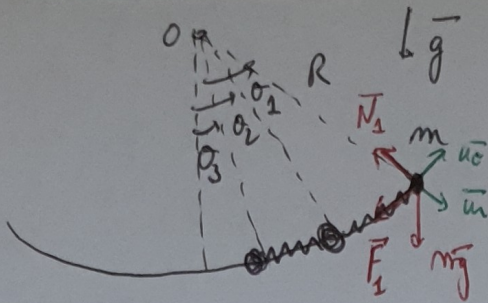


Ex8 3 masses et ressorts



Ces limites $M \gg m$ comme $n=1$ seul ressort de part et d'autre
 $\oplus M \ll m$ 1 masse M entre 2 masses m (qui se rapprochent...)

2 masses m : symétriques en m de part et d'autre de M (qui bouge)
 ressorts très rigides : tout bouge en bloc perpendiculaire

On repère à chaque avec $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ / direction fixe verticale

TTC au PFD sur $\vec{u}_0$ paramètres M inconnues. Avec $\vec{F}_1 = -k(R-l_0)\vec{u}_0$ qui peut être facile

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta}_1 = -mg\sin\theta_1 - k(R(\theta_1 - \theta_2) - l_0) \\ mR\ddot{\theta}_3 = -mg\sin\theta_3 - k(R(\theta_3 - \theta_2) - l_0) \\ M R \ddot{\theta}_2 = -Mg\sin\theta_2 + k(R(\theta_2 - \theta_1) - l_0) + k(R(\theta_3 - \theta_2) - l_0) \end{cases}$$

l'écrit nous paraissant devant $R(\theta_2 - \theta_1)$... à voir

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{R} + \frac{k}{m}\right)\theta_1 = \frac{k}{m}\theta_2 & (1) \\ \ddot{\theta}_3 + \left(\frac{g}{R} + \frac{k}{m}\right)\theta_3 = \frac{k}{m}\theta_2 & (3) \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{R} + \frac{2k}{M}\right)\theta_2 = \frac{k}{M}(\theta_1 + \theta_3) & (2) \end{cases}$$

Système du pb : faire (3)+(1) et (3)-(1) en posant $\delta = \theta_3 - \theta_1$ et $\sigma = \frac{\theta_1 + \theta_3}{2}$ (c'est 2 syst couplés)

$$\begin{cases} \ddot{\delta} + \left(\frac{g}{R} + \frac{k}{m}\right)\delta = 0 & (1') \\ \ddot{\sigma} + \left(\frac{g}{R} + \frac{k}{m}\right)\sigma = \frac{k}{m}\theta_2 & (3') \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{R} + \frac{2k}{M}\right)\theta_2 = \frac{2k}{M}\sigma & (2') \end{cases}$$

$\rightarrow \delta = A \cos(\omega \delta t + \phi_0)$ et on cherche $\begin{cases} \sigma = B e^{j\omega t} \\ \theta_2 = C e^{j\omega t} \end{cases}$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} + \frac{k}{m}}$

pas est car
pas fait
de n'est pas
relié

$$\begin{cases} -\omega^2 B + \omega^2 \frac{B}{m} = \frac{k}{m} C \\ -\omega^2 C + \left(\frac{g}{R} + \frac{2k}{M}\right) C = \frac{2k}{M} B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\omega^2 - \frac{g}{R} - \frac{k}{m}) B - \frac{k}{m} C = 0 \\ -\frac{2k}{M} B + \left(\frac{g}{R} + \frac{2k}{M} - \omega^2\right) C = 0 \end{cases}$$

substitution au
determinant

$\Delta \neq 0$ 1 solution or $\Delta = 0$ si solution donc pas top

$\Delta = 0$ $\rightarrow$ on va en harmonique, on fait une astuce pour 1 seule avec CI

$$\Delta = \left(\frac{g}{R} + \frac{k}{m} - \omega^2\right) \left(\frac{g}{R} + \frac{2k}{M} - \omega^2\right) - \frac{2k^2}{Mm} = 0$$

Ne pas dépasser $\rightarrow \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right) \left(\frac{g}{R} + \frac{2k}{M} - \omega^2\right) = 0$

On remplace dans le système

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{g}{R} \\ \omega^2 = \frac{g}{R} + \frac{2k}{M} \end{cases} \begin{cases} \frac{k}{m} B = \frac{k}{m} C \rightarrow B = C \rightarrow \sigma' = \theta_2' \\ \frac{2k}{M} B = -\frac{k}{m} C \rightarrow \sigma'' = -\frac{M}{2m} \theta_2'' \end{cases}$$

CI compatibles avec

on a 3 cas

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{g}{R} \Rightarrow \theta_2 = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \text{ et } \theta_3 = -\theta_1 \\ \omega^2 = \frac{g}{R} + \frac{2k}{M} \Rightarrow \sigma = 0 \text{ (ie } \theta_3 = \theta_1) \text{ et } \theta_2 = 0 \text{ (pour } \sigma = \frac{\theta_1 + \theta_3}{2} \text{)} \\ \omega^2 = \frac{g}{R} + \frac{2k}{M} \Rightarrow \sigma = 0 \text{ (ie } \theta_3 = \theta_1) \text{ et } m\theta_1 + M\theta_2 + m\theta_3 = 0 \text{ (pour } \sigma'' = -\frac{M}{2m} \theta_2'' \text{)} \end{cases}$$

OK analyse initiale (- intuitif, centre inertia fixe)

Co Ces limites $\frac{k}{m} \ll \frac{g}{R}$ θ_2 et θ_3 perpendiculaire
 $\frac{k}{m} \gg \frac{g}{R}$ θ_2 et θ_3 ressorts rigides et θ_2 perpendiculaire car ressorts rigides

$\frac{k}{m} \gg \frac{g}{R}$ $\theta_1 = \theta_3$ et θ_2 oscille entre 2
 OK $\frac{2k}{m}$ car $M \gg m$
 $\frac{k}{m} \ll \frac{g}{R}$ $\omega = \omega''$ $\theta_2 = 0$ centre inertia fixe OK car c'est M!