TP n°3 : Numérisation et analyse spectrale

L'intérêt d'un oscilloscope numérique réside dans le fait qu'il numérise le signal analogique reçu [1] et dispose en mémoire des points qui décrivent les tensions observées. Cela permet alors de réaliser des opérations mathématiques sur ces courbes en traitant les échantillons directement, sans avoir à utiliser en plus une carte d'acquisition externe (qui fonctionne de la même façon) et un logiciel dédié comme Synchronie, Régressi ou Latis Pro.

Dans ce TP nous allons nous intéresser plus particulièrement à l'obtention de la transformée de Fourier rapide (ou FFT [2]) du signal.

I. Numérisation

Lors de la numérisation, l'oscilloscope ne peut utiliser qu'un nombre limité d'échantillons du signal analogique (sa mémoire ne dispose que d'une capacité finie). Pour cela, il l'échantillonne sur une durée limitée τ (**troncature**) et à intervalles de temps réguliers (de fréquence dite d'**échantillonnage** f_e).

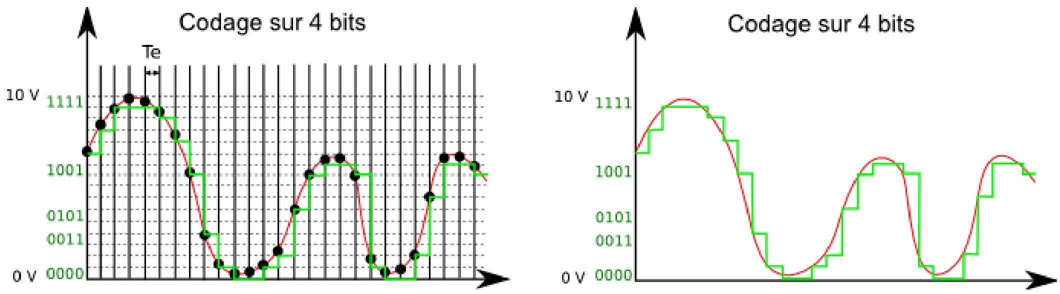
Pour avoir le temps ensuite de traiter le signal, il faut que celui-ci reste constant entre deux instants d'échantillonnage. On forme pour cela un signal constant par morceaux grâce à un processus dit de **blocage** sur des valeurs discrètes. On parle de **quantification** en amplitude [3].

L'ensemble **échantillonnage-blocage** constitue la **conversion analogique numérique** (CAN).

Détaillons et expérimentons un peu les effets que ces procédés ont sur le signal.

I.1 Quantification en amplitude

Celle-ci est effectuée sur un certain nombre de bits, par exemple



Sur les oscilloscopes on utilise 8 bits, soit $2^8 = 256$ niveaux possibles, pour améliorer la précision du signal numérique. Lorsque l'on cherche à faire une mesure à partir de l'image numérique du signal observée sur l'oscillo, on veillera à dilater au maximum la courbe en amplitude, afin d'utiliser le maximum de l'écran et donc de bits possibles.

Si pas d'oscilloscope Tektronix sur votre paillasse, venir voir au bureau pour les 4 questions suivantes.

1) Visualiser à l'oscilloscope un signal sinusoïdal de fréquence 1 kHz et de valeur crête à crête (peak to peak en anglais) de 150 mV, en utilisant tout l'écran. Pourquoi est-il si "épais" ?

2) À l'aide des fonctions de mesure de l'oscilloscope, afficher la tension crête à crête mesurée, la valeur moyenne ainsi que la valeur efficace.

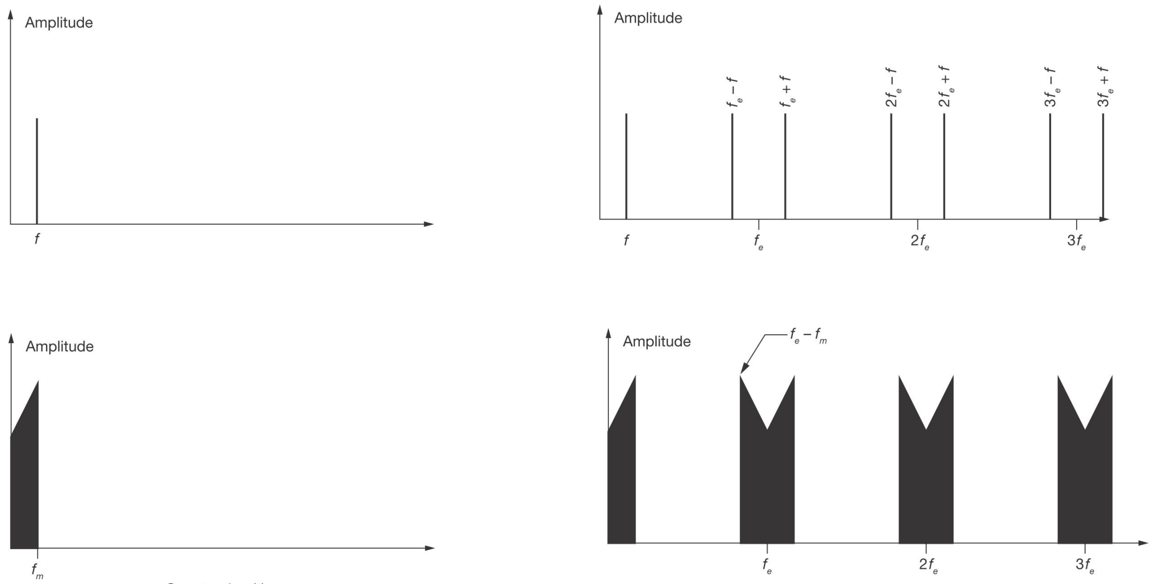
3) Modifier l'échelle en amplitude afin d'obtenir une courbe de plus en plus écrasée au centre de l'écran et lire pour chaque échelle les valeurs mesurées par l'appareil. Conclusion ?

4) Lorsque l'on est sur l'échelle 1V/division, appuyer sur la touche "run/stop" et zoomer sur la trace pour vérifier ce que l'oscilloscope voit comme signal et ce qu'il utilise pour faire les mesures. Conclusion ?

1. On parle de conversion analogique numérique (CAN).
2. Fast Fourier Transform
3. L'échantillonnage étant une quantification en temps.

I.2 Échantillonnage

Considérons ci-dessous les spectres échantillonnés (à droite) ou non (à gauche) d'un signal analogique $s(t)$ sinusoïdal (en haut) puis quelconque (en bas) :



Spectre de $s(t)$ — Spectre de $s(t)$ idéalement échantillonné

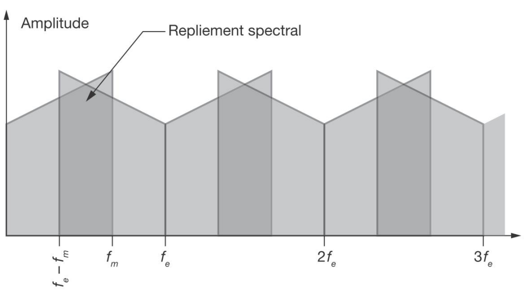
On constate, d'une part, que l'échantillonnage conduit à un **enrichissement périodique** du spectre à des fréquences $kf_e \pm f_m$ (on parle d'**aliasing** en anglais).

D'autre part :

- si $f_e - f_{\max} > f_{\max}$, c'est-à-dire si le **critère de Shannon-Nyquist**

$$\boxed{f_e > 2f_{\max}}$$

  est vérifié, comme sur la figure, alors on peut récupérer un spectre identique au cas non échantillonné en utilisant un passe-bas de fréquence de coupure comprise entre $f_{\max}$ et $f_e - f_{\max}$.
- sinon, on dit qu'il y a **repliement (ou recouvrement) de spectre**, comme ci-dessous :



Il est alors impossible de séparer les fréquences initiales de s, de celles liées à l'échantillonnage, et donc de les récupérer !

5) Repasser à une amplitude de 1 V pour la sinusoïde.

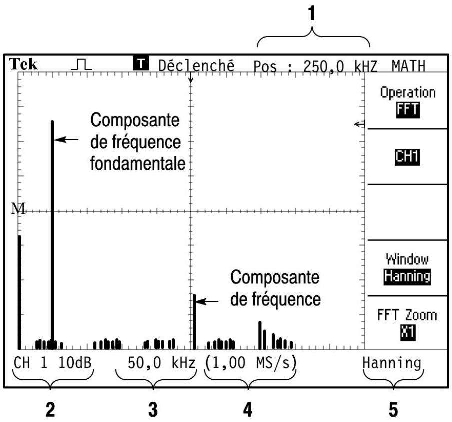
6) Appuyer sur la touche **MATH** (ou ± sur les HP) , puis utiliser les touches du menu afficher la FFT du signal. Régler la base de temps **SEC/DIV** de façon à avoir 250 Hz par division.

7) Vérifier que le pic est à la bonne fréquence à l'aide des curseurs.

8) Augmenter alors la fréquence du GBF, qu'arrive-t-il au pic ? Continuer à augmenter la fréquence, qu'observe-t-on au delà d'une certaine fréquence critique ?

9) Commenter, sachant que la fréquence d'échantillonnage f_e de l'appareil est indiquée sur l'écran (en kS/s = kilosamples/-seconde = kHz).

10) Vérifier que cette fréquence f_e correspond au double de la largeur de la plage totale de fréquence observée à l'écran. Intérêt ?



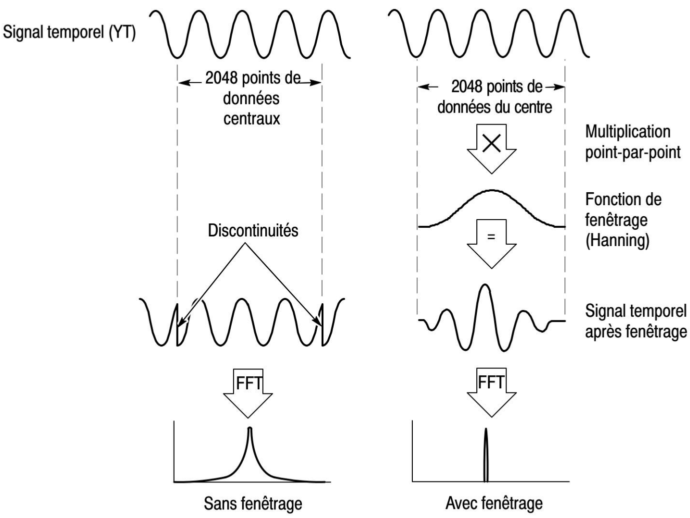
1. Fréquence au niveau de la ligne centrale du réticule
2. Echelle verticale, en dB par division (0 dB = 1 V_{eff})
3. Echelle horizontale, en fréquences par division
4. Fréquence d'échantillonnage, en nombre d'échantillons par seconde
5. Type de fenêtre FFT

I.3 Troncature

Pour calculer la transformée de FOURIER d'un signal, il faut le connaitre de $t = -\infty$ à $t = +\infty$. Or, il n'est pas possible de visualiser un signal sur une durée infinie, il est donc nécessaire de se limiter à une plage d'observation, l'écran de l'oscilloscope, de durée τ. La détermination de la FFT du signal suppose alors que ce qui est affiché à l'écran se répète à l'infini.

Pour un signal périodique, cela ne pose pas de problème si un nombre entier de période est affiché sur l'écran. Sinon, les points de début et de fin se situent à différentes amplitudes, ce qui provoque des discontinuités dans le signal, comme sur la figure de gauche ci-contre. On observe alors l'apparition de composantes hautes fréquences parasites dans le spectre, qui s'élargit.

Pour éviter cela, on applique une fonction de **fenêtrage** au signal temporel, qui modifie celui-ci afin que les valeurs de début et de fin soient proches l'une de l'autre, réduisant ainsi les discontinuités, comme sur la figure de droite ci-contre.



11) Revenir à $f = 1\,\text{kHz}$ et $f_e = 5\,\text{kHz}$.

12) Sans toucher à la base de temps, déplacer le spectre au milieu de l'écran à l'aide de la touche **HORIZONTAL POSITION** ou **REGLER SUR 0** (**CENTRAL FREQUENCY** pour les HP), puis zoomer sur le pic obtenu (**FREQUENCY SPAN** pour les HP). Observer sa non-idéalité due à la troncature, puis changer les trois types de fenêtrage et vérifier leur intérêt, indiqué sur l'écran de l'oscilloscope (meilleure précision en amplitude, en fréquence, et réservée aux signaux transitoires).

I.4 Résolution spectrale

Sur un oscilloscope, le nombre de points utilisés pour représenter un signal en vue de la FFT est une constante : par ex. $N = 2048$, quelle que soit la base de temps. La relation entre N, la durée τ d'observation du signal à l'écran, fixée par la base de temps, et la fréquence d'échantillonnage est

$$N = \frac{\tau}{T_e} = \tau f_e$$

Puisque N est fixé, le choix de la base de temps par le bouton **SEC/DIV** fixe donc f_e. Par ailleurs, le spectre est calculé avec $N/2$ points sur une plage de fréquence allant de 0 à[4] $f_e/2$. L'écart en fréquence entre deux points successifs du spectre est donc tel que

$$\Delta f = \frac{f_e/2}{N/2} = \frac{1}{\tau} \Longleftrightarrow \boxed{\tau.\Delta f \approx 1}$$

Pour avoir une bonne résolution spectrale, il faut disposer de suffisamment de points dans la zone à étudier, c'est-à-dire Δf faible, cela nécessite une faible fréquence d'échantillonnage f_e et donc une durée d'observation τ importante. Cependant, d'après le critère de Shannon-Nyquist, il faut aussi $f_e > 2f_{\max}$ c'est-à-dire τ faible.

On constate que les deux impératifs précédents s'opposent. Pour observer un spectre convenable, il va donc falloir faire un compromis entre le respect du critère de Shannon-Nyquist et la qualité de la résolution spectrale.

13) Repasser en affichage temporel (ou afficher le signal et sa FFT sur les HP) et régler la base de temps pour n'observer qu'un peu plus d'une période. Mesurer τ la largeur temporelle du signal à l'écran.

14) Afficher la FFT du signal et observer que l'échelle en fréquence n'est pas adaptée. Que risque-t-il de se passer si le spectre du signal comportait plusieurs fréquences ?

Passer en mode "curseur" et en déplacer un pour voir la plus petite variation de fréquence Δf mesurable.

15) Calculer le produit $\tau \times \Delta f$ pour différents calibres de la base de temps (et donc taille temporelle τ de fenêtre). On retrouve alors la formule ci-dessus, qui est un résultat très général lié à la transformée de Fourier, et sera rencontré de nombreuses fois dans le cours.

4. Ce qui permet bien de visualiser tout le signal quand $f_{\max} < f_e/2$, d'après Shannon.

II. Étude de différents signaux

Nous allons maintenant visualiser et mesurer les spectres de signaux non sinusoïdaux, afin de les comparer avec leur décomposition en série de Fourier théorique.

II.1 Mesures en amplitude

L'échelle en amplitude pour les spectres est logarithmique et non linéaire, afin de mieux représenter les harmoniques de poids faible qui seraient difficiles à distinguer du zéro en échelle linéaire.

La valeur lue en dB est reliée à la valeur efficace de la tension mesurée par la relation

$$V_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(\frac{V_{\mathrm{eff}}}{V_0}\right) \Leftrightarrow V_m = \sqrt{2}\cdot 10^{\frac{V_{\mathrm{dB}}}{20}}, \text{ puisque } V_0 = 1\,\mathrm{V} \text{ efficace.}$$

Les mesures seront réalisées avec la fenêtre adaptée, en jouant sur le zoom et la base de temps, afin d'être le plus précis possible.

II.2 Signal triangulaire

16) Vérifier l'absence d'harmoniques pairs. Mesurer, en dB puis en volts, les amplitudes des trois premières harmoniques non nulles et comparer avec la valeur théorique des coefficients du développement en série de Fourier du triangle : $c_{2n+1} = \dfrac{8E}{(2n+1)^2\pi^2}$, où E est l'amplitude du triangle.

17) Que se passe-t-il spectralement si l'on rajoute un offset avec le GBF (sans sortir le signal temporel de l'écran de l'oscillo !) ?

18) Que se passe-t-il quand on augmente la fréquence du signal du point de vue du repliement du spectre ? Pourquoi ce phénomène apparait-il plus rapidement que pour la sinusoïde ?

II.3 Signal créneau

19) Passer à un signal créneau et mesurer les amplitudes c'_n pour les harmoniques $n = 1$, $n = 3$, $n = 5$, $n = 7$, $n = 9$ et $n = 11$. Tracer le graphe de c'_n en fonction de n en échelle log-log. En déduire que $c'_n \propto 1/n^\alpha$ et déterminer le nombre α, supposé entier.

20) En conclure pourquoi le spectre d'un créneau est plus difficile à exploiter que celui d'une sinusoïde ou d'un triangle.

Remarque : Si on s'intéresse uniquement à l'amplitude d'harmoniques de rang faible, on peut choisir de ne conserver que ces dernières et d'éliminer les suivantes par filtrage passe bas. On parle alors de filtre anti-repliement (anti-aliasing (AA) en anglais). C'est utilisé pour améliorer la qualité de rendu d'un jeu vidéo ou de l'image prise par un appareil photo, en se débarrassant du crénelage, de l'effet de moiré etc.

21) Quel rapport peut-on faire entre la loi de décroissance des harmoniques du triangle et du créneau, en remarquant qu'un signal créneau est la dérivée d'un signal triangle ? On admettra qu'on peut dériver une série de Fourier terme à terme.

22) Modifier le rapport cyclique du créneau sur le GBF. En quoi le spectre est-il modifié ? Savez-vous pourquoi mathématiquement ? Pourquoi est-ce différent du repliement ?

II.4 Effet de la non linéarité

23) Pour les plus rapides, effectuer la multiplication de deux signaux sinusoïdaux identiques, à l'aide d'un multiplieur AD633 alimenté **préalablement** en $+15\,\mathrm{V}/0/-15\,\mathrm{V}$. Observer le spectre et interpréter les harmoniques présentes. Quel est l'effet d'un composant non linéaire (le multiplieur) sur le spectre d'un signal ?

24) Faire de même avec une sinusoïde et un créneau. Interpréter en liaison avec le fenêtrage.