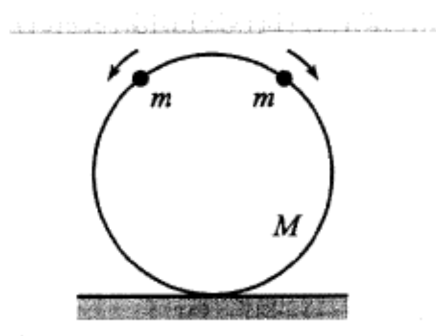
Avec c_3 et c_4 des constantes (complexes) et $k_0 = \omega/c$. La solution générale pour $\phi(.)$ dans le domaine $-L < x < 0$ est donc:

$$\phi(x,t) = -\frac{\eta}{\mu_0 c}\frac{1}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})}EB_0 e^{i(\omega t - kx)} + c_3 e^{i(\omega t - k_0 x)} + c_4 e^{i(\omega t + k_0 x)}$$

Maitenant, il faut utiliser les relations de continuité en $x = -L$ et $x = 0$ pour $\phi(x,t)$ et $\partial\phi(x,t)/\partial x$ pour déterminer les 4 constantes. C'est bien car il y a 4 équations. Le problème est complètement posé. L'énoncé ne demande pas de résoudre ce système mais seulement de montrer que $|c_1|$ et $|c_2|$ sont proportionnels à $|E|B_0$. C'est évident une fois le système posé car les égalités doivent être vraies pour tout $|E|$ et B_0, cela veut dire que l'on doit pouvoir simplifier par $|E|$ et B_0 chaque égalité, ce qui implique que $|c_1|$ et $|c_2|$ sont bien proportionnels à $|E|B_0$, ce qui conclut.

Note: on remarque qu'il y a une petite différence par rapport aux exercices de MQ où l'on applique des relations de continuité avec une variable de plus que le nombre d'équations, cette variable étant liée au flux incident (libre). Ici, ce n'est pas le cas car $\phi(.)$ est produit dans la région de champ intense et donc on n'envoie pas un flux (libre) de $\phi(.)$ vers quelque chose.

Exercice 3 : anneau et boules



Deux petites boules percées, en acier, de masses m et rayon a, peuvent coulisser sans frottement sur un anneau (sans le quitter). L'anneau, de masse M et rayon $R \gg a$, est posé verticalement sur le sol. Initialement les deux boules sont au sommet de l'anneau. Elles sont lachées à $t = 0$ et commencent à glisser lelong de l'anneau, l'une à gauche, l'autre à droite.

1) Quelle est la valeur minimale m_* de m à partir de laquelle l'anneau s'élèvera du sol ?

2) Si $m < m_*$, au bout de quel temps T les deux boules arrivent en bas de l'anneau? On fera l'AN pour $R = 1\,\mathrm{m}$ et $a = 1\,\mathrm{cm}$.

Eléments de solution

Les forces sur chaque boule sont son poids $-mg\vec{u}_z$ et la réaction normale $\vec{N} = N\vec{u}_r$ de l'anneau. Le PFD donne alors (avec $r = R$ constant)

$$mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \quad , \quad -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N. \tag{1}$$

La première équation est intégrée pour donner la conservation de l'énergie, soit

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta) \ . \tag{2}$$

En reportant dans la deuxème équation (1) on trouve

$$N = mg(3\cos\theta - 2) \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = mg(3\cos\theta - 2)\vec{u}_r \ . \tag{3}$$

Ceci est valable pour chacune des deux boules avec leur $\vec{u}_r$ respectifs. Chaque boule exerce donc une force $-\vec{N}$ sur l'anneau. Les composantes horizontales s'annulent et les composantes verticales s'ajoutent, soit une force $-2mg(3\cos\theta - 2)\cos\theta\,\vec{u}_z$. On voit que cette force peut être dirigée selon $+\vec{u}_z$ uniquement si $\cos\theta \geq 0$. En ajoutant le poids de l'anneau on trouve la force totale qu'exerce l'anneau sur le sol:

$$\vec{F}_{\mathrm{a->s}} = -g\Big[M + m\ 2(3\cos\theta - 2)\cos\theta\Big]\vec{u}_z \ . \tag{4}$$

1) L'anneau commencera à se soulèver du sol lorsque cette force s'annule pour la première fois, soit pour $\theta = \theta_*$ avec

$$\cos\theta_* = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{3M}{2m}} \ , \tag{5}$$

ce qui est réel à condition que $\frac{3M}{2m} < 1$ ou $m \geq m_*$ avec

$$m_* = \frac{3}{2} M \ . \qquad (6)$$

Si cette condition est satisfaite, l'anneau se soulève dès que $\theta = \theta_*$. Mais ensuite, pour $\theta > \theta_*$, l'analyse ci-dessus cesse d'être valable car l'anneau ne constitue plus un référentiel inertiel.

2) Dans le cas $m < m_*$ l'anneau ne se soulève jamais et l'analyse des forces et accélérations ci dessus reste valables tout le temps. D'après (2) on a $\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{R} \sin^2 \frac{\theta}{2}$, soit $\dot{\theta} = 2\omega \sin \frac{\theta}{2}$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ ou $\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = 2\omega \mathrm{d}t$ et donc (*si besoin, on donnera la formule* $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = 2 \ln \tan \frac{\theta}{4}$)

$$(t - t_0) = \frac{1}{2\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{4}} = \frac{1}{4\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\tan \frac{\theta}{4} \cos^2 \frac{\theta}{4}} = \frac{1}{\omega} \Big(\ln \tan \frac{\theta}{4} - \ln \tan \frac{\theta_0}{4} \Big) \ . \qquad (7)$$

Evidemment, si on pose $\theta_0 = 0$ on trouve $T = t_f - t_0 = \infty$: une boule posée exactement en $\theta_0 = 0$ y restera indéfiniment. Mais ici les boules ont un rayon a et donc $\theta_0 \simeq \tan \theta_0 = \frac{a}{R}$. De même, $\theta_f = \pi - \frac{a}{R}$. On a $\ln \tan \frac{a}{4R} \simeq \ln \frac{a}{4R}$ et $\ln \tan (\frac{\pi}{4} - \frac{a}{4R}) \simeq \ln 1 = 0$ à des termes $\mathcal{O}(\frac{a^2}{R^2})$ près. On trouve alors

$$T \simeq -\frac{1}{\omega} \ln \frac{a}{4R} = \sqrt{\frac{R}{g}} \ln \frac{4R}{a} \ . \qquad (8)$$

Pour l'AN on trouve $\sqrt{\frac{R}{g}} \simeq 0.3\,\mathrm{s}$ et $\ln \frac{4R}{a} = \ln 400 \simeq 6$, soit $T \simeq 1.8\,\mathrm{s}$. A comparer avec une chute libre sur une hauteur $2R$: $2R = \frac{g}{2} T^2$ qui donne $T = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \simeq 0.6\,\mathrm{s}$.

Exercice 4 : tore de fluide

On considère un liquide parfait incompressible en forme de tore, c'est à dire de bouée. Dans un premier temps on étudie son évolution en considérant l'effet de la tension superficielle. On ne prend pas en compte l'effet du poids et on suppose qu'au cours de son évolution il conserve toujours une forme de tore. On rappelle que l'énergie associée à la tension superficielle est $E = \nu A$ où A est l'aire de la surface libre et ν le coefficient de tension superficielle. On suppose que le rayon r du grand cercle qui passe par les centres des sections est bien plus grand que le rayon des sections R du tore.