TD n°3: Introduction aux ondes

Exercice 1 : Influence de la raideur sur une corde vibrante

On envisage une petite déformation transversale $y(x,t)$ sur une corde vibrante de masse linéique μ tendue avec une tension T. La corde n'étant pas parfaitement souple, la force exercée en un point d'abscisse x par la partie située au delà de x sur la partie située en deçà est de la forme :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{T} - \gamma \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \overrightarrow{u_y}$$

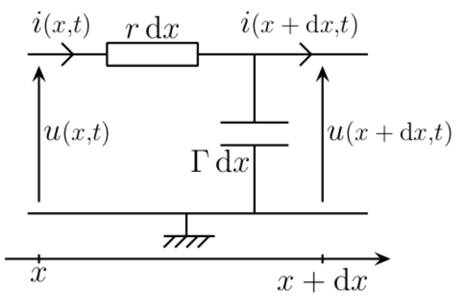
1) Chercher par analyse dimensionnelle une expression de la constante positive γ sous la forme d'un monôme $\gamma = Y^p r^q$ en fonction du module d'YOUNG Y et du rayon r de la corde.

2) Établir l'équation d'onde dont est solution $y(x,t)$.

3) La corde est fixée en ses extrémités de telle sorte que $y(x=0,t) = 0$ et $y(x=L,t) = 0$. On cherche des modes propres de la forme $y_n(x,t) = C_n \sin(n\pi x/L)\cos(\omega_n t)$. Déterminer les pulsations propres ω_n.

Exercice 2 : Câble RC

Une ligne bifilaire dissipative est modélisée par une résistance linéique r et une capacité linéique Γ comme ci dessous:



1) Établir l'équation de propagation dont est solution $u(x,t)$. Citer un phénomène solution d'une équation analogue.

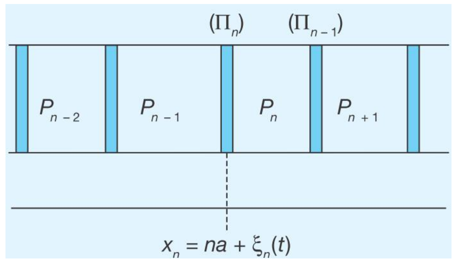
2) Chercher des solutions stationnaires de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$. Montrer que si l'on court-circuite la ligne de longueur L en ses extrémités de telle sorte que $u(0,t) = u(L,t) = 0$, seuls des modes repérés par un entier n peuvent exister.

3) À l'instant $t = 0$, les condensateurs sont chargés avec une tension $u(x,0) = 4A\sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ et on court-circuite les extrémités de la ligne.

Déterminer $u(x,t)$, faire apparaître une durée caractéristique et commenter.

Exercice 3 : Premier modèle de propagation du son dans l'air

Un tuyau calorifugé de section S est partagé en une infinité de compartiments (C_n) par des pistons calorifugés (Π_n) et (Π_{n+1}) de section S et de masse m.
Dans chaque compartiment se trouve une mole d'air, assimilé à un gaz parfait, évoluant de manière isentropique selon la loi de LAPLACE pV^γ = constante. A l'équilibre, l'abscisse du piston (n) vaut $x_{n,eq} = na$ et la pression a la même valeur p_0 dans chaque compartiment.
Hors d'équilibre, l'abscisse du piston (n) vaut $x_n = na + \xi_n(t)$ avec $|\xi_n(t)| \ll a$ et la pression dans le compartiment (n) vaut p_n.



1) Établir l'expression de la pression p_n en fonction de p_0, γ, a, ξ_n et ξ_{n+1} et la linéariser. En déduire l'équation du mouvement du piston (Π_n) :

$$\frac{d^2\xi_n}{dt^2} = \frac{\gamma S p_0}{m a}[\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2\xi_n]$$

2) On fait l'approximation des milieux continus en définissant une fonction $\xi(x,t)$ variant peu à l'échelle de a, telle que $\xi(na,t) = \xi_n(t)$ de telle sorte que $\xi(x,t)$ vérifie l'équation aux différences finies :

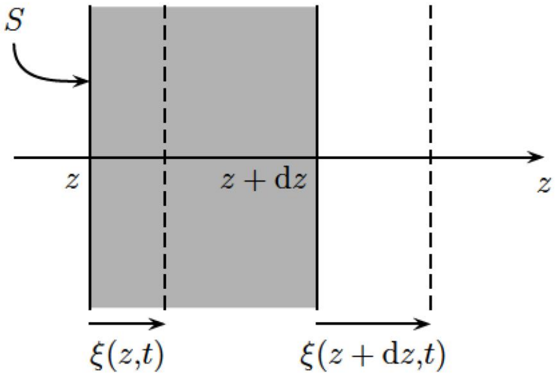
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\gamma S p_0}{ma}[\xi(x+a,t) + \xi(x-a,t) - 2\xi(x,t)]$$

En utilisant des développements limités d'ordre deux en a, en déduire que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation de D'ALEMBERT. Expliciter la célérité correspondante et commenter son expression.

3) Évaluer la célérité c du son dans l'air dans le cadre de ce modèle en supposant que les pistons de masse m du modèle sont en réalité constitués par le volume d'air $V = S\,a$ compris entre deux pistons dans le modèle. Données : $\gamma = 1{,}40$; $p_0 = 1{,}0\,\text{bar}$; masse volumique de l'air dans les conditions normales $\mu_0 = 1{,}3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Exercice 4 : Second modèle de propagation du son dans l'air

On considère un milieu compressible et homogène caractérisé, au repos, par sa masse volumique ρ_0 uniforme, et au sein duquel règnent une température T_0 et une pression P_0 uniformes (pesanteur négligée). Pour décrire la déformation du milieu, on considère une tranche (système fermé) de section S et d'épaisseur dz initialement au repos. Sous l'effet d'une perturbation se propageant dans la direction z, la tranche élémentaire, repérée au repos par l'abscisse z, est déplacée d'une distance $\xi(z,t)$ à un instant t appelée champ de déplacement acoustique.



On note $P(z,t)$ et $\rho(z,t)$ respectivement la pression et la masse volumique de cette tranche élémentaire à un instant t quelconque. On définit enfin par $\vec{v}(z,t) = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}\vec{u_z}$ la vitesse de cette tranche.

1) Déterminer, par conservation de la masse, la relation liant $\rho(z,t)$ à ρ_0 et $\dfrac{\partial \xi}{\partial z}$.

2) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la tranche de fluide initialement au repos entre les abscisses z et $z+dz$, établir la relation reliant ρ_0, $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial z}$.

3) En déduire que $\xi(z,t)$ vérifie l'équation différentielle suivante, où $\chi_S = \dfrac{1}{\rho}\left.\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right|_S$ est le coefficient de compressibilité isentropique du milieu:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_S \rho_0}\,\frac{\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}{\left(1+\dfrac{\partial \xi}{\partial z}\right)}$$

4) On se place maintenant dans l'approximation acoustique où l'on suppose l'inégalité $\left|\dfrac{\partial \xi}{\partial z}\right| \ll 1$. Montrer que le champ de vitesse $v(z,t)$ vérifie alors une équation de propagation de d'ALEMBERT. Exprimer la célérité c_0 des ondes acoustiques. Donner la forme générale d'une solution sinusoïdale progressive d'amplitude v_0, de pulsation temporelle Ω et se propageant dans le sens des z croissants avec un vecteur d'onde $\vec{K} = K\vec{u_z}$. Exprimer la norme de $\vec{K}$ en fonction des données.

5) Exprimer la célérité du son dans l'air, notée c_{air}, en fonction de grandeurs pertinentes puis calculer sa valeur dans le cas d'un propagation isentropique dans l'air, assimilé à un gaz parfait à la température $T_0 = 300\,\text{K}$. Comparer la valeur obtenue à l'ordre de grandeur (que l'on précisera) de la célérité c_{sol} des ondes sonores dans un solide.

Exercice 5 : Corde avec frottements

On considère une corde souple, inélastique, de masse linéique μ_ℓ, la tension à l'équilibre étant T_0. Les hypothèses sont celles du cours.
Le petit élément de corde compris entre les plans x et $x+dx$ est soumis à la force de frottement: $\overrightarrow{dF} = -h\,\vec{v}\,dx$, où $\vec{v}$ est la vitesse de l'élément de corde selon Oy.

1) Quelle est l'explication physique de la présence de cette force de frottement?

2) Écrire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $y(x,t)$.

3) En déduire la relation de dispersion pour une onde de la forme $\underline{y}(x,t) = a\exp(i(\omega t - kx))$.

4) On suppose $h \ll \mu_\ell \omega$. Exprimer k sous la forme $k = k_1 - ik_2$.

On admet que si z est un nombre complexe de module très petit devant 1, alors $(1+z)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}z$.

5) Le milieu est-il dispersif? Absorbant? Écrire l'élongation réelle $y(x,t)$.

6) En exprimant le travail élémentaire de la force de frottement, calculer la puissance moyenne par unité de longueur perdue par la corde.

Exercice 6 : Réflexion sur une masse libre

Au point d'abscisse $x = 0$ d'une corde très longue, de masse linéique μ, est attachée une masse m (par exemple une perle enfilée sur la corde). Une onde incidente $\underline{y_i} = ae^{i(\omega t - kx)}$ arrive du côté $x < 0$.

1) Déterminer l'expression du coefficient de réflexion $\underline{r}$ (en négligeant le poids de la masse).

2) Que se passe-t-il pour $m \to \infty$?

Réponses

Exercice 1 : Influence de la raideur sur une corde vibrante

$\gamma = Yr^4$, $\mu \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \gamma \dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ et $\omega_n = \omega_{0n}\sqrt{1 + \dfrac{\gamma n^2 \pi^2}{L^2 T}}$.

Exercice 2 : Câble RC

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r\Gamma \dfrac{\partial u}{\partial t}$ équation de diffusion et non de propagation!

2) $u(x,t) = U_0 e^{-t/\tau}\cos(kx + \varphi)$ avec $k = \sqrt{\dfrac{r\Gamma}{\tau}}$. Les CL donnent ensuite $u(x,t) = U_0 e^{-t/\tau}\sin(kx)$ et $\tau = \dfrac{r\Gamma L^2}{n^2\pi^2}$

3) Linéariser le sinus cube et superposer $u(x,t) = 3Ae^{-t/\tau}\sin\left(\dfrac{\pi x}{L}\right) - Ae^{-9t/\tau}\sin\left(\dfrac{3\pi x}{L}\right)$

Exercice 3 : Premier modèle de propagation du son dans l'air

1) Utiliser la loi de Laplace pour l'air, étudier le mouvement d'un piston, puis combiner les deux équations.

2) $c = \sqrt{\dfrac{\gamma S p_0 a}{m}}$.

Exercice 4 : Second modèle de propagation du son dans l'air

1) $\rho_0 = \rho(z,t)\left[1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\right]$

2) $\rho_0 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial P}{\partial z}$

3) Penser à utiliser la formule de dérivation d'une composition de fonctions $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial P}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial z}$

4) $c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$, $v(z,t) = v_0 \cos(\Omega t - Kz + \varphi)$ et $K = \dfrac{\Omega}{c_0}$

5) $c_{\text{air}} = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} = \sqrt{\dfrac{\gamma R T_0}{M}} = \sqrt{\dfrac{1,4 \times 8,31 \times 300}{29.10^{-3}}} \approx 3,5.10^2$ m.s^{-1}.

Exercice 5 : Corde avec frottements

2) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{h}{\mu_\ell}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

3) $k^2 c^2 + i\omega \dfrac{h}{\mu_\ell} - \omega^2 = 0$

4) $k = \dfrac{\omega}{c} - i\dfrac{h}{2\mu_\ell c}$

5) $y(x,t) = a \exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right)\cos(\omega t - k_1 x)$ avec $\delta = \dfrac{1}{k_2}$.

6) $< \mathcal{P} >= -h < v^2 >= -\dfrac{1}{2} h \omega^2 a^2 \exp\left(-\dfrac{2x}{\delta}\right)$

Exercice 6 : Réflexion sur une masse libre

Écrire le PFD sur la masse pour en déduire que $1 + \underline{r} = \underline{t}$ et $-m\omega^2(1 + \underline{r}) = ikT(1 - \underline{r} - \underline{t})$. On aboutit à $\underline{r} = \dfrac{-1}{1 - \frac{2i\sqrt{\mu T}}{m\omega}}$.