Connaissez-vous d'autres expériences ou phénomènes liés à la nature du référentiel terrestre? Rappeler la définition du référentiel géocentrique et justifier que pour cette expérience il peut être considéré comme galiléen.

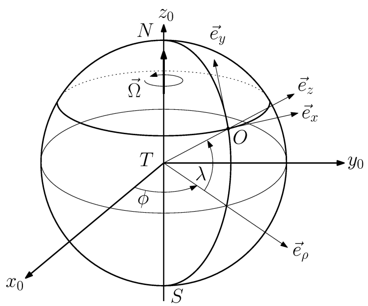
b) On assimile le boulet à un point matériel M de masse m et on introduit O le point lié au référentiel géocentrique coïncidant avec le point de lancement à $t = 0$. En tenant compte de la rotation de la Terre et à l'aide d'un raisonnement qualitatif, pouvez vous prédire où le boulet va retomber par rapport au fût?

c) Les équations de mouvement du boulet, dans le référentiel terrestre et dans ce repère sont :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\Omega\left(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda\right) \\ m\ddot{y} = -2m\Omega\dot{x}\sin\lambda \\ m\ddot{z} = -mg - 2m\Omega\dot{x}\cos\lambda \end{cases}$$

i. Expliquer comment obtenir ce système d'équations.

ii. En faisant des hypothèses simplificatrices, montrer qu'effectivement, la déviation observée est bien vers l'ouest.



- T= Centre de la terre
- λ = Latitude
- ϕ= Longitude
- (Ox) = Direction Ouest Est
- (Oy)= Direction Sud Nord
- (Oz)= Verticale ascendante

Exercice 5 : Limite de ROCHE

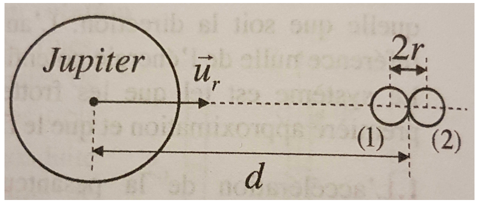
1) Version X-ESPCI

Une comète de masse M_C, sphérique de rayon R_C, est constituée de poussières liées par la gravitation. Elle passe à une distance d du Soleil de masse M_S. À quelle condition explose-t-elle ?

2) Version type Centrale/Mines

On cherche à déterminer la distance en dessous de laquelle une comète s'approchant de Jupiter se sépare en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marée dues à Jupiter. Pour cela on fait les hypothèses suivantes:

- Le référentiel jupitérocentrique est galiléen, et Jupiter (masse M_J, rayon R_J) est un astre sphérique homogène.
- La comète de masse volumique μ_c est e, orbite circulaire de rayon d autour de Jupiter.
- La comète est constituée de deux sphères identiques de masse m et de rayon r, homogènes et disposées comme indiqué sur la figure (les trois centres restent alignés au cours du mouvement); elles sont liées entre elles par leur attraction gravitationnelle mutuelle.



a) Établir que le mouvement du centre d'inertie de la comète est uniforme, puis déterminer l'expression de ω^2, le carré de la vitesse angulaire du mouvement.

b) On note $\overrightarrow{N}$ la réaction de la sphère de gauche (1) sur la sphère de droite (2) de la comète. Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour l'une des deux sphères dans le référentiel jupitérocentrique. Est-il nécessaire de le faire pour la seconde?

c) À quelle condition le contact entre les deux sphères est-il rompu? En déduire, sachant que $\frac{r}{d} \ll 1$, que cela conduit pour d à une limite inférieure $d_{\lim}$ et exprimer $\frac{d_{\lim}}{R_J}$ en fonction de μ_c et μ_J, masse volumique de Jupiter.

AN: $M_J = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg; $R_J = 7{,}1 \cdot 10^4$ km et $\mu_c = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; calculer $\frac{d_{\lim}}{R_J}$.

Exercice 6 : Fil dans un satellite géostationnaire (X-ESPCI)

On accroche l'extrémité A d'un fil de masse m et de longueur $L = 1$ km à un dynamomètre situé au centre d'inertie G d'un satellite géostationnaire. Que mesure-t-il ?

Réponses

Exercice 1 : Dispositif Tuned Mass Damper (TMD)

1) $\ddot{x}_S + (3f/mL^2)\,\dot{x}_S + (3kd^2/mL^2 - 3g/2L)\,x_S = 0$; stable si $k > mgL/2d^2$;

2) $\ddot{x}_S + (\omega_0/Q)\,\dot{x}_S + \omega_0^2\,x_S = 0$; $r = -\omega_0/2Q \pm j\sqrt{1 - 1/4Q^2}$; $Q = \sqrt{\pi^2 + 1/4}$

3) Prendre en compte des forces d'inertie d'entraînement et calculer leur moment $\Gamma = -(1/2)\,m\,L\,\ddot{X}_0$; $\ddot{x}_S + (\omega_0/Q)\,\dot{x}_S + \omega_0^2\,x_S = -(3/2)\,\ddot{X}_0$; $\underline{H} = (3/2)\,\omega^2/(\omega_0^2 - \omega^2 + j\,\omega\,\omega_0/Q)$; passe-haut avec résonance pour $\omega \approx \omega_0$ et $H_\infty = 3/2$

Exercice 2 : Plateau tournant

1) $m\,\ddot{X} = 2m\,\omega\,\dot{Y} + m\,\omega^2\,X$ et $m\,\ddot{Y} = -2m\,\omega\,\dot{X} + m\,\omega^2\,Y$; Faire la somme des équations sous la forme $(1) + j(2)$.

2) $r^2 + 2\,j\omega\,r - \omega^2\,r = 0$; $r = -j\omega$ racine double ; $u(t=0) = a$; $\dot{u}(t=0) = 0$; $u(t) = a\,(1 + j\omega t)\,\exp(-j\omega t)$; $X(t) = a\left(\cos\omega t + \omega t\,\sin\omega t\right)$ et $Y(t) = a\left(-\sin\omega t + \omega t\,\cos\omega t\right)$

3) $x(t) = a$ et $y(t) = a\,\omega\,t$ puis $X = x\,\cos\omega t + y\,\sin\omega t$ et $Y = y\,\cos\omega t - x\,\sin\omega t$

Exercice 3 : Tige inclinée en rotation avec ressort

1) $\ell_{\mathrm{eq}} = \dfrac{\frac{k\ell_0}{m} - g\cos\alpha}{\frac{k}{m} - \omega^2\sin^2\alpha}$, stable si $\omega < \sqrt{\dfrac{k}{m\sin^2\alpha}}$.

2) $\ddot{\ell} + \left(\dfrac{k}{m} - \omega^2\sin^2\alpha\right)\ell = \dfrac{k\ell_0}{m} - g\cos\alpha = \left(\dfrac{k}{m} - \omega^2\sin^2\alpha\right)\ell_{\mathrm{eq}}$. La stabilité peut alors s'étudier en cherchant $\ell = \ell_{\mathrm{eq}} + \epsilon$ avec $\epsilon \ll \ell_{\mathrm{eq}}$.

Exercice 4 : Boulet de Mersenne

$d^2\overrightarrow{OM}/dt^2 = \vec{g} - 2\,\Omega_T\cos\lambda\,\dot{z}\,\vec{u_x}$; $z(t) \approx v_0\,t - gt^2/2$; $\tau = 2v_0/g$; $x(t) = -2\,\Omega_T\cos\lambda\,(v_0\,t^2/2 - gt^3/6)$; $x(\tau) = -4\,\Omega_T\cos\lambda\,v_0^3/3g^2$; déviation vers l'*ouest*.

Exercice 5 : Limite de Roche

1) $2\,\mathcal{G}\,m\,M_S\,R_C/d^3 > \mathcal{G}\,m\,M_C/R_C^2$ soit $d < R_C\,(2M_S/M_C)^{1/3}$

2) **a)** $\omega^2 = \frac{GM_J}{2d}\left[\frac{1}{(d-r)^2} + \frac{1}{(d+r)^2}\right]$

b) Pour la sphère de gauche $-m\omega^2(d-r) = -G\frac{mM_J}{(d-r)^2} + G\frac{m^2}{(2r)^2} - N$

c) $\frac{d_{\text{lim}}}{R_J} = \left(\frac{12\mu_J}{\mu_c}\right)^{1/3} \approx 2,5$

Exercice 6 : Fil dans un satellite géostationnaire

Supposer le fil tendu sur la verticale ; $g(z) = -\omega^2(R-z) + \mathcal{G}\,M_T/(R-z)^2 \approx 3\,\mathcal{G}\,M_T\,z/R^3$ avec $\omega^2\,R^3 = \mathcal{G}\,M_T$; $F = 3\,\mathcal{G}\,m\,M_T\,L/2R^3$